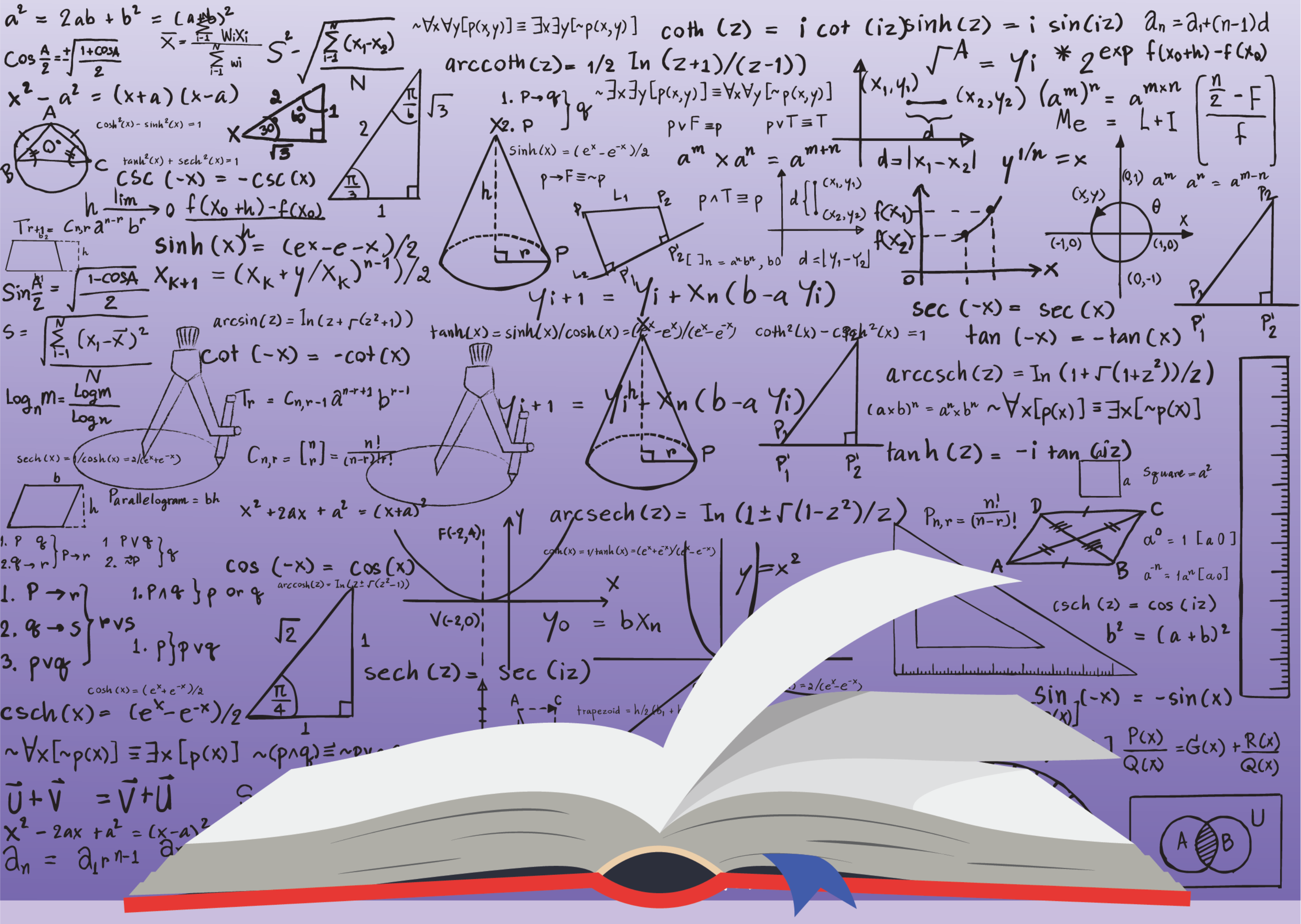
7.2 අසමානතා විශ්ලේෂණය කරයි.



නිපුණතාව 7

නිපුණතාව මට්ටම 7.2

ඉගෙනුම් ඵල

- අසමානතා පිළිබඳ මූලික ප්‍රතිඵල ප්‍රකාශ කර සාධනය කරයි.
- ඒකජ හා වර්ගජ ශ්‍රිත ඇතුළත් අසමානතා වීජීයව සහ ප්‍රස්ථාරිකව විසඳයි.
- පරිමේය ශ්‍රිත අඩංගු අසමානතා වීජීයව හා ප්‍රස්ථාරිකව විසඳයි.

අන්තර්ගතය සකස් කිරීම -: එන්.එම්. මිස්බා මයා, උසස් බාලිකා විද්‍යාලය, නුවර.
පරිගණක පිටු සැකසීම -: පී.ඩී.ඒ. ගුණවර්ධන මිය, මා/ දෙනියාය මධ්‍ය විද්‍යාලය.
අන්තර්ගතය පරීක්ෂා කිරීම -:

- $a, b, c, d \in R$ විට

(1) i. $a > b$ සහ $b > c$ නම් $a > c$

ii. $a < b$ සහ $b < c$ නම් $a < c$

(2) i. $a > b$ නම් $a + c > b + c$ සහ $a - c > b - c$

ii. $a < b$ නම් $a + c < b + c$ සහ $a - c < b - c$

(3) i. $a > b$ සහ $c > 0$ නම් $ac > bc$ සහ $\boxed{\frac{a}{c} > \frac{b}{c}}$

ii. $a < b$ සහ $c > 0$ නම් $ac < bc$ සහ $\boxed{\frac{a}{c} < \frac{b}{c}}$

(4) i. $a > b$ සහ $c < 0$ නම් $ac < bc$ සහ $\boxed{\frac{a}{c} < \frac{b}{c}}$

ii. $a < b$ සහ $c < 0$ නම් $ac > bc$ සහ $\boxed{\frac{a}{c} > \frac{b}{c}}$

(5) $a > b > 0$ නම් $\boxed{\frac{1}{a} < \frac{1}{b}}$

(6) $a > b$ සහ $c > d$ නම් ; $a + c > b + d$

(7) $a > b > 0$ සහ $c > d > 0$ නම් ; $ac > bd$

(8) $a > b > 0$ සහ n යනු පරිමේය සංඛ්‍යාවන් වන විට $a^n > b^n$ සහ $a^{-n} < b^{-n}$ වේ.

සාධනය

(1) i. $a > b \Longrightarrow a - b > 0$

$b > c \Longrightarrow b - c > 0$

□ $(a - b) + (b - c) > 0$

$\Longrightarrow a - c > 0$

$\Longrightarrow a > c$

ii. $a < b \Longrightarrow a - b < 0$

$b < c \quad b - c < 0$

$\Longrightarrow$ □ $(a - b) + (b - c) < 0$

$a \Longrightarrow - c < 0$

$a < c$

(2) i. $(a + c) - (b + c) = a - b > 0$

(□ $a > b$)

$\Longrightarrow a + c > b + c$

ii. එමෙන්ම සාධනය කළ හැකිය.

(3) i. $ac - bc = c(a - b)$

$c > 0$ බැවින් $c(a - b) > 0$

□ $ac > bc$

$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{1}{c}(a - b) > 0 \; (\because c > 0, a > b)$

$\therefore \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ වේ.

ii. ඉහත ආකාරයට ද සාධනය කළ හැකිය.

(4) **i.** $ac - bc = (a - b)c < 0$ (□ $c < 0, a > b$)

□ $ac < bc$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{1}{c}(a - b) < 0$$

$$\therefore \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

ii. ඉහත ආකාරයට සාධනය කළ හැකිය.

(5) **i.** $a > b > 0$ බැවින් $ab > 0$ වේ.

ඉහත (3) i. අනුව $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

එනම් $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ වේ.

(6) $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (b - d)$

$a - b > 0$ සහ $b - d > 0$ බැවින්,

$(a - b) + (b - d) > 0$ වේ.

□ $(a + c) > (b + d)$

(7) $a > b > 0$ හා $c > 0$ බැවින් ,

$\Longrightarrow$ $ac > bc$ —— 1

සහ $c > d > 0$ හා $b > 0$ බැවින් ,

$bc > bd$ —— 2

එවිට 1 හා 2 මගින්

$ac > bd$ මගින්

අන්තර්ගතය සකස් කිරීම -: එන්.එම්. මිස්බා මයා, උසස් බාලිකා විද්‍යාලය, නුවර.
පරිගණක පිටු සැකසීම -: පී.ඩී.ඒ. ගුණවර්ධන මිය, මාර/ දෙනියාය මධ්‍ය විද්‍යාලය.
අන්තර්ගතය පරීක්ෂා කිරීම -:

(8) $n \in z^{+}$ විට

$(a^n - b^n) = (a - b)\{a^{n-1} + a^{n-2}b + 111 + a^{n-r-1}b^r + 111 + b^{n-1}\}$

$a > b > 0$ බැවින් ;

$\Longrightarrow a^n > b^n$

$n = \frac{p}{q}$ වන පරිදි ධන පරිමේය සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු.

එවිට $a^{p/q} = (a^{1/q})^p = c^p$ සහ

$b^{p/z} = (b^{1/q})^p = d^p$ ලෙස ගනිමු.

මෙහි $c = a^{1/q}$ $c > 0$ සහ $d = (b^{1/q})$ $c > 0$ වේ.

(□ $a > b > 0$ බැවින්)

$\Longrightarrow$

$c^q = a$ හා $b = d^q$

$\Longrightarrow$ $a > b$ නිසා $c^q > d^q$

$c^q - d^q > 0$

$(c - d)(c^{q-1} + c^{q-2}d + 111 + c^{q-r+1}d^r + 111 + d^{q-1}) > 0$

$c > 0$ හා $d > 0$ නිසා එවිට,

$\Longrightarrow$ $c^{q-1} + c^{q-2}d + 111 + c^{q-r+1}d^r + 111 + d^{q-1} > 0$ බැවින්,

$c > d$

එනම් $a^{1/q} > b^{1/q}$

$P \in z^{+}$ නිසා

$(a^{1/q})^p > (b^{1/q})^p$

□ $a^n > b^n \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{a^n} < \frac{1}{b^n}}$ වේ. (□ $n = p/q$)

(5) අනුව

සටහන :

- මෙතෙක් සලකන ලද **a > b , a < b** ආකාරයේ අසමානතා සෘජු අසමානතා ලෙස හැඳින්වේ.
- අසමානතා, සමානතා සමඟ සම්බන්ධ කිරීමෙන් **a ≥ b** හා **a ≤ b** ආකාරයේ අසමානතා ලැබේ.
- මෙවැනි අසමානතා සෘජු නොවූ අසමානතා ලෙස හඳුන්වමු.
- මෙම අසමානතා ද ඉහත **7.2.1** නියම වලට අනුකූල වේ.

නිදසුන 1

$x > 2$ විට $x^3 > x^2 + x + 2$ බව සාධනය කරන්න.

විසඳුම :-

$x^3 - (x^2 + x + 2)$

$x^3 - (x^2 + x + 2) \equiv x^3 - x^2 - x - 2$

$\equiv (x - 2)\ \{x^2 + x + 1\}$

$\equiv (x - 2)\ \{(x + 1/2)^2 + 3/4\}$

$x > 2\ (x + 1/2)^2 + 3/4 > 0\ x - 2 > 0$

$\Rightarrow\ x^3 - (x^2 + x + 2) > 0$

$x^3 > x^2 + x + 2$

නිදසුන 2

x යනු ධන තාත්වික සංඛ්‍යා විට ,

$\boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} \ge x^2 + \frac{1}{x^2}}$ බව සාධනය කරන්න.

විසඳුම :-

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} - x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$= (x^3 - x^2) + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

$$= x^2(x-1) - \frac{1}{x^3}(x-1)$$

$$= (x-1)\left\{x^2 - \frac{1}{x^3}\right\}$$

$$= \frac{(x-1)}{x^3}(x^5 - 1)$$

$$= \frac{(x-1)(x-1)}{x^3}\{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x^3}(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$\therefore\ x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \ge 0$ වේ

මෙහි $x > 0$ බැවින් $(x - 1)^2 \ge 0$, $x^3 > 0$ සහ $X^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ ද වේ.

$$\Rightarrow \boxed{x^3 + \frac{1}{x^5} \ge x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

අන්තර්ගතය සකස් කිරීම -: එන්.එම්. මිස්බා මයා, උසස් බාලිකා විද්‍යාලය, නුවර.
පරිගණක පිටු සැකසීම -: පී.ඩී.ඒ. ගුණවර්ධන මිය, මාර/ දෙනියාය මධ්‍ය විද්‍යාලය.
අන්තර්ගතය පරීක්ෂා කිරීම -:

නිදසුන

a , b , c යනු ප්‍රභින්න ධන සංඛ්‍යා වන විට ,
$a^3 + b^3 > ab\,(a + b)$ බව සාධනය කරන්න.
තව ද $2\,(a^3 + b^3 + c^3) > ab\,(a + b) + bc\,(b + c) + ac\,(a + c)$
බව ද අපෝහනය කරන්න.

විසඳුම :-

$a^3 + b^3 - ab\,(a + b)$ සලකමු.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - ab\,(a + b) &= a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \\ &= (a^3 - a^2b) + (b^3 - ab^2) \\ &= a^2(a - b) + b^2(b - a) \\ &= (a - b)(a^2 - b^2) \\ &= (a - b)^2(a + b) \end{aligned}$$

□ a , b , යනු ප්‍රභින්න ධන සංඛ්‍යා බැවිනි.

$(a - b)^2\,(a + b) > 0$ වේ.

□ $a^3 + b^3 - ab(a + b) > 0$ වේ.

$\Rightarrow a^3 + b^3 > ab\,(a + b)$

ඉහත අසමානතාවයටම

$b^3 + c^3 > bc\,(b + c)$

$c^3 + a^3 > ca\,(c + a)$ වේ.

ඉහත අසමානතා එකතු කිරීමෙන් (□ 7.2.1 (6))

$2\,(a^3 + b^3 + c^3) > ab\,(a + b) + bc\,(b + c) + ca\,(c + a)$

අන්තර්ගතය සකස් කිරීම -: එන්.එම්. මිස්බා මයා, උසස් බාලිකා විද්‍යාලය, නුවර.
පරිගණක පිටු සැකසීම -: පී.ඩී.ඒ. ගුණවර්ධන මිය, මාර/ දෙනියාය මධ්‍ය විද්‍යාලය.
අන්තර්ගතය පරීක්ෂා කිරීම -:

7.2.2 වීජීය ශ්‍රිතීය අසමානතා

f හා g, xහි ශ්‍රිත දෙකක් නම් $f(x)>g(x)$ හෝ $f(x)<g(x)$ ආකාරයේ සෘජු අසමානතාවයකට හෝ $f(x) \geq g(x)$ හෝ $f(x) \leq g(x)$ සෘජු නොවන අසමානතාවයකට x හි අසමානතාවක් යැයි කියනු ලැබේ.

අසමානතාවය සපුරලන x හි අගයයන් එම අසමානතාවයේ විසඳුම් ලෙස හඳුන්වනු ලැබේ. තව ද මෙම අසමානතා සපුරාලන x හි අගය පරාසයට අසමානතාවේ විසඳුම් යැයි කියනු ලැබේ.

නිදසුන් 01

(i) 3x -1 > 5 අසමානතාව විසඳන්න.

$$3x - 1 > 5$$
$$3x > 5 + 1$$
$$x > 2$$

□ විසඳුම් $\{x| x >2\}$ හෝ $(2 ,+ \infty)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

(ii) 4x -5 ≤ x - 3 අසමානතාව විසඳන්න.

$$4x - 5 \leq x - 3$$
$$3x \leq 2$$
$$x \leq 2 / 3$$

□ විසඳුම් $\{x| x \leq 2 / 3\}$ හෝ $(- \infty , 2 / 3)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

අන්තර්ගතය සකස් කිරීම -: එන්.එම්. මිස්බා මයා, උසස් බාලිකා විද්‍යාලය, නුවර.
පරිගණක පිටු සැකසීම -: පී.ඩී.ඒ. ගුණවර්ධන මිය, මාර/ දෙනියාය මධ්‍ය විද්‍යාලය.
අන්තර්ගතය පරීක්ෂා කිරීම -:

නිදසුන් 02

$(x^2 - x - 2 > 0$ අසමානතාව විසඳන්න.

විසඳුම : $(x^2 - x - 2 > 0$

පළමුව මෙය සාධනවලට වෙන් කල යුතුය.

$\Rightarrow$ **$(x + 1)(x - 2) > 0$**

ක්‍රමය 01 : ඉහත අසමානතාවය සපුරාලීම සඳහා:

(i). $(x+1) > 0$ හා $(x - 2) > 0$ **හෝ**
(ii) . $(x+1) < 0$ හා $(x - 2) < 0$ විය යුතුය.

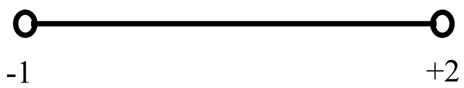
(i) න් $x > -1$ හා $x > 2$ බැවින්
$\Rightarrow$ **$x : x > 2$** විය යුතුය.

හෝ

(ii) න් $x < -1$ හා $x < 2$ විය යුතුය.
$\Rightarrow$ **$x : x < -1$** විය යුතුය.

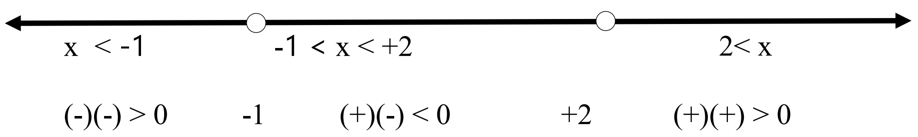
ඉහත විසඳුම් දෙක එකට සම්බන්ධ කිරීමෙන් දී තිබෙන අසමානතාවය සපුරාලන x හි අගය සෙවිය හැකිය.

එනම්, විසඳුම $\{ x \mid x < -1$ හෝ $x > 2 \}$ ලෙස ලිවිය හැකිය.



ක්‍රමය 02 : $(x + 1)(x - 2) > 0$

මෙම සාධක දෙක ශූන්‍ය වන x හි අගයන් දෙක සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කළ යුතුය. මෙම අගයන් දෙකෙන් සංඛ්‍යා රේඛාව පෙදෙස් තුනකට බෙදිය හැකි ය.



පසුව එක් එක් පෙදෙස තුළ $(x + 1)(x - 2)$ හි ලකුණු සාකච්ඡා කිරීමෙන් ද මෙම ගැටළුව විසඳිය හැක.(ඉහතින් දක්වා ඇත.)

එනම්,

$x : x < -1$ හෝ $x : x > 2$ විසඳුම් වේ.

එනම්, විසඳුම $\{ x \mid x < -1$ හෝ $x > 2 \}$ **හෝ**

$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

අන්තර්ගතය සකස් කිරීම -: එන්.එම්. මිස්බා මයා, උසස් බාලිකා විද්‍යාලය, නුවර.
පරිගණක පිටු සැකසීම -: පී.ඩී.ඒ. ගුණවර්ධන මිය, මාර/ දෙනියාය මධ්‍ය විද්‍යාලය.
අන්තර්ගතය පරීක්ෂා කිරීම -:

7.2.3 P(x) , Q(x) , x හි බහුපද වන $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ආකාරයේ පරිමේය ශ්‍රිත ඇතුළත් අසමානතා

නිදසුන් 01

$\frac{x-1}{x+2} \rangle 4$ අසමානතාවය විසඳන්න. මෙහි $x \neq -2$

විසඳුම :

$$\frac{x-1}{x+2} \rangle 4$$

$$\frac{x-1}{x+2} - 4 \rangle 0$$

$$\frac{-3x-9}{x+2} \rangle 0$$

$$-3\frac{(x+3)}{(x+2)} \rangle 0 \quad ; \quad x \neq -2$$

$(x \neq -2)$

මෙම ප්‍රකාශනයේ අඩංගු එක් එක් සාධක ශූන්‍ය වන x හි අගයන් සංඛ්‍යා රේඛාව මත ලකුණු කිරීමෙන් මෙම ප්‍රකාශනයේ ලකුණු සාකච්ඡා කළ හැකිය.

$-\frac{(-)}{(-)} < 0$ -3 $-\frac{(+)}{(-)} > 0$ -2 $-\frac{(+)}{(+)} < 0$

x < - 3

-3 < x < -2 2 <x

සැ.යු.ක.

මෙහි දී $\frac{x-1}{x+2} \rangle 4$ යන්න හරස් ගුණිතය තුළින් x - 1 > 4 (x + 2) ලෙස ලිපිය නොහැකිය. මක් නිසා ද යත් x + 2 හි ලකුණ ධන හෝ ඍණ වීමයි.

ක්‍රමය 02 : $$-3\frac{(x+3)}{(x+2)} \rangle 0$$ බැවින්

මෙය සපුරාලීම සඳහා $\frac{(x+3)}{(x+2)}$ හි ලකුණ ඍණ විය යුතුය.

එනම්,

(i) x +3 > 0 හා x + 2 < 0

හෝ

(ii) x +3 < 0 හා x + 2 > 0 විය යුතුය.

(i) න් x > -3 හා x < -2 විය යුතු බැවින්

x : -3 <3 < x < -2 විය යුතුය.

(ii) න් x < -3 හා x > -2 විය යුතුය.

එනම් මෙය විය නොහැකිය.

එබැවින් විසඳුම : { x| -3 < x < -2 } හෝ (-3 , -2) ලෙස ලිවිය හැකිය.

අන්තර්ගතය සකස් කිරීම -: එන්.එම්. මිස්බා මයා, උසස් බාලිකා විද්‍යාලය, නුවර.
පරිගණක පිටු සැකසීම -: පී.ඩී.ඒ. ගුණවර්ධන මිය, මාර/ දෙනියාය මධ්‍ය විද්‍යාලය.
අන්තර්ගතය පරීක්ෂා කිරීම -:

නිදසුන් 03

$\frac{9-4x)}{x^2+x+1} \geq 3$ විසඳන්න.

විසඳුම:

$$\frac{9-4x)}{x^2+x+1} - 3 \geq 0$$

$$\frac{-3x^2-7x+6}{x^2+x+1} \geq 0$$

$$-\frac{3x^2+7x-6}{x^2+x+1} \geq 0$$

$\frac{-(3x-2)(x+3)}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \geq 0$ අසමානතාවය විසඳන්න.

සියළුම x ϵ / R සඳහා $(x + 1/2)^2 + 3/4 > 0$ බැවින් (x - 2/3) (x +3) යන ප්‍රකාශනයේ ලකුණ මත මෙම අසමානතාවය රඳා පවතී.

මේ සඳහා ද ඉහත භාවිත කළ ක්‍රම දෙකෙන් ඕනෑම ක්‍රමයක් අපට භාවිත කළ හැකිය.

x = 2/3 හෝ x = -3 විට අසමානතාවය සපුරාලයි.

(-) < 0	-3	(+) > 0	2/3	(-) < 0
x < -3		-3 < x < 2/3		2/3< x

□ විසඳුම { x | -3 ≤ x ≤ 2/3 } හෝ [-3 , 2/3] ලෙස ලිවිය හැකිය.

අන්තර්ගතය සකස් කිරීම -: එන්.එම්. මිස්බා මයා, උසස් බාලිකා විද්‍යාලය, නුවර.
පරිගණක පිටු සැකසීම -: පී.ඩී.ඒ. ගුණවර්ධන මිය, මාර/ දෙනියාය මධ්‍ය විද්‍යාලය.
අන්තර්ගතය පරීක්ෂා කිරීම -:

ක්‍රමය 02 : $-3\dfrac{(x+3)}{(x+2)} \rangle 0$ බැවින්

මෙය සපුරාලීම සඳහා $\dfrac{(x+3)}{(x+2)}$ හි ලකුණ සෘණ විය යුතුය.

එනම්,

(i) $x+3 > 0$ හා $x+2 < 0$

හෝ

(ii) $x+3 < 0$ හා $x+2 > 0$ විය යුතුය.

(i) න් $x > -3$ හා $x < -2$ විය යුතු බැවින්

$x : -3 < 3 < x < -2$ විය යුතුය.

(ii) න් $x < -3$ හා $x > -2$ විය යුතුය.

එනම් මෙය විය නොහැකිය.

එබැවින් විසඳුම : $\{ x \mid -3 < x < -2 \}$ **හෝ** $(-3, -2)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

නිදසුන් 03

$\dfrac{9-4x)}{x^2+x+1} \geq 3$ විසඳන්න.

විසඳුම:

$$\frac{9-4x)}{x^2+x+1} - 3 \geq 0$$

$$\frac{-3x^2-7x+6}{x^2+x+1} \geq 0$$

$$-\frac{3x^2+7x-6}{x^2+x+1} \geq 0$$

අන්තර්ගතය සකස් කිරීම -: එන්.එම්. මිස්බා මයා, උසස් බාලිකා විද්‍යාලය, නුවර.
පරිගණක පිටු සැකසීම -: පී.ඩී.ඒ. ගුණවර්ධන මිය, මාර/ දෙනියාය මධ්‍ය විද්‍යාලය.
අන්තර්ගතය පරීක්ෂා කිරීම -: