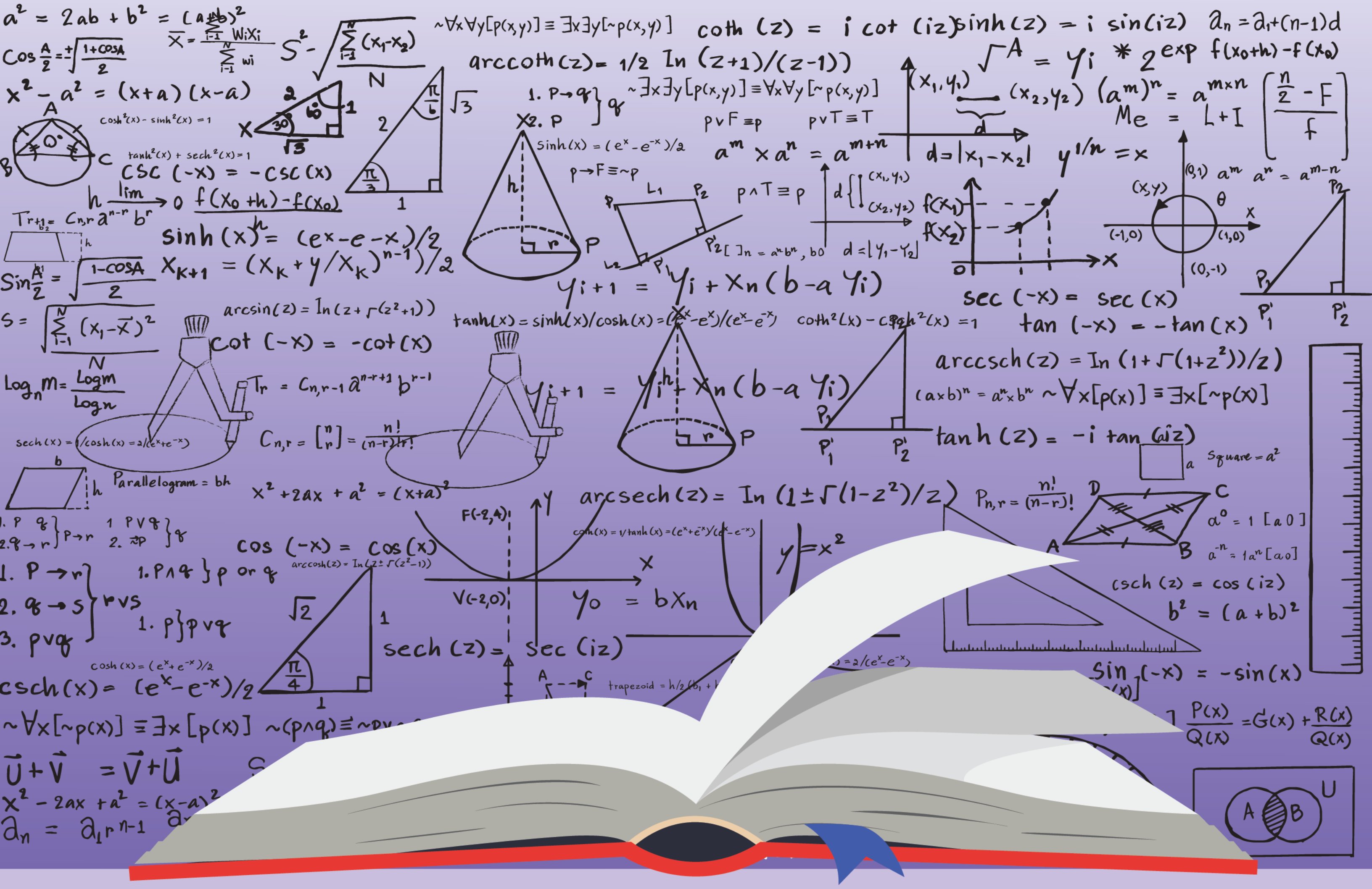
සංයුක්ත ගණිතය

2.0 ශ්‍රිත



2.1.0 හැඳින්වීම

X නම් නොහිස් කුලකයක සිට Y නම් තවත් නොහිස් කුලකයකට ඇති පහතින් දැක්වෙන සම්බන්ධතා කිහිපයක් සලකා බලමු.

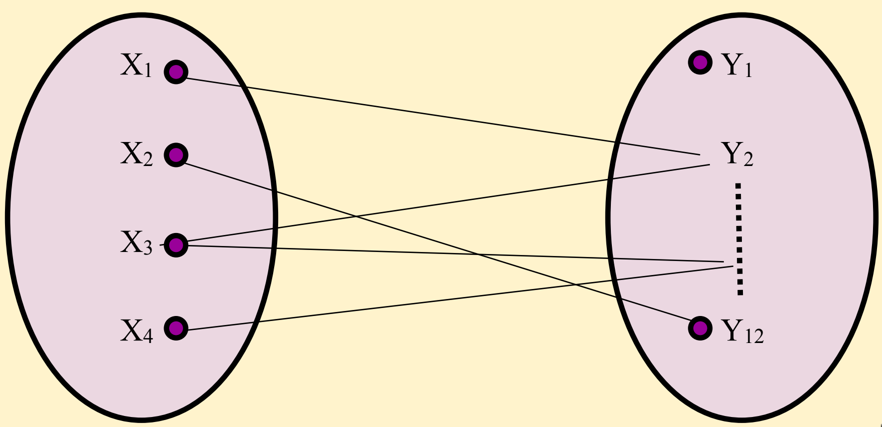
නිදසුන 01.

$X = \{$ පන්තියක ළමයි $\}$

$Y = \{$ අවුරුද්දේ මාසය $\}$

සම්බන්ධය " උපන් මාසය " වේ.

මෙය රූපසටහනක් ඇසුරින් දක්වමු.

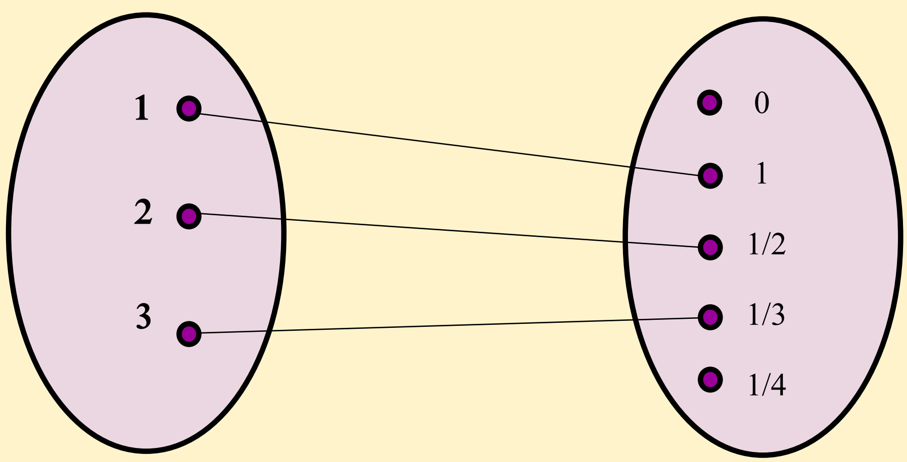


නිදසුන 02.

$X = \{ 1, 2, 3 \}$

$Y = \{ 0, 1, 1/2 , 1/3 , 1/4 \}$

සම්බන්ධය " පරස්පරය " වේ.

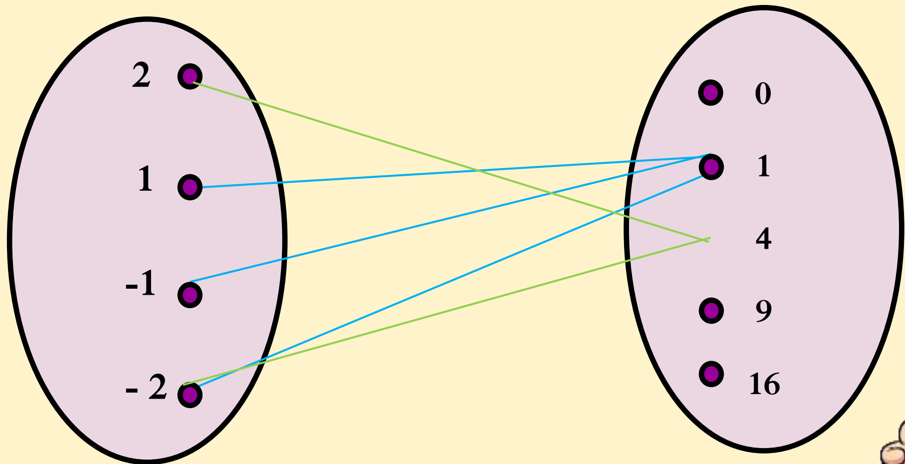


නිදසුන 03.

$X = \{ -2 , -1, 1, 2 \}$

$Y = \{ 0, 1, 4, 9, 16\}$

සම්බන්ධය " වර්ගය " වේ.

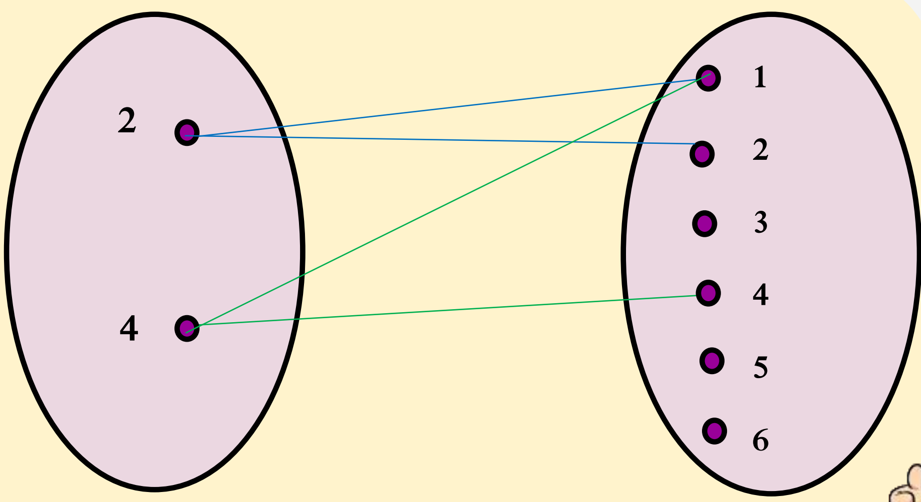


නිදසුන 04.

$X = \{ 2 , 4 \}$

$Y = \{ 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

සම්බන්ධය " සාධනය " වේ.



අන්තර්ගතය - එන්. එම්. මිස්බා , උසස් බාලිකා විද්‍යාලය , මහනුවර.

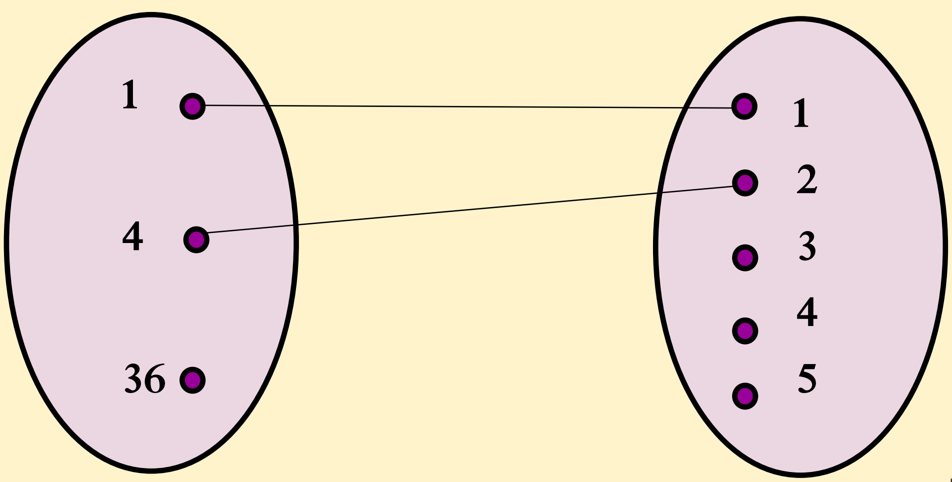
සැකසුම - එස්. පී. එස්. ගිහාෂා සඳමාලී , එස්. අයි. හඳුන්නෙත්ති, රුවන්පුර ජාතික අධ්‍යාපන විද්‍යාපීඨය.

නිදසුන 05.

$$X = \{ 1, 4, 36 \}$$

$$Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

සම්බන්ධය " $\sqrt{}$ " වේ.



ඉහත නිදසුන් අතුරෙන් 1,2 සහ 3 සලකමු. මෙහිදී X කුලකයේ එක් එක් අවයව Y කුලකයේ අනන්‍ය අවයවයනට ඈදනු ලබයි.

4 වන නිදසුනහි, X කුලකයේ ඇති සෑම අවයවයක් සඳහාම Y කුලකයේ වූ අවයවයන් කීපයකට ඈදනු ලබන අතර, 4 වන නිදසුනහි, X හි ඇති "36" යන අවයවයට සම්බන්ධවන අවයවයන් Y තුල නොමැත.

රවම් තුලන දෙකක අවයව අතර වන සම්බන්ධතා සැලකීමේ දී 1,2 සහ 3 වන නාදසුන් මගින් දක්වන සම්බන්ධතාවය විශේෂිත වූ සම්බන්ධතා වේ. මෙවැනි සම්බන්ධතා ශ්‍රිතිය සම්බන්ධතා ලෙස හඳුන්වමු.

2.1.1 අර්ථ දැක්වීම : -

X නොහිස් කුලකයේ එක් එක් අවයවය යම් නීතියක් මගින් Y නොහිස් කුලකයේ වූ අනන්‍ය අවයවයනට ඇදනු ලබයි නම්. එම නීතිය X සිට Y ට වූ ශ්‍රිතයන් යැයි කියනු ලැබේ.

ශ්‍රිතයන්ගේ නම් කිරිම සඳහා f , g , h වැනි අක්ෂර බහුලව යෙදේ.

X කුලකයේ සිට Y කුලකයට වූ ශ්‍රිතය f නම්,

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{හෝ} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

ලෙස දැක්වේ,

2.1.2 ශ්‍රිතයක වසම, සහවසම, ප්‍රතිබිම්බය සහ පරාසය

X නොහිස් කුලකයක එක් එක් අවයවය Y නොහිස් කුලකයක අවයවයන්ට සම්බන්ධ කරන ශ්‍රිතයක් සලකමු.

එය **f : X** **Y** ලෙස අංකනය කරනු ලැබේ.

මෙහි f යනු X සිට Y ට වූ ශ්‍රිතයන් වේ.

තවද X කුලකයට f ශ්‍රිතයේ වසම යැයි ද Y කුලකයට f ශ්‍රිතයේ සහවසම යැයි ද කියනු ලැබේ.

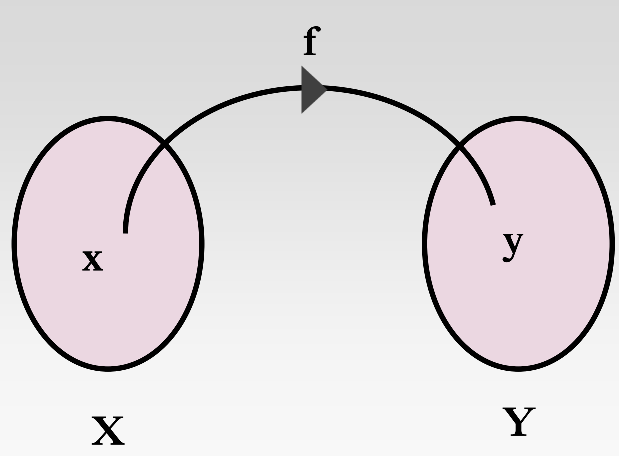
f ශ්‍රිතයේ වසම සහ සහවසම පිළිවෙලින් D(f) , සහ C(f) මගින් අංකනය කෙරේ.

එනම් D(f) = X සහ C(f) = Y වේ.

" x " යනු X කුලකයේ ඕනෑම අවයවයක් යැයි ද f ශ්‍රිතය මගින් " x " අවයවය සම්බන්ධ වන්නේ Y කුලකයේ වූ " y " අවයවයට යැයි ද ගනිමු.

පහතින් රූපයේ දක්වා ඇත,

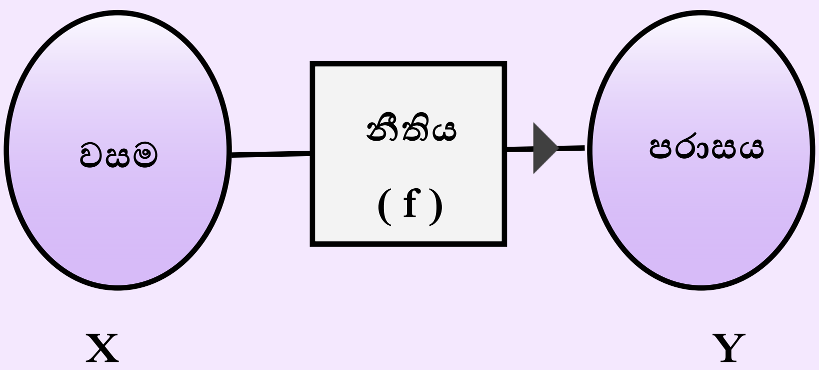
මෙම " y " අවයවයට, f ශ්‍රිතය යටතේ " x " හි ප්‍රතිබිම්බය ලෙස හැඳින්වේ. (හෝ " x " හි දි f ශ්‍රිතයේ අගය ලෙස ද හඳුන්වයි.). එය Y = f (x) ලෙස ලියනු ලැබේ.



තවද වසමේ පිහිටි සියලුම අවයව වල ප්‍රතිබිම්බ වලින් සමන්විත වන කුලකයට f ශ්‍රිතයේ පරාසය යැයි කියනු ලබන අතර, එය R (f) මගින් දක්වනු ලැබේ.

එනම් R (f) = { y : y = f (x) , x € Y }

මේ අනුව ඕනෑම ශ්‍රිතයක පරාසය එම ශ්‍රිතයේ සහවසමෙහි උපකුලකයක් බව පැහැදිලිය.



අන්තර්ගතය - එන්. එම්. මිස්බා , උසස් බාලිකා විද්‍යාලය , මහනුවර.

සැකසුම - එස්. පී. එස්. ගිහාෂා සඳමාලී , එස්. අයි. හඳුන්නෙත්ති, රුවන්පුර ජාතික අධ්‍යාපන විද්‍යාපීඨය.

නිදසුන 01

$X = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$ ද $Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$ ද යැයි ගනිමු.

f නම් ශ්‍රිතයක් $f : X \quad Y$ හා $f(x) = x^2$ පරිදි අර්ථ දක්වා ඇතිවිට f ශ්‍රිතයේ වසම, සහවසම සහ පරාසය සොයන්න.

I. f ශ්‍රිතයේ වසම $D(f) = X$ වේ.

II. f ශ්‍රිතයේ සහවසම $C(f) = Y$ වේ.

III. f ශ්‍රිතයේ පරාසය $R(f) = \{ f(x) : x \text{ € } X \}$ බැවින් ;

$R(f) = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)\}$ මේ හා

$f(-2) = 4, f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9$
වේ.

$R(f) = \{ 0, 1, 4, 9 \}$

2.1.3 ගම්‍ය වසම

ශ්‍රිතයන් අර්ථ දැක්වීමේ දී වසම සඳහන් කිරීම වැදගත්ය . වසම සඳහන් කර නොමැති විට, 1R තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය තුල ප්‍රතිබිම්බ පවතින පරිදි සමායත්ත විචල්‍යට තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය තුල තුල ලබා ගත හැකි සුදුසු සංඛ්‍යා වලින් සමන්විත කුලකය, අදාල ශ්‍රිතයේ වසම ලෙස සලකනු ලැබේ. මෙය ගම්‍ය වසම නමින් හැඳින්වේ.

අන්තර්ගතය - එන්. එම්. මිස්බා , උසස් බාලිකා විද්‍යාලය , මහනුවර.

සැකසුම - එස්. පී. එස්. ගිහාෂා සඳමාලි , එස්. අයි. හඳුන්නෙත්ති, රුවන්පුර ජාතික අධ්‍යාපන විද්‍යාපීඨය.

නිදසුන :-

පහත දැක්වෙන එක් එක් සමීකරණය මගින් y යනු x හි ශ්‍රිතයක් ලෙස නිර්ණය වේ දැයි නිගමනය කරන්න.

y යනු x හි ශ්‍රිතයක් (f යැයි ගනිමු) වේ නම්, f සඳහා සූත්‍රයක් සොයන්න.

1. $2x + y - 1 = 0$
2. $y + x^2 = 1$
3. $y^2 - x = 0$; x € 1R^{+}
4. $y - x - 1 > 0$

විසඳුම: -

1. $2x + y - 1 = 0$

$y = 1 - 2x$;

සියළු x € 1R සඳහා ට අනන්‍ය අගයන් පවති.

එබැවින් y යනු x හි ශ්‍රිතය වේ.

∴ $y = f(x) = 1 - 2x$

2. $y + x^2 = 1$

$Y = 1 - x^2$;

සියළු x € 1R සඳහා y ට අනන්‍ය අගය පවති.

එබැවින් y හා x හි ශ්‍රිතයන් වේ.

$Y = f(x) = 1 - x^2$

3. $y^2 - x = 0$

$Y = \pm \sqrt{x}$

එනම් සියළු x € 1R $^{+}$සඳහා y ට අගයන් දෙකක් පවති.

එබැවින් y යනු x හි ශ්‍රිතයක් නොවේ.

4. $y - x - 1 > 0$

$\Rightarrow y > x + 1$

සියළු $x \in$ lR සඳහා y ට අනන්‍ය නොවේ.

එබැවින් මෙය ශ්‍රිතය සම්බන්ධයක් නොවේ.

නිදසුන : පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතයේ වසම සඳහන් කරන්න.

$f(x) = 2x - 1$ (2) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

(3) $f(x) = \sqrt{x-1}$ (4) $f(x) = \sqrt{1-x}\,_{2}$

විසඳුම : (1) $f(x) = 2x - 1$

සියළු $x \in$ lR සඳහා $f(x)$ පවතී.

$\therefore D(f) =$ lR

(2) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

$X \neq 1$ වන සියළු $x \in$ lR සඳහා $f(x)$ පවතී.

$\therefore D(f) =$ lR-{1}

2.1.4 එකට-එක ශ්‍රිත

f යනු f : x   y වන පරිදි සලකමු.

x_1 හා x_2 යනු x වසමෙහි ඕනෑම ප්‍රභින්න අවයව දෙකක් වන විට $f(x_1) \neq f(x_2)$ ද නම්, එවිට f ශ්‍රිතය එකට-එක ශ්‍රිතයන් යැයි කියනු ලැබේ.

එනම් $x_1 \neq x_2$ විට $f(x_1) \neq f(x_2)$ නම් f ශ්‍රිතය එකට-එක වේ.

තවද මෙය තවත් ආකාරයකට ද ප්‍රකාශ කළ හැකිය. එනම් $f(x_1) = f(x_2)$ වනවිට $x_1 = x_2$ නම් f ශ්‍රිතය එකට-එක වේ.

නිදසුන 01 :

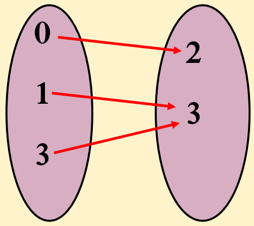
$f : x \longrightarrow y$ ශ්‍රිතය

$f(0) = 2$, $f(1) = 3$ හා $f(5) = (2)$, මගින් ශ්‍රිතයන් අර්ථ දක්වා ඇත.

මෙහි x = {0, 1, 3} සහ y = {2, 3} වේ.

මෙම f ශ්‍රිතය එකට-එක වේ ද?

විසඳුම :



මෙහි $1, 5 \in x$ සහ $1 \neq 5$ වේ.

නමුත් $f(1) = f(3) = 3$ වේ.

එබැවින් f ශ්‍රිතය එකට-එක නොවේ.

නිදසුන 02 :

$f : 1R \longrightarrow 1R$ යන්න

$f(x) = 2x - 3$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය එකට-එක බව පෙන්වන්න.

විසඳුම් :

$f(x) = 2x - 3$;

$f(x_1) = f(x_2)$ යැයි ගනිමු; x_1, x_2€1R

$\longrightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$

$\longrightarrow X_1 = x_2$

මෙ අනුව $f(x_1) = f(x_2)$ නම් x_1, x_2 වේ.

∴ f ශ්‍රිතය එකට-එක වේ.

නිදසුන 03 :

$f : 1R \longrightarrow 1R$ යන්න

$f(x) = 20^2$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය එකට-එක නොවන බව පෙන්වන්න.

විසඳුම් :

$f(x) = x^2$

$f(x_1) = f(x_2)$ යැයි ගනිමු; මෙහි x_1, x_2€1R

$\longrightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\longrightarrow x_1 = \pm x_2$ වේ.

මෙ අනුව $f(x_1) = f(x_2)$ නම් $x_1 \neq x_2$ වේ.

∴ f ශ්‍රිතය එකට-එක නොවේ.

අන්තර්ගතය - එන්. එම්. මිස්බා , උසස් බාලිකා විද්‍යාලය , මහනුවර.

සැකසුම - එස්. පී. එස්. ගිහාෂා සඳමාලී , එස්. අයි. හඳුන්නෙත්ති, රුවන්පුර ජාතික අධ්‍යාපන විද්‍යාපීඨය.

2.1.5 මතට ශ්‍රිතය

f යනු $f:x \longrightarrow y$ වන පත් වු ශ්‍රිතයන් සලකමු.සභවසම Y හි වු ඕනෑම y අගයනට සම්බන්ධ වන යම් x එන් අගයක් වත් වසම x හි පවතී නම්, f ශ්‍රිතය මතට ශ්‍රිතයක් යැයි කියනු ලැබේ.

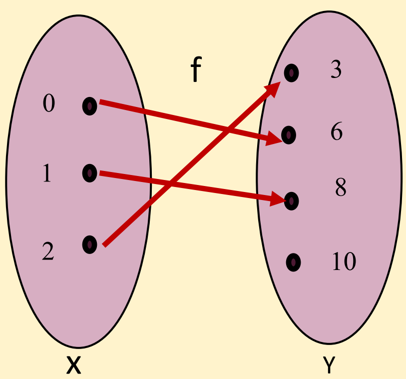
නිදසුන 01:

$X = \{0, 1, 2\}$ $Y = \{3, 6, 8, 10\}$

නම් $f:x \longrightarrow y$ ශ්‍රිතයන් $f(0)=6$, $f(1)=8$ සහ $f(2)=3$ වන පරිදි අර්ථ දක්වා ඇත.

f ශ්‍රිතය මතට ශ්‍රිතයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

විසඳුම් :



මෙහි දී 10 €Y වුවත් f(x)=10 වන පරිදි x€x නොමැති නිසා ශ්‍රිතය f මතට ශ්‍රිතයක් නොවේ.

මෙහි දී R(f)={3, 6, 8} c y නිර්මාණය කරන්න.

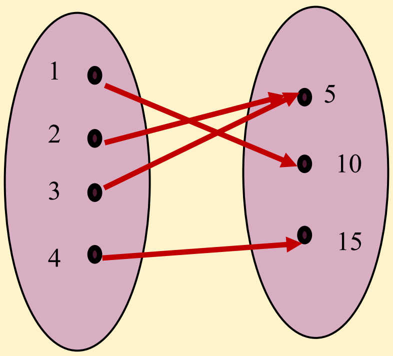
අන්තර්ගතය - එන්. එම්. මිස්බා , උසස් බාලිකා විද්‍යාලය , මහනුවර.

සැකසුම - එස්. පී. එස්. ගිහාෂා සඳමාලි , එස්. අයි. හඳුන්නෙත්ති, රුවන්පුර ජාතික අධ්‍යාපන විද්‍යාපීඨය.

නිදසුන් :

X= {1, 2, 3, 4} හා Y = {5, 10,15} නම් f:x ⟶ y ශ්‍රිතයත් f(1) = 10, f(2) = 5, f(3) = 5 සහ f(4) = 15 වන පරිදි අර්ථ දක්වා ඇත. ශ්‍රිතය මතට ශ්‍රිතයක් බව පෙන්වන්න.

විසඳුම :

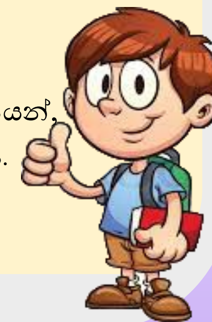


එනම් මෙහි දී Y හි වූ ඕනෑම අගයට එක් අගයක් වත් x වසම තුල පවතී.එබැවින් f ශ්‍රිතය මතට ශ්‍රිතයක් වේ.

මෙහි දී R(f) = {5, 10, 15} = Y බවට නිරීක්ෂණය කරන්න.

සමපාත :

f ශ්‍රිතය මතට යැයි කියනු ලබන්නේ f ශ්‍රිතයේ පරාසයත්, සහවසමක් සමාන වන බවට නිරීක්ෂණය කළ හැකිය.



නිදසුන් :

f : 1R   1R පරිදි වූ   f(x) = 2x+3 ශ්‍රිතය ලෙස සලකමු.මෙම f ශ්‍රිතය මතට ශ්‍රිතයක් බව පෙන්වන්න.

විසඳුම :

Y = f(x) = 2x+3 ලෙස ගනිමු.

මෙහි y € (cf) (=1R) වේ.

$X = \frac{y-3}{2}$ € 1R (=DCf)) වේ.

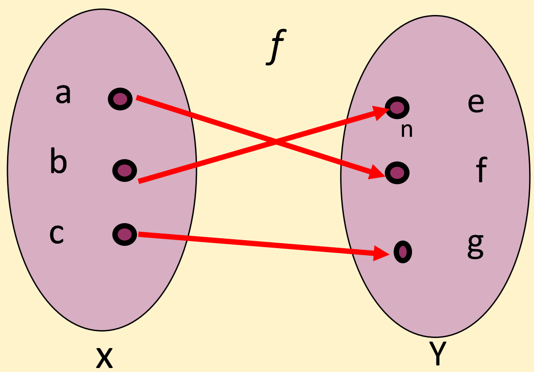
තව ද $f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right) + 3 = y$ වේ.

එනම් සහවසමේ වූ y අවයවය සමඟ සම්බන්ධ වන්නේ වසමේ පිහිටි (y-3) අවයවයි.

2.1.6 ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත

නිදසුන :

X = {a, b, c} සහ Y = {e, f, g} නම් , $f : X \longrightarrow Y$ ශ්‍රිතයන් $f(a) = f$, $f(b) = e$ සහ $f(c) = g$ වන පරිදි අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය සලකමු.



- එනම් වසම් එකිනෙකාට වෙනස් අවයව දෙකක් සඳහා සහවසමයද එකිනෙකාට වෙනස් අවයව පවතී.
- තවද $R(f) = Y$ බැවින්, f ශ්‍රිතය මතට ශ්‍රිතයක් ද වේ.
- ශ්‍රිතයෙන් එකට එක සහ මතට වේ නම්, Y සිට X ට g නම් ශ්‍රිතයේ අර්ථ දැක්විය හැකිය. මෙම g ශ්‍රිතයට f ශ්‍රිතයේ **ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය** යැයි කියයි.
- f ශ්‍රිතයේ ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය $f^{-1} = g$ වේ.

තවද ඉහත නිදසුනින් :

D (g) = Y සහ **C (g) = X** වේ.

2.1.6 අර්ථ දැක්වීම

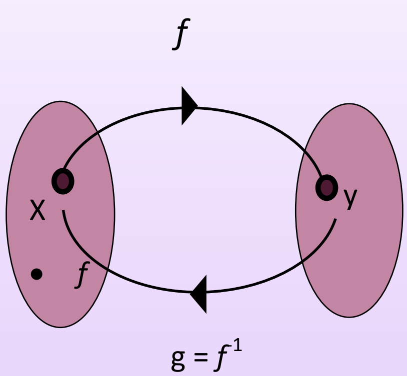
යනු $f : X \longrightarrow Y$ වන පරිදි එකට-එක සහ මතට වූ ශ්‍රිතයේ යැයි ගනිමු.

එවිට Y තුල ඇති ඕනෑම *y* අවයවයක් සඳහා $y = f(x)$ වන පරිදි X අනන්‍ය අවයවය තුල පවති. එ අනුව Y තුල වන y ඕනෑම අවයවයක් x තුල වන අවයවයකට අදිනු ලබන g ශ්‍රිතයක් පවති.මෙම g ශ්‍රිතයට *f* හි ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය යැයි කියනු ලැබේ.

එනම් g (y) = x; සහ y € Y ය

$y = f(x)$

මෙහි $g = f^{1}$ වේ.



අන්තර්ගතය - එන්. එම්. මිස්බා , උසස් බාලිකා විද්‍යාලය , මහනුවර.

සැකසුම - එස්. පී. එස්. ගිහාෂා සඳමාලී , එස්. අයි. හඳුන්නෙත්ති, රුවන්පුර ජාතික අධ්‍යාපන විද්‍යාපීඨය.

2.1.7 වීජීය ලෙස ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිත සෙවීම.

f : 1R $\longrightarrow$ 1R

f (x) = 4X +1 වන පරිදි අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය සඳහා ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයේ පවතින බව පෙන්වා, ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය සොයන්න.

විසඳුම

f (x) = 2x +3

f(x1) = f(x2) ; x_1, x_2 € 1R

$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$

$X_1 = x_2$ වේ.

$\therefore$ f ශ්‍රිතය එකට - එක ශ්‍රිතයක් වේ.

Y = f(x) = 2x+3 ලෙස ගනිමු, Y € 1R

$X = \frac{Y-3}{2}$ € 1R

$f\left(\frac{Y-3}{2}\right) = 2\left(\frac{Y-3}{2}\right) + 3 = Y$ වේ.

$\therefore$ f ශ්‍රිතය මතට ද වේ.

එබැවින් f සඳහා ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයක් පවතී.

මෙහි $X = \frac{Y-3}{2}$

ශ්‍රිත සඳහා භාවිත කරන විචල්‍ය වැදගත් නොවන බැවින්,

$f^{1}(X) = \frac{X-3}{2}$ වේ.

හෝ x $\longrightarrow$ y, y $\longrightarrow$ x ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කර $y = \frac{x-3}{2}$ වේ.