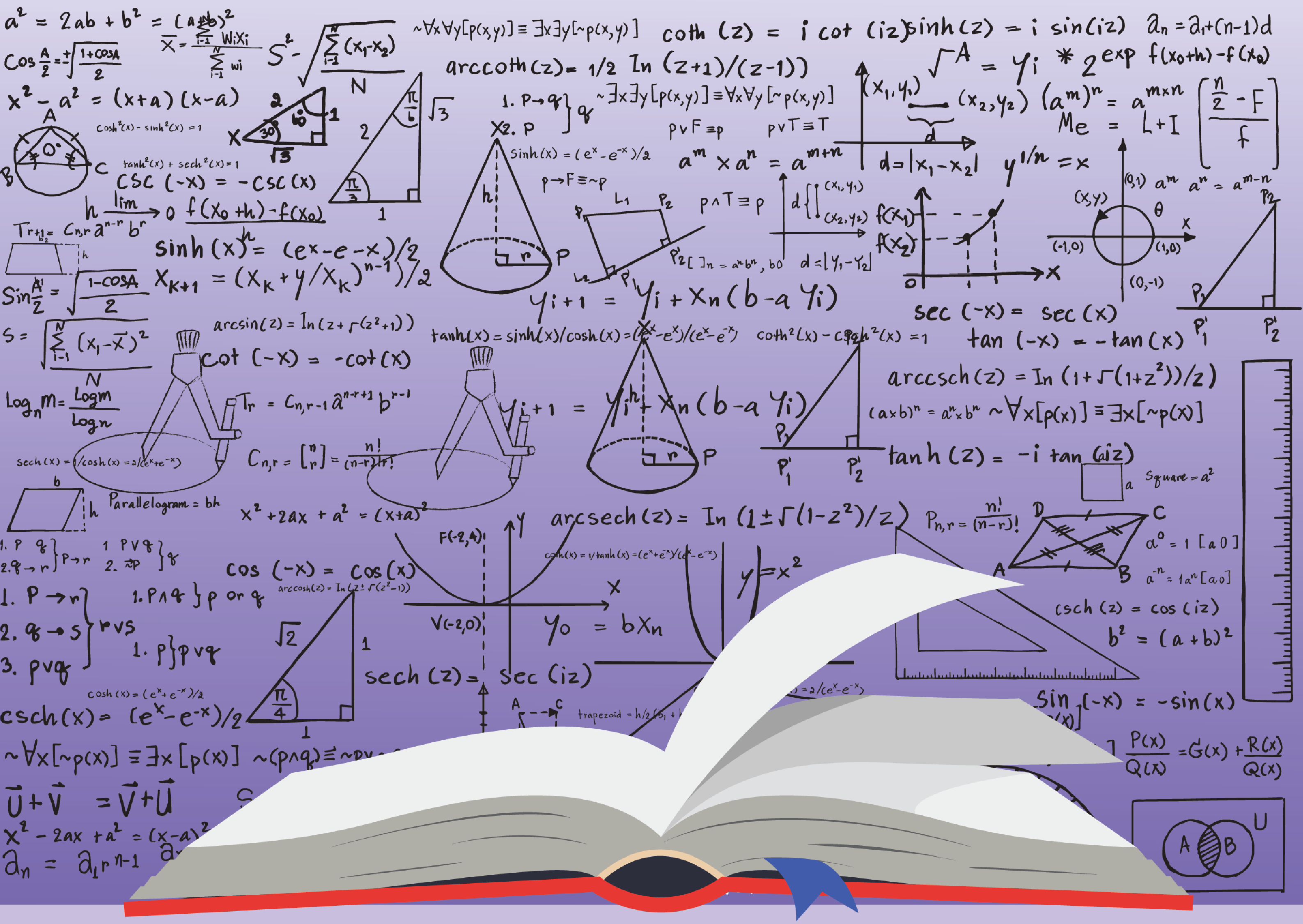
සංයුක්ත ගණිතය

14.1 ශ්‍රිතයක ව්‍යුත්පන්නය



14.ව්‍යුත්පන්නය (30)

1. හැඳින්වීම

සරල රේඛාවක් දිගේ ගමන් කරන අංශුවක් ආරම්භයේ සිට තත්පර t කාලයකදී ගමන් කරන දුර මීටර $10t^2$ මඟින් දී ඇතැයි සිතමු. දැන් අපි t =5 විට එනම් ආරම්භයේ සිට තත්පර 5කට පසුව විට එනම් ආරම්භයේ සිට තත්පර 5කට පසුව අංශුව සතු ක්ෂණික වේගය ගණනය කරමු.

මෙහිදී දුර /කාලය මඟින් ලබා දෙනුයේ අංශුවේ සාමාන්‍යයවේගය බැවින් ,මෙලෙස අංශුවක ක්ෂණික වේගය සෙවිය නොහැක.

ඉතා කුඩාතම කාල ප්‍රාන්තරයක් තුළ අංශුවේ වේගය වෙනස් නොවන බව උපකල්පනය කළ හැකි බැවින්, කුඩා කාල ප්‍රාන්තරයක් එනම් තත්පර 0.01ක කාල ප්‍රාන්තරය සලකමු . t = 5 දී ක්ෂණික වේගය, එයට ඉතා ආසන්න කාල ප්‍රාන්තරයකදී මධ්‍යක වේගයට සමාන බව උපකල්පනය කල හැකිය.

t = 5 දී ක්ෂණික වේගය

$$\frac{=10(5.01)^2-10(5)^2}{0.01}=100.01$$

මෙහිදී තෝරාගන්නා ලද කාල ප්‍රාන්තරය ක්‍රමයෙන් කුඩා කරමු.

කාල ප්‍රාන්තරය(S)	මධ්‍යන වේගය (c/m)
t=5 සිට 5.001	100.001
t=5 සිට 5.0001	100.0001
t=5 සිට 5.00001	100.00001

අන්තර්ගතය : එන් . එම්. මිස්බා
සැකසුම : ප්‍රසංගිකා මධුෂානි

මෙහිදී කාල ප්‍රාන්තරය කුඩා වන විට මධ්‍යක වේගය 100 (m/s) කට ළඟාවන බව පැහැදිලි වේ. එබැවින් කාලය t=5 විට අංශුවේ ක්ෂණික වේගය 100(m/s) කට ළඟා වන බව පැහැදිලි වේ. මේ සඳහා පහත දැක්වෙන ක්‍රමය තුලින් මෙම ප්‍රතිඵලය අපට ලබා ගත හැකිය. h සංඛ්‍යාත්මකව ඉතා කුඩා අගයක් ලෙස ගනිමු.

කාලය t=5 සහ t= 5+h අතර ප්‍රාන්තරය තුල

$$\text{මධ්‍යක වේගය} = \frac{10(5+h)^2 - 10(5)^2}{(5+h)-5} = \frac{10(10+h)h}{h}$$

$$= 10(10+h);\ h \neq 0$$

දැන් තෝරාගත් කුඩා කාල ප්‍රාන්තරය h කුඩා කරන විට , එනම් $h \to 0$ විට $10(10+h) \to 100$ වේ.

එනම්

$$\lim_{h\to 0} 10(10+h) = 100$$

මෙයින් අපට කාලය t=5 දී අංශුව ලබා ගන්න ක්ෂණික වේගය ලබා දේ .

සාමාන්‍යයෙන් එදිනෙදා ජීවිතේදී භෞතික ගැටළු විසඳීම සඳහා භාවිත කරන ගණිත ක්‍රම තුලින් ව්‍යුත්පන්නය නමැති සංකල්පය ඉදිරිපත් කරන ලදී .

නිදසුන

$$f(x) = x^2;\ x \in \mathbb{R}$$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන f ශ්‍රිතය සලකමු

x= 5 විට ශ්‍රිතයේ අගය $f(5) = 5^2 = 25$

x හි අගය 5 සිට 5.1 දක්වා වෙනස් කරමු.

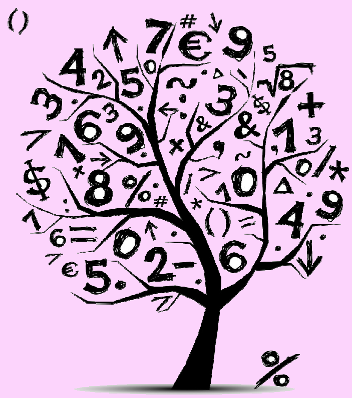
එවිට $f(5.1) = 5.1^2$

මෙහිදී x හි වෙනස $= 5.1 - 0.1$

f හි වෙනස $= f(5.1) - f(5)$

$= 5.1^2 - 5^2$

වෙනස් වීමේ අනුපාතය $= \dfrac{f \text{ හි වැඩි වීම}}{x \text{ හි වැඩි වීම}}$



x හි වෙනස් වීම			f හි වෙනස් වීම			වෙනස් වීමේ අනුපාතය
5.01-5	=	0.01	$5.01^2 - 5^2$	=	0.01×10.01	10.01
5.001-5	=	0.001	$5.001^2 - 5^2$	=	0.001×10.001	10.001
5.0001 –5	=	0.0001	$5.0001^2 - 5^2$	=	0.0001×10.0001	10.0001
4.9 - 5	=	- 0.1	$4.9^2 - 5^2$	=	-0.1×9.9	9.9
4.99 - 5	=	-0.01	$4.99^2 - 5^2$	=	-0.01×9.99	9.99
4.999 -5	=	-0.001				9.999

මෙහිදී x වෙනස් වීම කුඩා වී ශූන්‍ය කරා ළඟා වන විට , වෙනස්වීම් වල අනුපාතය 10 කරා ළඟා වන බව පෙනේ.

x හි අගය 5 සිට h වලින් වෙනසක් ඇති වීම.

වෙනස්වීමේ අනුපාතය $$= \frac{f(5+h)-f(5)}{(5+h)-5} = \frac{(10+h)h}{h}$$
$$= 10 + h; h \neq 0$$

මෙම අනුපාතයට , f වෙනස්වීමේ මධ්‍යන සීඝ්‍රතාවය යැයි කියමු.
මෙහිදී h ශූන්‍ය කරා ළඟා වන විට මෙම අනුපාතය 10 කරා ළඟා වේ.

එනම්,
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{(5+h)-5} = \lim_{h\to 0}(10+h)$$
$$= 10$$

මෙම අගයට x =5 දී f ශ්‍රිතය වෙනස් වීමේ ක්ෂණික සීඝ්‍රතාවය යැයි කියමු. තවද මෙම අගයට x =5 දී $f(\chi)=x^2$ මඟින් අර්ථ දක්වා ලද f ශ්‍රිතයේ ව්‍යුත්පන්නය ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

2. වෘද්ධිය.

x නම් විචල්‍යයක් x_1 සිට x_2 දක්වා වෙනස් කල විට x හි වෙනස් වීම x_2-x_1 වේ. මෙම වෙනස් වීම Δx ලෙස ලියනු ලැබේ.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

සටහන :- Δx මඟින් x හි වෘද්ධියක් දැක්වෙන බව ද ඉන් Δ සංඛ්‍යාවකත් x හිත් ගුණිතය යන්න අදහස් නොකෙරෙන බවද සලකන්න.

y = f(x) වන පරිදි වූ f නම් ශ්‍රිතයක් සලකමු. මෙම ශ්‍රිතය $x = x_0$ ලක්ෂ්‍යය *අඩංගු* විවෘත්ත ප්‍රාන්තරයක් තුළ අර්ථ දැක්වේ.
x හි අගය x_0 සිට $x_0 + \Delta x$ දක්වා වෙනස් කල විට ඊට අනුරූපව f(x) හි අගය f(x_0) සිට f($x_0 + \Delta x$) දක්වා වෙනස් වේ. එනම් y ද y_0 සිට $y_0 + \Delta y$ දක්වා වෙනස් වේ. මෙහි y_0 = f(x_0) හා $y_0 + \Delta y$ = f($x_0 + \Delta x$)
මෙයින් Δy = f($x_0 + \Delta x$) - f(x_0) වේ.
මෙය $x = x_0$ *හිදී f* ශ්‍රිතයේ වෘද්ධිය ලෙස හඳුන්වමු.

3. ශ්‍රිතයක යම් ලක්ෂ්‍යයක දී වෘද්ධි අනුපාතය සහ ව්‍යුත්පන්නය.

$x = x_0$ ලක්ෂ්‍යය අඩංගු විවෘත්ත ප්‍රාන්තරයක අර්ථ දැක් වූ f ශ්‍රිතයක් සලකමු.

එවිට $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ යන අනුපාතය , $x = x_0$ ලක්ෂ්‍යයේදී f ශ්‍රිතයේ වෘද්ධි අනුපාතය ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

මෙහි Δx යනු x හි වෘද්ධියකි.

තවද $\Delta x \to 0$ විට $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ යන අනුපාතයේ සීමාව පවතී ද පරිමිතද වේ නම්, $x = x_0$ හිදී *f ශ්‍රිතය* අවකලය යැයි කියනු ලැබේ.

එම පරිමිත සීමාවට $x = x_0$ ලක්ෂ්‍යයේ දී f ශ්‍රිතයේ ව්‍යුත්පන්නය හෝ f ශ්‍රිතයේ අවකලන සංගුණකය යැයි කියනු ලැබේ.

එය f(x_0) හෝ $\left\{\dfrac{d}{x}[f(x)]\right\}_{x = x_0}$ සංකේතය මඟින් දක්වයි.

එනම්, $\lambda im_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ වේ.

අන්තර්ගතය : එන් . එම්. මිස්බා
සැකසුම : ප්‍රසංගිකා මධුෂානි

සටහන :- ඉහත ① ට අනුව $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$ බැවින්

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$ ලෙසද ලිවිය හැකිය.

එවිට $$\lambda im_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lambda im_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$ ද වේ.

මෙම සීමාව පවතීද පරිමිත ද වේ නම්,

$$\lambda im_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Delta x=x_0}$$ සංකේත මගින් දැක්වේ .

සටහන:-

(1) $\frac{dy}{dx}$ යන්න භාගයක පෙනුම ඇතත් , එය භාගයක් නොවන බව වටහා ගත යුතුයි.

(2) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)$ යනු $x=x_0$ හිදී x විෂයෙන් f හි ශ්‍රිතයේ ව්‍යුත්පන්නය හෙවත් අවකලන සංගුණකය යැයි ද කියනු ලැබේ .

අන්තර්ගතය : එන් . එම්. මිස්බා
සැකසුම : ප්‍රසංගිකා මධුෂානි

4. යම් ශ්‍රිතයක $x = x_0$ දී ව්‍යුත්පන්නය නොපැවැතිය හැකි අවස්ථා .

(1) $x = x_0$ ලක්ෂ්‍යය අඩංගු යම් විවෘත්ත ප්‍රාන්තරයක් තුළ ශ්‍රිතය අර්ථ නොදැක්වීම .හෝ

(2) Δx, ශූන්‍ය කරා එළඹෙන විට $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ සීමාව නොපැවතීම හෝ

(3) $\lambda im_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ සීමාව පරිමිත නොවීම.

නිදසුන 1

$f(x) = x^2$; $x \in IR$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතයේ $x=2$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

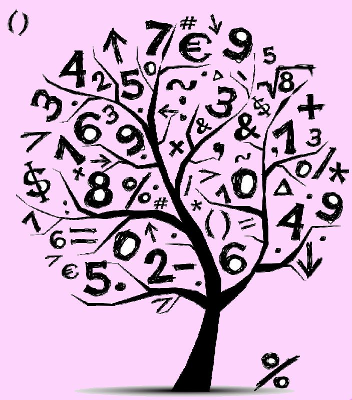
විසඳුම $x=2$ ලක්ෂ්‍යය අඩංගු ඕනෑම ප්‍රාන්තරයක් තුල ශ්‍රිතය අර්ථ දැක්වේ .
x හි වෘද්ධිය Δx නම් ,

$$\lambda im_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lambda im_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$$

$$=\lambda im_{\Delta x}\frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x};\Delta x\neq 0$$

$$=\lambda im_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4=$$ පරිමිත වේ.

$$\therefore f'(2) = 4$$



නිදසුන 2

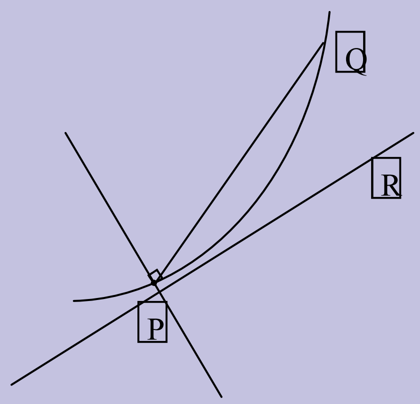
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{සලකමු}$$

x =0 දී ශ්‍රිතය අර්ථ නොදැක්වෙන බැවින් ,
x =0 දී මෙම ශ්‍රිතය ව්‍යුත්පන්නයක් නොපවතී.

5. වක්‍රයක ස්පර්ශයේ අනුක්‍රමණය .

y =f(x) වන පරිදි f ශ්‍රිතයක් සලකමු.
f ශ්‍රිතය නිරූපණය කරන වක්‍රය මත P හා Q ලක්ෂ්‍යය යා කරන රේඛාව වක්‍රයේ ජ්‍යායක්වේ.
P ලක්ෂ්‍යය ස්පර්ශ කරන පරිදි වූ PR රේඛාව වක්‍රයට P හිදී ස්පර්ශකයක් වේ.
P හිදී ස්පර්ශකයට අඳින ලද අභිලම්භයක් යයි කියමු .

වක්‍රයට P ලක්ෂ්‍යයේ දී අනුක්‍රමණය ලෙස සලකන්නේ P හිදී වක්‍රයට අදී ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණයයි.



6. " x" නම් පොදු ලක්ෂ්‍යයේදී වෘද්ධි අනුපාතය සහ ව්‍යුත්පන්නය .

යම් ප්‍රාන්තරයක සියලුම x සඳහා අර්ථ දැක්වෙන f ශ්‍රිතයක් සලකමු .
x හි වෘද්ධිය $\boxed{\Delta x}$ නම් ; $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ යන අනුපාතය "x" හිදී f ශ්‍රිතයේ වෘද්ධි අනුපාතය ලෙස අර්ථ දැක්වේ..

x අචල ලෙස තබා , $\Delta x \to 0$ වන විට $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ යන අනුපාතය පවතීද පරිමිතද වේ නම් , එවිට "x" හි දී f ශ්‍රිතය x විෂයෙන් අවකල්‍ය යැයි කියනු ලැබේ . එම පරිමිත සීමාවට "x" ලක්ෂ්‍යයේදී f ශ්‍රිතයේ අවකල සංගුණකය යැයි කියනු ලැබේ .

එය f '(x) හෝ $\frac{d}{dx}[f(x)]$ සංකේත මඟින් දැක්වේ .

යම් f ශ්‍රිතය $y = f(x)$ ප්‍රන්තරයක සියලුම x සඳහා වන පරිදි අර්ථ දක්වා ඇතැයි ගනිමු .

x හි අගය x විට $x+\Delta x$ දක්වා වෙනස් කළ විට yහි y සිට අගය y $+\Delta y$ දක්වා වෙනස් වේ.
එවිට

$$y = f(x) \text{ ——— } (1)$$ හා

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \text{ ——— } (2)$$

(2) (1); $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$\Delta x(\neq 0)$ වලින් බෙදීමෙන්

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

එනම් "x"හිදී වෘද්ධි අනුපාතය $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ලෙස ද ප්‍රකාශ කල හැකිය .

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

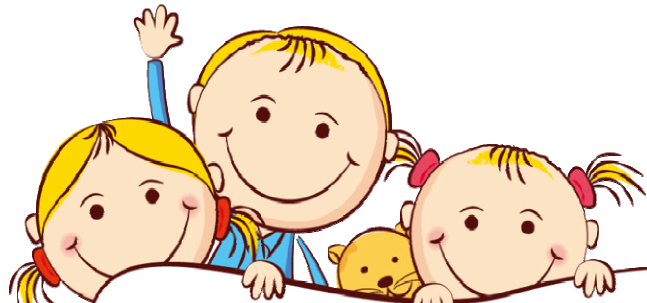
මෙම සීමාව පවතී නම් පරිමිත ද වේ නම්,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$ වේ.

එනම් $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$ වේ.

අන්තර්ගතය : එන් . එම්. මිස්බා
සැකසුම : ප්‍රසංගිකා මධුෂානි

7. ව්‍යුත්පන්නන ශ්‍රිතය .



f ශ්‍රිතයක් අර්ථ දැක්වෙන වසමේ වූ x විෂයෙන් f හි ව්‍යුත්පන්නය පවතින සේ සියලුම x වසම ලෙස ඇති f ' ශ්‍රිතය f ශ්‍රිතයේ ව්‍යුත්පන්න ශ්‍රිතය ලෙස හැඳින්වේ. එනම්

$$\boxed{f'(x) =} \boxed{\lim_{\Delta\to 0}} \boxed{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

යන්න f ශ්‍රිතයේ ව්‍යුත්පන්න ශ්‍රිතය වේ.

නිදසුන : $f(x) = x^3$ මඟින් අර්ථ දක්වා ඇති fහි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න

විසඳුම :- x හි වෘද්ධිය Δx නම් ;

$$\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

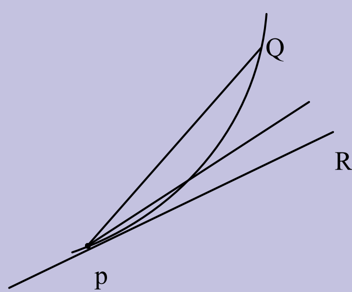
$$= \Delta x\frac{\left[(x+\Delta x)^2 + x(x+\Delta x) + \Delta x^2\right]}{\Delta x}; \Delta x \neq 0$$

$$f'(x) \quad = \lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^2 + x(x+\Delta x) + x^2\right]$$

$$= x^2 + x^2 + x^2$$

$$= 3x^2$$

Q ලක්ෂ්‍ය වක්‍රය දිගේ P කරා ළඟා වන විට PQ ජ්‍යායේ අනුක්‍රමණය P හි දී වක්‍රයට වඩාත් ළඟා වේ.
එනම් Q→P විට PQ ජ්‍යායේ අනුක්‍රමණය →PR හි අනුක්‍රමණය වේ .



8. ව්‍යුත්පන්නහි ජ්‍යාමිතික විවරණය

f ශ්‍රිතයෙහි ප්‍රස්තාරය මත P(x,y) හා $Q(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ ලක්ෂ්‍ය දෙකක් සලකමු.

මෙහි $y = f(x,)$ බැවින්

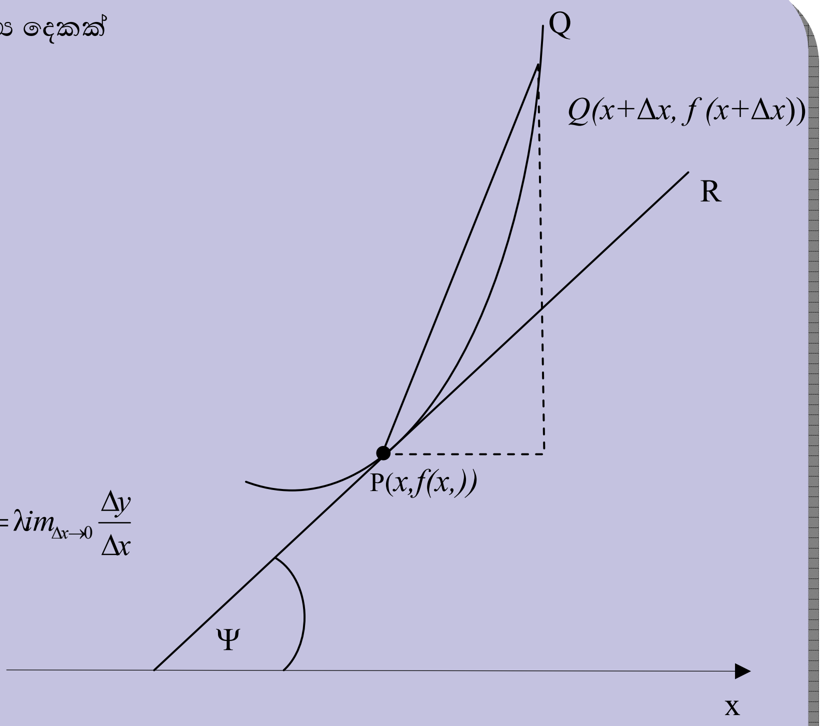
$(x,,y) \ = (x, f(x,))$ හා $Q \ \equiv (x+\Delta x, f\,(x+\Delta x))$ වේ .

PQ ජ්‍යායේ අනුක්‍රමණය

$$= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

මෙහි "x" ලක්ෂ්‍යයේ දී f(x) හි වෘද්ධි අනුපාතයයි .



* Q →P විට PQ හි අනුක්‍රමණය

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

මෙහි සීමාව $\dfrac{dy}{dx}$ පරිමිත වේ නම් ;

tan Ψ= f '(x)=

සටහන:- මෙම ස්පර්ශකය OY ට අසමාන්තර විය යුතුය .

$\therefore$ වක්‍රයෙහි යම් ලක්ෂ්‍යයකදී f '(x) $\left(= \dfrac{dy}{dx}\right)$ ඇත් නම් ; මෙම ලක්ෂ්‍යයේදී y-අක්ෂයට සමාන්තර නොවන ස්පර්ශකයක් වක්‍රයට ඇත.

මෙම ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය f '(x) ය .

අන්තර්ගතය : එන් . එම්. මිස්බා
සැකසුම : ප්‍රසංගිකා මධුෂානි

9. වෙනස්වීමේ සීඝ්‍රතාවය .

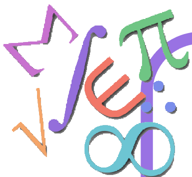
x ලක්ෂ්‍යය අඩංගු යම් ප්‍රාන්තරයක් තුල අර්ථ දැක්වෙන f නම් ශ්‍රිතයක් සලකමු.

x හි අගය x සිට $x+\Delta x$ දක්වා වෙනස් කළ විට f ශ්‍රිතය f(x) සිට f($x+\Delta x$) දක්වා වෙනස් වේ .

එවිට $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$ යන අනුපාතයට , x ට සාපේක්ෂව f ශ්‍රිතය වෙනස් වීමේ මධ්‍යක සීඝ්‍රතාව යැයි ද ,

$\Delta x \to 0$ වන විට $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$ අනුපාතය එළඹෙන පරිමිත සීමාවට "x" ලක්ෂ්‍යයේ f ශ්‍රිතයේ ක්ෂණික සීඝ්‍රතාවය යයි ද කියනු ලැබේ .

එනම්, $$f'(x) = \lambda im_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$$ (= පරිමිතයි.) වේ.



සටහන:- යම් රාශියකට මධ්‍යක සීඝ්‍රතාවය හෝ ක්ෂණික සීඝ්‍රතාවය සෙවීම සඳහා , යටත් පිරිසෙයින් විචල්‍යයන් දෙකක් වත් තිබිය යුතුයි.