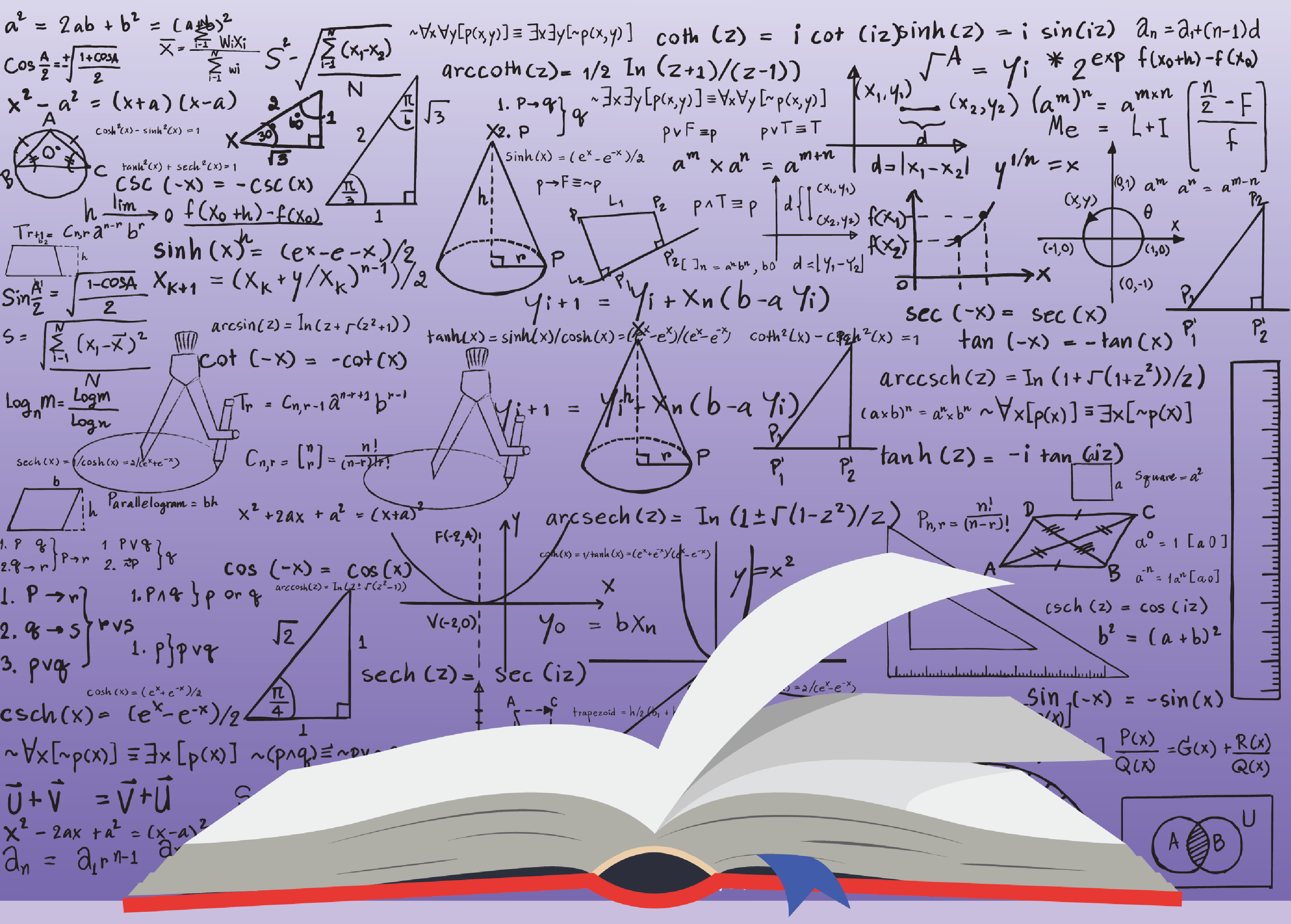
සංයුක්ත ගණිතය

10.3.

ගුණන - ආකලන හා ආකලන - ගුණන සූත්‍ර



10.3.1 ගුණන - ආකලන සූත්‍ර ගොඩ නැඟීම.

අධ්‍යයනය පහසුව සඳහා ඉහත ලබාගත් ආකලන ව්‍යාකලන සූත්‍ර නැවත පහත සටහන් කරමු.

$$\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B \longrightarrow \boxed{1}$$

$$\sin(A-B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B \longrightarrow \boxed{2}$$

$$\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B \longrightarrow \boxed{3}$$

$$\cos(A-B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B \longrightarrow \boxed{4}$$

ඉහත 1 2 හා සමීකරණ එකතු කිරීමෙන්,

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A.\cos B$$

එනම් $2\sin A.\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \longrightarrow \boxed{5}$

ඉහත 1 න් 2 අඩුකිරීමෙන්,

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A.\sin B$$

එනම් $2\cos A.\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \longrightarrow \boxed{6}$

ඉහත $\boxed{3}$ හා $\boxed{4}$ සමීකරණ එකතු කිරීමෙන්,

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A.\cos B$$

එනම් $2\cos A.\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \longrightarrow \boxed{7}$

ඉහත $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ න් අඩුකිරීමෙන්,

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A.\sin B$$

එනම් $2\sin A.\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B) \longrightarrow \boxed{8}$

ඉහත $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ සමීකරණවලින් නිරූපණයවන්නේ ගුණන ආකලන සූත්‍රවේ. එනම් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත දෙකක ගුණිතයක් ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත දෙකක එකතුවකට හෝ අන්තරයකට පරිවර්තනය කළ හැකිය.

අන්තර්ගතය : එච්.ඩී.සී.ශෂිමාල් ප්‍රනාන්දු මයා - කො/ විවේකානන්ද විද්‍යාලය - කොළඹ 13
සැකසුම : එම්.වී.ජී.එස්.පී.බණ්ඩාර - මහ/සේනධිකාරි ජාතික පාසල - උඩහේන්තැන්න

10.3.2 ආකලන ගුණන සූත්‍ර.

A හා B ඕනෑම කෝණ දෙකක් වන විට A+B=C ද A-B= D ද යැයි ගනිමු.

$$A+B = C \longrightarrow \boxed{1}$$

$$A-B = D \longrightarrow \boxed{2}$$

$\boxed{1} + \boxed{2}$

$$2A = C+D$$

$$A = \frac{C+D}{2}$$

$\boxed{1} + \boxed{2}$

$$2B = C-D$$

$$B = \overline{C-D}$$

මෙම ප්‍රතිඵල ඉහත ලබාගත් ගුණන ආකලන සූත්‍රවලට ආදේශයෙන්,

$\boxed{5}$ න් $$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$\boxed{6}$ න් $$\sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$\boxed{7}$ න් $$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$\boxed{8}$ න් $$\cos D - \cos C = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

මෙම ප්‍රතිඵල ආකලන ගුණන සූත්‍ර ලෙස හඳුන්වයි. මෙමගින් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත දෙකක එකතුවක් හෝ අන්තරයක් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත දෙකක ගුණිතයට පරිවර්තනය කල හැකිය.

උදා :- 01 සයින දෙකක හෝ කොසයින් දෙකක ඓක්‍යයක් ලෙස හෝ අන්තරයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

i) $2\cos \Theta . \sin 7\Theta$

ii) $\sin 4\alpha . \cos (8\alpha)$

iii) $3 \sin 3\Theta . \sin 9\Theta$

අන්තර්ගතය : එච්.ඩී.සී.ශෂිමාල් ප්‍රනාන්දු මයා - කො/ වාවේකානන්ද විද්‍යාලය - කොළඹ 13
සැකසුම : එම්.වී.ජී.එස්.පී.බණ්ඩාර - මහ/සේනධිකාරි ජාතික පාසල - උඩහේන්තැන්න

i) $2 \cos 5\theta \,.\, \text{Sin } 7\theta = \sin(5\theta + 7\theta) - \sin(5\theta - 7\theta)$

$= \sin(12\theta) - \sin(-2\theta)$

$= \underline{\underline{\sin(12\theta) + \sin(2\theta)}}$

ii) $\sin 4\alpha \,.\cos(8\alpha) = \frac{1}{2}\{2 \sin 4\alpha \,.\, \cos 8\alpha\}$

$= \frac{1}{2}\{\sin(12\alpha) + \sin(-4\alpha)\}$

$= \underline{\underline{1\ \sin(12\alpha) - 1 \sin(4\alpha)}}$

iii) $3 \sin(3\theta) \,.\, \text{Sin}(9\theta) = \frac{3}{2}\{2 \sin(3\theta) \,.\, \text{Sin}(9\theta)\}$

$= \frac{3}{2}\{\sin(9\theta - 3\theta) - \sin(3\theta + 9\theta)\}$

$= \frac{3}{2}\{\sin(6\theta) - \sin(12\theta)\}$

$= \underline{\underline{\frac{3}{2}\sin(6\theta) - \frac{3}{2}\sin(12\theta)}}$

උදා :- 02 බව පෙන්වන්න.

i) $\sin 38^0 + \sin 22^0 = \sin(82^0)$

ii) $\sin 50^0 + \sin 10^0 = \sin 70^0$

i) $\sin 38^0 + \sin 22^0 = \sin(82^0)$

ව.පැ.$\sin 38^0 + \sin 22^0$

$$2 \sin\left(\frac{38^0 + 22^0}{2}\right) \cos\left(\frac{38^0 - 22^0}{2}\right)$$

$\cancel{2} \sin(30^0) \cos(8^0)$

$2 \times \frac{\cancel{1}}{2} \times \cos(8^0)$

$\underline{\underline{\text{Cos}(90^0 - 82^0)}}$

ii) $\sin 50^0 + \sin 10^0 = \sin(70^0)$

ව.පැ. $\sin 50^0 + \sin 10^0$

$$2\sin\left(\frac{50^0+10^0}{2}\right)\cos\left(\frac{50^0-10^0}{2}\right)$$

$2 \times \sin(30^0) \times (20^0)$

$2 \times \frac{1}{2} \times (20^0)$

$\cos(90^0 - 70^0)$

$\sin(70^0)$

උදා :- 03 $\sin 10^0 . \operatorname{Sin} 50^0 . \operatorname{Sin} 60^0 . \sin 70^0 = \frac{\sqrt{3}}{16}$ බව පෙන්වන්න.

ව.පැ.

$$\sin(10^0).\sin(50^0).\sin(60^0).\sin(70^0)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sin 10^0.\sin 70^0).\sin(50^0)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos(70^0-10^0)-\cos(70^0+10^0)).\ \sin(50^0)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}[\cos(60^0)-\cos(80^0)].\ \sin(50^0)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}-\cos(80^0)\right].\ \sin(50^0)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(50^0)-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos(80^0).\ \sin(50^0)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(50^0)-\frac{\sqrt{3}}{8}(2\cos(80^0).\sin(50^0))$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(50^0)-\frac{\sqrt{3}}{8}[\sin(130^0)+\sin(-30^0)]$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(50^0)-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(130^0)+\frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(50^0)-\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(180^0-50^0)+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(50^0)}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(50^0)}+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$\frac{\sqrt{3}}{16}$ = ද.පැ.