දකුණු පළාත් අධ්‍යාපන දෙපාර්තමේන්තුව
සංයුක්ත ගණිතය I - 13 ශ්‍රේණිය
දෙවන වාර පරීක්ෂණය - 2019
පිළිතුරු දීමේ පටිපාටිය -

$2(n+2)a_{n+2} - 3na_{n+1} + (n-1)a_n = 0$ සහ $a_0 = 1$

$n=0$ විට, $2^2 a_2 - a_0 = 0 \Longrightarrow a_2 = \frac{1}{2^2}$

$\therefore n = 2$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ (05) (එනම්, $a_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2^2}$)

$2 < n \leq p$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $a_p = \frac{1}{2^p}$ සහ $a_{p-1} = \frac{1}{2^{p-1}}$ වේ. (05)

$n = p-1$ විට දුන් ප්‍රකාශනය,

$$2(p+1)a_{p+1} - 3(p-1)a_p + (p-2)a_{p-1} = 0 \quad (05)$$

$$2(p+1)a_{p+1} = 3(p-1)a_p - (p-2)a_{p-1}$$

$$= 3(p-1)\cdot\frac{1}{2^p} - (p-2)\cdot\frac{1}{2^{p-1}}$$

$$= \frac{3p-3-2(p-2)}{2^p}$$

$$2(p+1)a_{p+1} = \frac{p+1}{2^p} \quad (05)$$

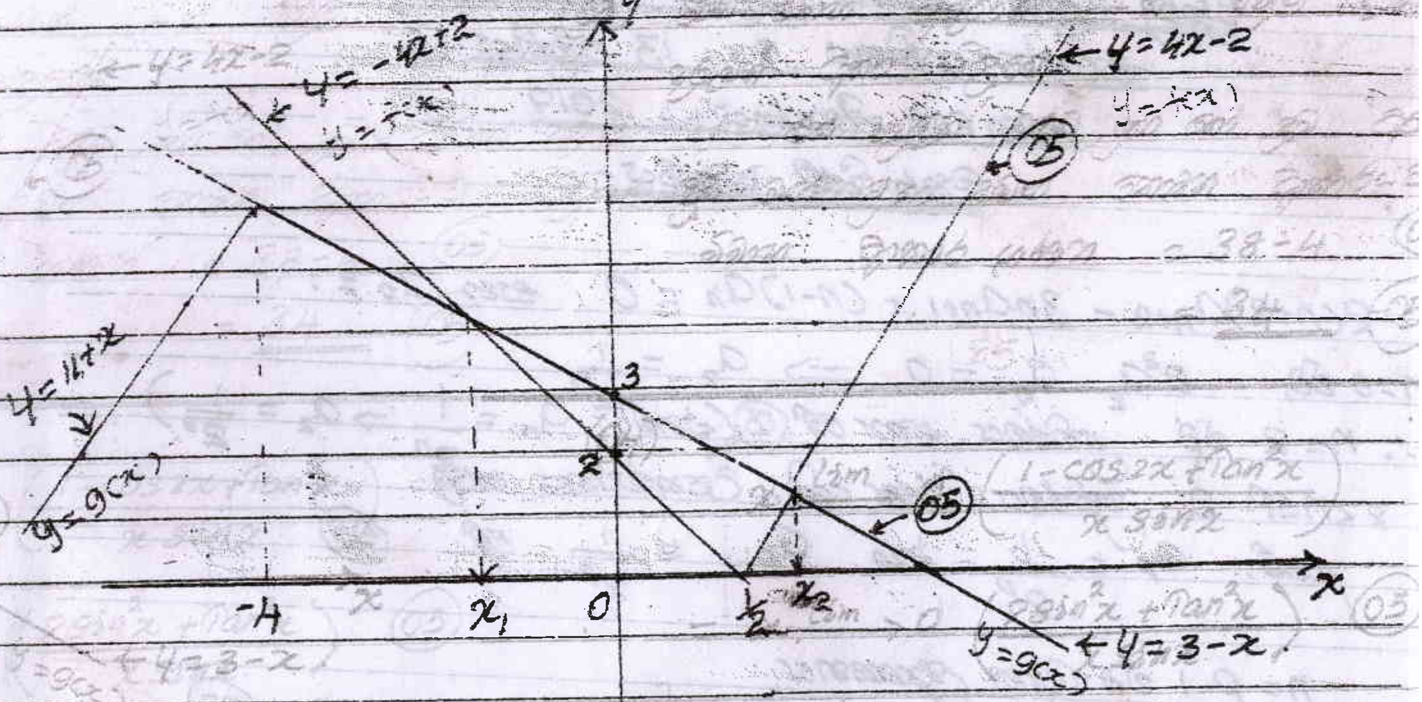
$$\therefore a_{p+1} = \frac{1}{2^{p+1}}$$

$\therefore 2 < n \leq p$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n = p+1$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n=2$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නිසා $n \geq 2$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන් සාධනය වේ. (05) | 2

)

$$y = f(x) = 2|2x-1| = \begin{cases} 2(2x-1) = 4x-2, & x \geq \frac{1}{2} \\ -2(2x-1) = -4x+2, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = g(x) = 7-|x+4| = \begin{cases} 7-(x+4) = -x+3, & x \geq -4 \\ 7+(x+4) = x+11, & x < - \end{cases}$$



$2|2x-1| + |x+4| \le 7$

$2|2x-1| \le 7 - |x+4|$

$\therefore \quad f(x) \le g(x)$ (05)

$f(x) \le g(x)$ වන්නේ ප්‍රස්තාර සටහනේ $x_1 \le x \le x_2$ විසඳීය.

x_1 ; $y = 3-x$ හා $y = -4x+2$ විසඳීමෙන්.

$3 - x_1 = -4x_1 + 2 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$

x_2 ; $y = 3-x$ හා $y = 4x-2$ විසඳීමෙන්, (05)

$3 - x_2 = 4x_2 - 2 \Rightarrow x_2 = 1$

$\therefore$ විසඳුම $-\frac{1}{3} \le x \le 1$ වේ. (05)

25

(03)

A පවුල: පිරිමි 3, ගැහැණු 4

B පවුල: පිරිමි 5, ගැහැණු 6

විශේෂයෙන් නොමැතිව A පවුලේ ගැහැණු ළමයෙක් B පවුලේ පිරිමි ළමයෙක් හා විවාහ කර දීමේ ආකාර ගණන $= 4 \times 5$

$= 20$ (05)

විශේෂයෙන් නොමැතිව B පවුලේ ගැහැණු ළමයෙක් A පවුලේ පිරිමි ළමයෙක් හා විවාහ කර දීමේ ආකාර ගණන $= 6 \times 3$

$= 18$ (0

$\therefore$ විශේෂයෙන් නොමැතිව විවාහයක් කරදිය හැකි මුළු ආකාර ගණන $= 20 + 18$

$= 38$ (

මෙම විභාග ප්‍රකාරයෙන් 4 ක් අවුල් දෙනා විසඳුමක් හා සමග

ලබන් ප්‍රකාර සිදුවේ.

... සිස් ප්‍රශ්න මෙම පුහා හෝ ද්‍රව ප්‍රකාශ අවුල් විසඳුම

ද්‍රව හෝ පුහා සමග නොවන ප්‍රකාරයට සිදුකළ යුතු විභාග

විභාග ප්‍රකාර ගණන $= 38 - 4$ (05)

$= \underline{34}$ (05)

25

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2\sin^2 x + \tan^2 x}{x \sin x} \right) \quad (05)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ 2\left(\frac{\sin x}{x} \right) + \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right\} \quad (05)$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad (05)$$

$$= 2 \times 1 + 1 \times \frac{1}{1} \quad (05)$$

$$= \underline{\underline{3}} \quad (05)$$

25

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{2x}{4} - \frac{2y}{9} \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{9x}{4y} \; ; \; P \equiv \{2\sec\theta, 3\tan$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_P = \frac{18\sec\theta}{12\tan\theta} = \frac{3\sec\theta}{2\tan\theta} \quad (05)$$

∴ P ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$(y - 3\tan\theta) = \frac{3\sec\theta}{2\tan\theta}(x - 2\sec\theta)$$

$$\underline{2y\tan\theta - 3x\sec\theta + 6 = 0} \quad \text{———} \quad (1) \quad (05)$$

P ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය

$$(y - 3\tan\theta) = -\frac{2\tan\theta}{3\sec\theta}(x - 2\sec\theta)$$

$3y\sec\theta + 2x\tan\theta - \sqrt{3}x\sec\theta\tan\theta = 0$ ——— (2) (05)

$2\sec\theta = 4$, $3\tan\theta = 3\sqrt{3}$

$\sec\theta = 2$, $\tan\theta = \sqrt{3}$ ∴ $\theta = \pi/3$

∴ $(4, 3\sqrt{3})$ ලක්ෂයේදී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

(1)ක්, $2\sqrt{3}y - 6x + 6 = 0 \Rightarrow y - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ (05)

$(4, 3\sqrt{3})$ ලක්ෂයේදී අභිලම්බයේ සමීකරණය

$6y + 2\sqrt{3}x - 26\sqrt{3} = 0$

$\sqrt{3}y + x - 13 = 0$ (05)

25

(06) $y = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+a^2x^2}-1}{ax}\right\}$; $ax = \tan\theta$ නම්,

$y = \tan^{-1}\left\{\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right\}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cos\theta/2}\right)$ (05)

$y = \tan^{-1}(\tan\theta/2) = \theta/2$

$\therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{2}$ (05), $\theta = \tan^{-1}ax$

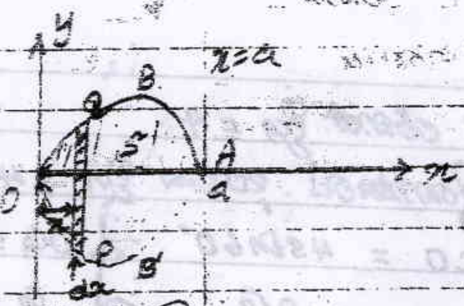
$\frac{d\theta}{dx} = \frac{a}{1+a^2x^2}$ ← (05)

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{1+a^2x^2} = \frac{a}{2(1+a^2x^2)}$ (05)

$\therefore \int \frac{dx}{(1+a^2x^2)} = \frac{2}{a}\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+a^2x^2}-1}{ax}\right\} + C$ (05)

OBA වක්‍රය x අක්ෂය වටා 2π rad මගින් භ්‍රමණය කළ විට ජනනය වන වස්තුව OBAB' වේ.
dx සිහින් තීරු කොටසේ පරිමාව $= \pi y^2 dx$



$$= \pi \frac{x^2}{a}(a-x)\,dx \quad (05)$$

∴ ජනනය වන වස්තුවේ පරිමාව $= \int_0^a \pi \frac{x^2}{a}(a-x)\,dx \quad (05)$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right]_0^a \quad (05)$$

$$= \pi\left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a}\right] \quad (05)$$

$$= \frac{1}{12}\pi a^3 \quad (05)$$

25

) $12x+5y-12=0$ හා $3x-4y+3=0$ රේඛා සමාන්තර නොවන නිසා මෙම රේඛා දෙකටම සමදුරින් පිහිටා ලක්ෂ්‍ය වල පථය, මෙම රේඛා දෙකෙන් සෑදෙන කෝණයේ කෝණ සමච්ඡේදකයෝ වේ.
ඉහත රේඛා දෙක අතර කෝණයේ කෝණ සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

$$\frac{12x+5y-12}{\sqrt{12^2+5^2}} = \pm\frac{(3x-4y+3)}{\sqrt{3^2+4^2}} \quad (05)$$

$$5(12x+5y-12) = \pm 13(3x-4y+3) \quad (05)$$

(+) ධනාත්මක

$$(60-39)x+(25+52)y-60-39=0$$

$$21x+77y-99=0 \quad (05)$$

(−) ඍණාත්මක

$$(60+39)x+(25-52)y-60+39=0$$

$$99x-27y-21=0$$

$$33x-9y-7=0 \quad (05)$$

∴ $33x-9y-7=0$ රේඛාව මත පිහිටා ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් $12x+5y-12=0$ හා $3x-4y+3=0$ රේඛාවන්ට සමාන දුරින් පිහිටයි. (05)

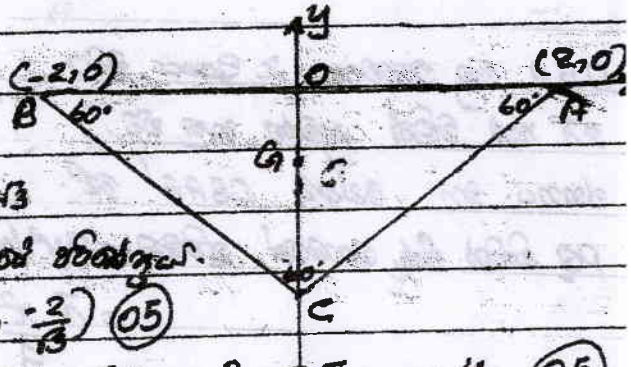
(09) AB වෘත්තයේ විෂ්කම්භය = 4

∴ ත්‍රිකෝණයේ පාදයක දිග = 4 (05)

∴ CO = $4\sin 60^\circ$

$= 2\sqrt{3}$ (05)

∴ C ≡ $(0, -2\sqrt{3})$



$OG = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3}$

G යනු OC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයි.

G ≡ $(0, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ (05)

ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තයේ දිගය $AG = CG = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (05)

∴ පරිවෘත්තයේ සමීකරණය

$(x-0)^2 + (y + \frac{2}{\sqrt{3}}) = (\frac{4}{\sqrt{3}})^2$ (05)

$x^2 + y^2 + \frac{4}{\sqrt{3}} y + \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = 0$

$\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}y^2 + 4y - 4\sqrt{3} = 0$

2

(10)

$(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^3 = 1$

$\cos^6\theta + 3\cos^4\theta \sin^2\theta + 3\cos^2\theta \sin^4\theta + \sin^6\theta = 1$

$\cos^6\theta + \sin^6\theta = 1 - 3\cos^2\theta \sin^2\theta (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta$

$= 1 - \frac{3}{4} \frac{(1 - \cos 4\theta)}{2}$

∴ $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\theta$ (05)

$\cos^6\theta + \sin^6\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta = \frac{5}{4}$

$\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta = \frac{5}{4}$

$\frac{3}{8}\cos 4\theta - \frac{4}{8}\sin 4\theta = \frac{5}{8}$

$3\cos 4\theta - 4\sin 4\theta = 5$ (05)

$\frac{3}{5}\cos 4\theta - \frac{4}{5}\sin 4\theta = 1$

p.T.O

$\cos(4\theta+\alpha) = 1 \qquad \alpha = \cos^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{4}{5}$

$\cos(4\theta+\alpha) = \cos 0$ (05)

$4\theta+\alpha = 2n\pi$

$\theta = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}$

$\theta = \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4}\cos^{-1}\frac{3}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$ (05)

25

(11)

(a) $x^2+ax+b=0$ හි මූල α සහ β නම්,

$\alpha+\beta = -a$ සහ $\alpha\beta = b$ වේ. (05)

$\alpha^{-2}+\beta^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ (05)

$= \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$ (05)

$= \frac{(-a)^2-2b}{b^2}$ (05)

$\therefore \alpha^{-2}+\beta^{-2} = \frac{a^2-2b}{b^2}$ (10)

30

$\eta = (\alpha-1)^2$, $\mu = (\beta-1)^2$ මූල වෙන දෙන සමීකරණය,

$(x-\eta)(x-\mu) = 0$

$x^2-(\eta+\mu)x+\eta\mu = 0$ ——— ① (05)

$\eta+\mu = (\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$

$= (\alpha^2+\beta^2) - 2(\alpha+\beta) + 2$

$\eta+\mu = a^2-2b+2a+2$ (05)

$\eta\mu = (\alpha-1)^2(\beta-1)^2$

$= (\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1)^2$

$\eta\mu = (b+a+1)^2$ (05)

① හි, $x^2-(a^2-2b+2a+2)x+(a+b+1)^2 = 0$ (10) ——— ②

2

$(\alpha-1)^{-2}$, $(\beta-1)^{-2}$ මූල වෙනවෙන් දෙන සමීකරණය,

$(y-\frac{1}{\eta})(y-\frac{1}{\mu}) = 0$ වෙස විසඳ ගනිමු. (05)

$y=\frac{1}{x}$ වන විට x, ② සමීකරණය තෘප්ත කරයි.

$\therefore x=\frac{1}{y}$ (05)

② න්, $\left(\frac{1}{y}\right)^2-(a^2-2b+2a+2)\frac{1}{y}+(a+b+1)^2=0$ (05)

$\therefore (\alpha-1)^{-2}$ හා $(\beta-1)^{-2}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය,

$(a+b+1)^2y^2-(a^2-2b+2a+2)y+1=0$ (10)

[25]

(b) $g(x)=ax^3+5x^2-10x+c$

$g(1/3)=a\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\left(\frac{1}{3}\right)^2-10\left(\frac{1}{3}\right)+c=0$ (05) ($\because (3x-1)$ $g(x)$ හි සාධකයකි.)

$a+15-90+27c=0$

$a+27c=75$ —— ① (10)

$g(x)\equiv\phi(x)(x-3)-144$ (05) ($\phi(x)$ යනු ලබ්ධිය යි.)

$ax^3+5x^2-10x+c=\phi(x)(x-3)-144$

$x=3$ විට, $27a+45-30+c=-144$

$27a+c=-159$ —— ② (10)

①×27 − ② $728c=2184$

$c=3$ (05)

$\therefore a=-6$ (05)

[40]

$g(x)=-6x^3+5x^2-10x+3$ (05)

$=(3x-1)(-2x^2+x-3)$

$g(x)=-(3x-1)(2x^2-x+3)$ (10)

[15]

$x\in\mathbb{R}$ සඳහා $2x^2-x+3>0$ වේ. (05)

($2x^2-x+3$ හි $\Delta<0$ නිසා)

$\therefore x>\frac{1}{3}$ විට, $-(3x-1)<0$ වේ. (05)

$\therefore x>\frac{1}{3}$ විට $g(x)<0$ වේ. (05)

[15]

[150]

(12)

(a) (i) 1, 2, 3, 4, 5, 6 සංඛ්‍යාංක අංකවලින් සංඛ්‍යාංක 4 ක් තෝරාගත් විට, ඒවා 25 න් බෙදෙන සංඛ්‍යා වීමට නම්, අවසාන අංක දෙක 25 විය යුතුයි.

∴ ඉතිරි සංඛ්‍යාංක දෙක තෝරා ගැනීමට 1, 3, 4, 6 පමණක් ඇත.

මෙම සංඛ්‍යාංක දෙක තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන = ${}^4C_2$ (05)

එම සංඛ්‍යාංක දෙක පිළිවෙළ කළ හැකි ආකාර ගණන = $2! \times {}^4C_2$ (05)

= 12

∴ 1, 2, 3, 4, 5, 6 සංඛ්‍යාංක අංකවලින් සංඛ්‍යාංක 4 ක් තේරීමෙන් 25 න් බෙදෙන සංඛ්‍යා ගණන = 12 (05) [15

(ii) 1, 2, 3, 4, 5, 0 සංඛ්‍යාංක අංකවලින් 5 ක් තෝරාගත් විට, 25 න් බෙදෙන සංඛ්‍යා ලබාගැනීමට

(1) අවසාන අංක දෙක 50 වීම (2) අවසාන අංක දෙක 25 වීම යන ආකාර දෙකට තිබිය යුතුය.

(1) ඉතිරි අංක තුන 1, 2, 3, 4 අංකවලින් තෝරාගත යුතුය.

ඒ සඳහා පිළිවෙළ කිරීම් ගණන $= 3! \times {}^4C_3$ [(4 × 2 × 3) හෝ]

= 24 (05)

(2) ඉතිරි අංක තුන 1, 3, 4, 0 අංකවලින් තෝරාගත යුතුය.

මේ සඳහා පිළිවෙළ කිරීම් ගණන = 3 × 3 × 2 (0 මුලින් නොවන)

= 18 (05)

∴ 1, 2, 3, 4, 5, 6 සංඛ්‍යාංක අංකවලින් වරකට 5 ක් තෝරා ගැනීමෙන් 25 න් බෙදෙන සංඛ්‍යා ගණන = 24 + 18

= 42 (05) [

(b) $\lambda(2x-5) = x^2 - 3x + 2$

$x^2 - (3 + 2\lambda)x + (2 + 5\lambda) = 0$ සමීකරණයට තාත්වික මූල දෙකක් තිබීමට $[-(3+2\lambda)]^2 - 4 \times 1(2+5\lambda) \geq 0$ විය යුතුයි. (05)

$4\lambda^2 - 8\lambda + 1 \geq 0$ (05)

$\lambda^2 - 2\lambda + 1/4 \geq 0$

$(\lambda - 1)^2 - 3/4 \geq 0$

$(\lambda - 1)^2 \geq 3/4$ (05)

13 පිටුවට

Date:

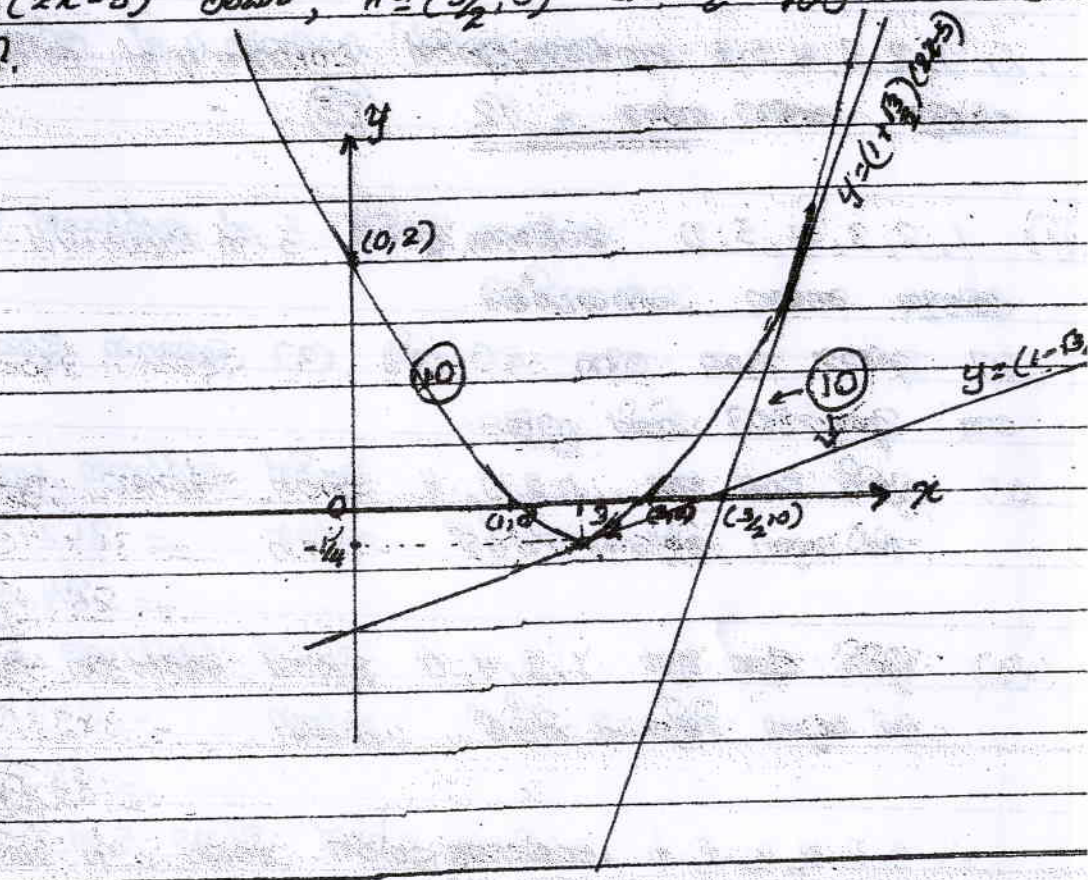
$n-1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $n-1 \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (05)

$n \geq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $n \leq 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (05)

$\therefore n$ හි අගය සඟයෙස, $n \leq 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $n \geq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (05)

$y = x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) = (x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$y = n(2x-5)$ රේඛාව, $A \equiv (\frac{5}{2}, 0)$ හරහා යන අනුක්‍රමණය $2n$ වූ රේඛාවයි.



(C)

$f(r) = \frac{1}{(r-1)^2}$, $f(r+1) = \frac{1}{r^2}$

$f(r) - f(r+1) = \frac{1}{(r-1)^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2-(r-1)^2}{r^2(r-1)^2} = \frac{2r-1}{r^2(r-1)^2}$ (05)

$U_r = f(r) - f(r+1)$ බවයි ගනිමු.

මෙහි $U_r = \frac{2r-1}{r^2(r-1)^2}$ වේ. (05)

$U_r = f(r) - f(r+1)$ $\quad (r > 1\ ;\ r \in \mathbb{Z}^+)$

$r=2\ ;\ U_2 = f(2) - f(3)$

$r=3\ ;\ U_3 = f(3) - f(4)$

$r=4\ ;\ U_4 = f(4) - f(5)$

$\vdots$

$r=n-1\ ;\ U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$

$r=n \quad U_n = f(n) - f(n+1)$

$+$ (10)

$$\sum_{r=2}^{n} U_r = f(2) - f(n+1) \text{ (05)} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2}$$

$$\therefore \sum_{r=2}^{n} \left(\frac{2r-1}{r^2(r-1)^2}\right) = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$ වේ. (05)

[35]

$$\sum_{r=2}^{n} \left(\frac{2r-1}{r^2(r-1)^2}\right) = S_n = 1 - \frac{1}{n^2} \text{ (05)}$$

$$S_n > \frac{9999}{10000}$$

$$1 - \frac{1}{n^2} > \frac{9999}{10000} \text{ (05)}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{10^4}$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{10^2} \Rightarrow n > 100 \text{ (05)}$$

$\therefore S_n > \frac{9999}{10000}$ වන n හි කුඩාම අගය $n = 101$ වේ (05)

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1$$

$$\left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0\right) \text{ (05)}$$

$\therefore \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{2r-1}{r^2(r-1)^2}\right)$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. එහි (05)

එහි අනන්තයේ ඓක්‍යය 1 වේ. (05)

[150]

13)

(a) $f(x) = x^2(3-x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x) = 6x - 3x^2$ (05)

$= -3x(x-2)$

$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = 6 - 6x$ (05)

$= 6(1-x)$ [10]

ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයන් සඳහා, $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ (05)

එනම්, $-3x(x-2) = 0$

$x = 0 \; , \; x = 2$ (05)

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = 6(1-x)$ (05)

$\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right)_{x=0} = 6 > 0$ ∴ $x=0$ දී $f(x)$ ට ස්ථානීය අවමයක් ඇත. (05)

$x=0$ විට $f(x)=0$

∴ ස්ථානීය අවම ලක්ෂ්‍යය $(0,0)$ වේ. (05)

$\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right)_{x=2} = -6 < 0$ ∴ $x=2$ දී $f(x)$ ට ස්ථානීය උපරිමයක් ඇත. (05)

$x=2$ විට $f(x)=4$

∴ ස්ථානීය උපරිම ලක්ෂ්‍යය $(2,4)$ වේ. (05)

$x=1$ විට, $\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right)_{x=1} = 0$

$\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)_{x=1} = 3$

∴ $x=1$ දී $f(x)$ ශ්‍රිතයට නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් තිබේ.

$x=1$ විට, $f(x) = 2$

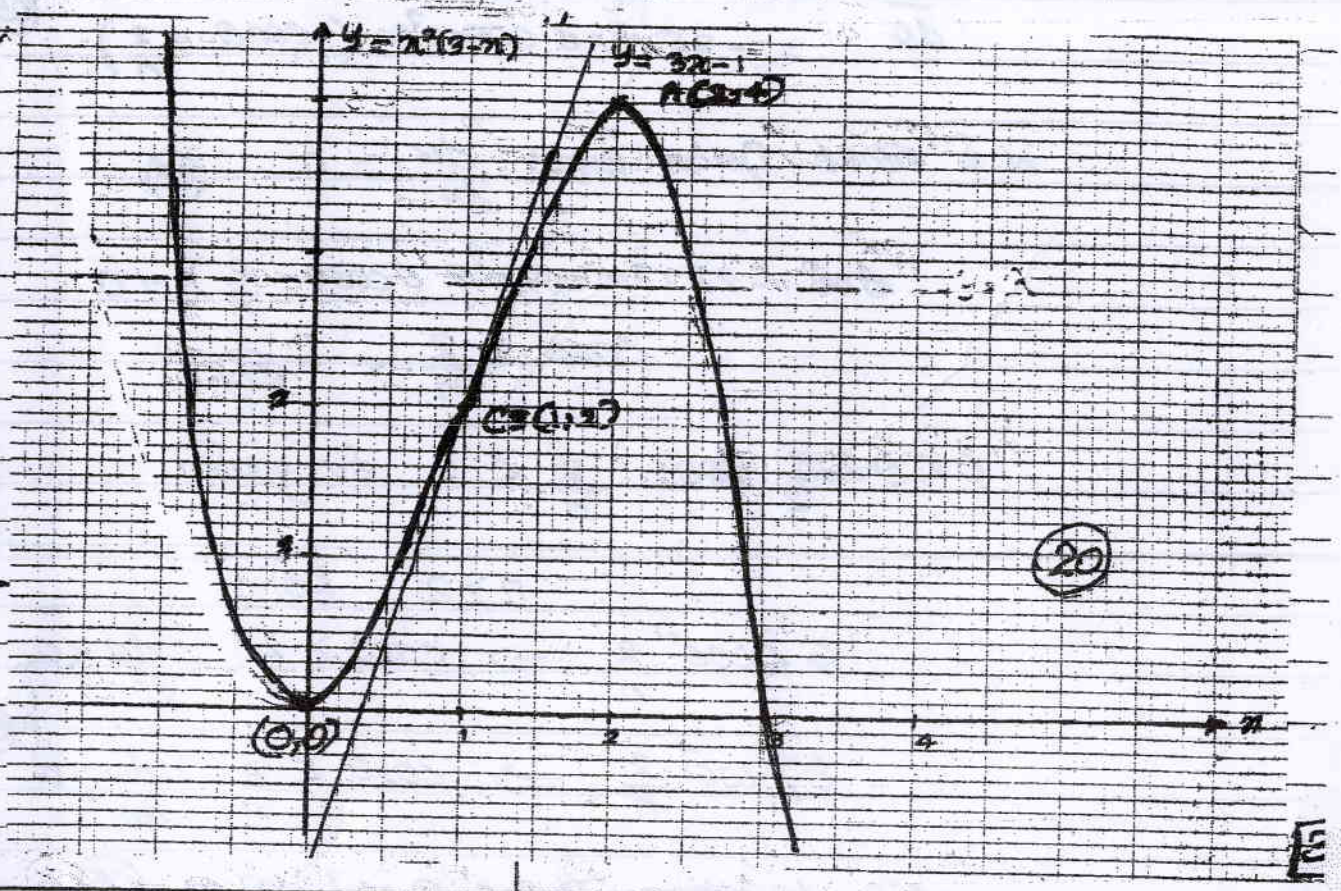
∴ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය $(1,2)$ වේ. (05)

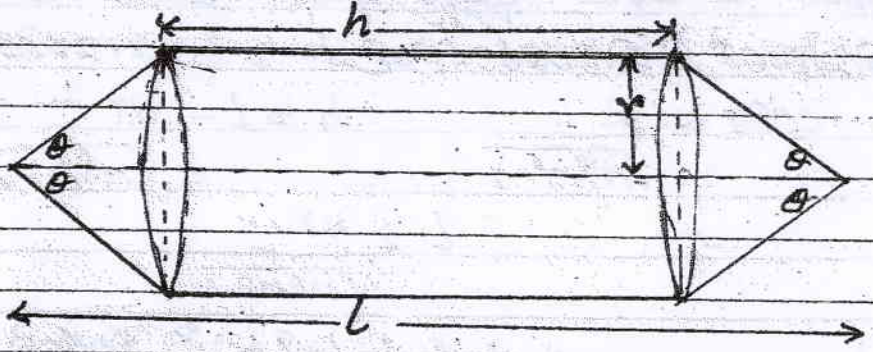
* මෙම නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ දී ශ්‍රිතයේ වක්‍රාකාරයට ඇඳි ස්පර්ශකය x අක්ෂයට සමාන්තර නොවේ. මෙම ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\frac{y-2}{x-1} = 3 \Rightarrow y = 3x-1$ වේ

$x = 3$ ඉදී $f(x) = 0$ ∴ $(3,0)$ සම්භාව්‍ය ලක්ෂ්‍යය නොවේ. (05)

$f(x) = x^2(3-x)$

$x \to \pm\infty$; $f(x) \to -\infty$ වේ. (05)





කේතුවේ උස = $r\cot\theta$, කේතුවේ දිගුව වේ = $r\operatorname{cosec}\theta$

සිලින්ඩරයේ උස = h $\Rightarrow$ $l = h + 2r\cot\theta$

$\therefore h = l - 2r\cot\theta$ (05) 05

කේතුවේ හරස්ඡ වර්ගඵලය = $\pi r \cdot r\operatorname{cosec}\theta = \pi r^2\operatorname{cosec}\theta$

කේතු දෙකේ කඵ = $2\pi r^2\operatorname{cosec}\theta$ ඒකක (05)

සිලින්ඩරයේ කඵ = $2\pi rh$ ඒකක

= $2\pi r(l - 2r\cot\theta)$ ඒකක (05)

∴ සම්පූර්ණ මුළු කාර්ය $W = 2\pi r^2 n\sigma \operatorname{cosec}\theta + 2\pi r\sigma (l - 2r\cot\theta)$

$\underline{\underline{W = 2\pi r\sigma (nr\operatorname{cosec}\theta - 2r\cot\theta + l)}}$ (05)

$\frac{dW}{d\theta} = 2\pi\sigma r(-nr\operatorname{cosec}\theta\cot\theta + 2r\operatorname{cosec}^2\theta)$

$= -2\pi r^2 n\sigma \operatorname{cosec}^2\theta \left(\cos\theta - \frac{2}{n}\right)$ (05)

W හි ස්ථාවර අගයක් සඳහා $\frac{dW}{d\theta} = 0$ (05)

එවිට $-2\pi r^2 n\sigma \operatorname{cosec}^2\theta \left(\cos\theta - \frac{2}{n}\right) = 0$

$\cos\theta = \frac{2}{n}$ (05)

$0 < \theta < \pi/2$ වන බැවින් $\frac{2}{n} < 1$ විය යුතුයි.

$\therefore n > 2$ (05)

$\theta < \cos^{-1}\frac{2}{n} \Rightarrow \cos\theta > \frac{2}{n} \quad \therefore \frac{dW}{d\theta} < 0$

$\theta > \cos^{-1}\frac{2}{n} \Rightarrow \cos\theta < \frac{2}{n} \quad \therefore \frac{dW}{d\theta} > 0$ (05)

එවිට W සඳහා අඩුතම අගයක් ලැබේ. (05)

මෙම අවස්ථාවේ, සිලින්ඩරයේ උස $h = l - 2r\cot\theta > 0$

$\cot\theta = \frac{2}{\sqrt{n^2-4}}$ $\quad h = l - \frac{4r}{\sqrt{n^2-4}} > 0$

$l > \frac{4r}{\sqrt{n^2-4}}$

$\therefore r < \frac{l}{4}(n^2-4)^{1/2}$ (05)

∴ θ විචලනය වන විට, W ට අඩුතම අගයක් තිබීමට $n > 2$ හා $r < \frac{l}{4}(n^2-4)^{1/2}$ නම් පමණක් විය යුතුය. (05)

<u>අනේ! නොවේ නම්, W ට අඩුතම අගයක් තිබිය නොහැ</u>

(14)

(a) $$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$ (05)

$$x^2+x+1 = A(x-1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x-1)^2$$

x^3 $\Rightarrow$ $A+C = 0$ —— (1)

x^2 $\Rightarrow$ $-A+B-2C+D=1$ —— (2)

x $\Rightarrow$ $4A+C-2D=1$ —— (3)

x^0 $\Rightarrow$ $-4A+4B+D=1$ —— (4)

$A = 9/25$, $B = 3/5$, $C = -9/25$, $D = 1/25$ (10)

$$\therefore \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{9}{25(x-1)} + \frac{3}{5(x-1)^2} - \frac{9x}{25(x^2+4)} + \frac{1}{25(x^2+4)}$$ (05)

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{9}{25}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{5}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{9}{25}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{25}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$ (05)

$$= \frac{9}{25}\ln|x-1| - \frac{3}{5(x-1)} - \frac{9}{50}\ln|x^2+4| + \frac{1}{50}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$ (05) (05) (05) (05)

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{9}{50}\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+4}\right| - \frac{3}{5(x-1)} + \frac{1}{50}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

C දැමීමට නියමයි. 5

(b) $$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

$x = \sin\theta$

$dx = \cos\theta\,d\theta$

$x=1$ වේ, $\theta = \pi/2$

$x=0$ වේ, $\theta = 0$ } (05)

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$ (05)

10

$\theta = \pi/2 - \beta$ යොදමු. (05)

$d\theta = -d\beta$

$\theta = \pi/2$ වේ, $\beta = 0$

$\theta = 0$ වේ, $\beta = \pi/2$ } (05)

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \frac{-\cos(\pi/2-\beta)\,d\beta}{\sin(\pi/2-\beta)+\cos(\pi/2-\beta)}$$ (05)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\beta}{\cos\beta + \sin\beta}\, d\beta \quad (05)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \quad (05) \qquad 25$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos\theta + \sin\theta)}{\sin\theta + \cos\theta}\, d\theta \quad (05)$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1\, d\theta \quad (05)$$

$$2I = [\theta]_0^{\pi/2} \quad (05) = \pi/2$$

$$I = \pi/4 \quad (05) \qquad 20$$

(c) $\int \sec^6 x\, dx = \int \sec^4 x \cdot \sec^2 x\, dx$ (05)

$u = \sec^4 x, \quad \frac{dv}{dx} = s$

$\frac{du}{dx} = 4\sec^3 x \sec x \tan x$

$v = \tan x.$

$$\int \sec^6 x\, dx = \sec^4 x \tan x - \int \tan x \cdot 4\sec^3 x \sec x \tan x\, dx \quad (05)$$

$$= \sec^4 x \tan x - 4\int \sec^4 x \tan^2 x\, dx.$$

$$= \sec^4 x \tan x - 4\int \sec^4 x (\sec^2 x - 1)\, dx.$$

$$5\int \sec^6 x\, dx = \sec^4 x \tan x + 4\int \sec^2 x\, dx. \quad \text{——— (1)} \quad (05)$$

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\, dx \quad (05)$$

$$= \sec^2 x \tan x - \int \tan x \cdot 2\sec x \sec x \tan x\, dx$$

$$= \sec^2 x \tan x - 2\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx \quad (05)$$

$$= \sec^2 x \tan x - 2\int (\sec^4 x - \sec^2 x)\, dx$$

$$3\int \sec^4 x\, dx = \sec^2 x \tan x + 2\int \sec^2 x\, dx$$

$$= \sec^2 x \tan x + 2\tan x \quad (05)$$

2 ① $\int \sec^6 x\,dx = \sec^4 x \tan x + \frac{4}{3}\sec^2 x \tan x + \frac{8}{3}\tan x$ (05)

$\int \sec^6 x\,dx = \frac{1}{5}\left(\sec^4 x \tan x + \frac{4}{3}\sec^2 x \tan x + \frac{8}{3}\tan x\right) + C$ (10)

C දැක්වීම නිවැරදිය. (01)

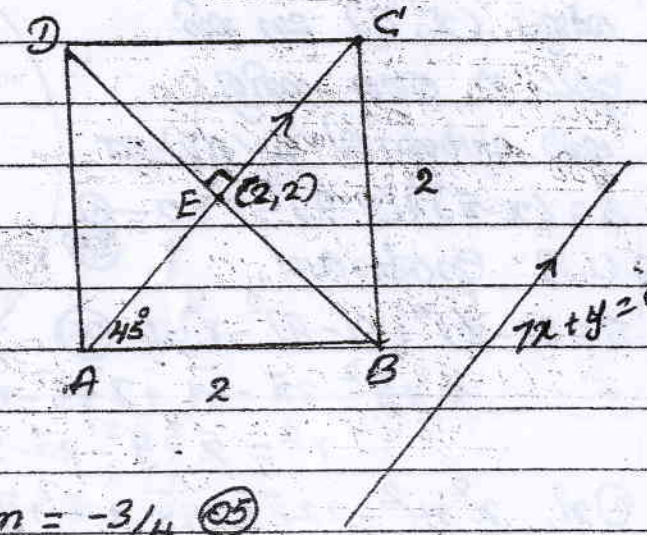
(150)

(15)

$m_{AC} = -7 \quad \therefore m_{BD} = \frac{1}{7}$

$m_{AB} = m$ නම්,

$\tan 45 = \left|\frac{-7-m}{1+(-7)m}\right|$ (05)



$\pm 1 = \frac{7+m}{1-7m}$ (05)

(+) $1-7m = 7+m \Rightarrow m = -3/4$ (05)

(-) $-1+7m = 7+m \Rightarrow m = 4/3$ (05)

$m_{AB} = 4/3$ නම් $m_{AD} = -3/4$ වේ.

AB හි සමීකරණය $-3y+4x+c_1 = 0$ වේ. (05)

කවයෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට ස්පර්ශක දිගෙ දුර 2 නිසා, E සිට AB ට

ඇඳිය යුතු දුර = ත්‍රිජ්‍යය 1

$\left|\frac{-3\times 2+4\times -2+c_1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 1$ (05)

$\frac{-6+8+c_1}{5} = \pm 1 \Rightarrow c+14 = \pm 5$ (05)

$c_1 = 9$ හෝ $c_1 = 19$ (05)

$\therefore$ AB හි සමීකරණය $4x-3y+19 = 0$ නම්, (05)

CD හි සමීකරණය $4x-3y+9 = 0$ වේ. (05)

AD හි සමීකරණය $4y+3x+c_2 = 0$

$\left|\frac{4\times 2-3\times -2+c_2}{5}\right| = 1$ (05)

$c_2+2 = \pm 5$ (05)

$c_2 = 3$ හෝ $c_2 = -7$ (05)

∴ AD හි සමීකරණය $4y+3x+3=0$ වේ, (05)

BC හි සමීකරණය $4y+3x-7=0$ වේ (05)

∴ සමචතුරස්‍රයේ පාද වල සමීකරණ $4x-3y+19=0$, $4y+3x+3=0$,

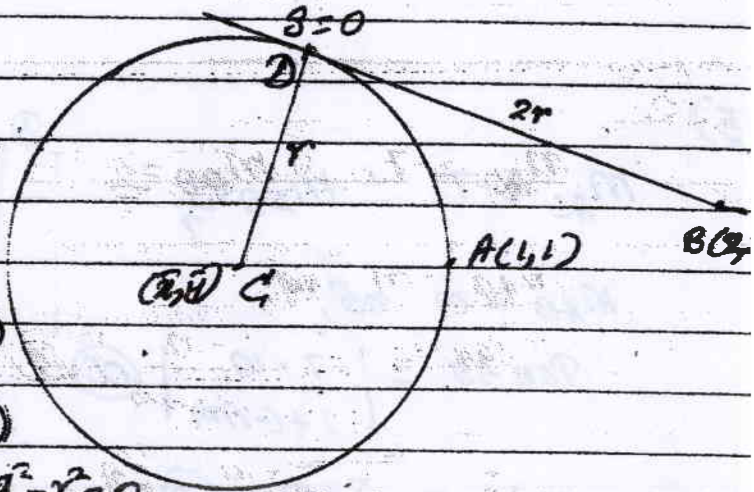
$4x-3y+9=0$ හා $4y+3x-7=0$ වේ.

75

(b)

$S=0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $(\bar{x}, \bar{y})$ හා අරය r ලෙස ගනිමු.

B සිට ස්පර්ශකයේ දිග $(BD)=2r$



$S \equiv (x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2-r^2=0$ — ① (05)

A(1,1) ආදේශයෙන්,

$S \equiv (1-\bar{x})^2+(1-\bar{y})^2-r^2=0$ (05)

$\bar{x}^2+\bar{y}^2-2\bar{x}-2\bar{y}+2-r^2=0$

$r^2=\bar{x}^2+\bar{y}^2-2\bar{x}-2\bar{y}+2$ (05)

① න්, $x^2+y^2-2x\bar{x}-2y\bar{y}+\bar{x}^2+\bar{y}^2-r^2=0$ (05)

B(2,3) ලක්ෂයේ සිට ඇඳි ස්පර්ශකයේ $= 2r$

$2^2+3^2-4\bar{x}-6\bar{y}+\bar{x}^2+\bar{y}^2-r^2=4r^2$ (05)

$\bar{x}^2+\bar{y}^2-4\bar{x}-6\bar{y}+13=5r^2$

$=5(\bar{x}^2+\bar{y}^2-2\bar{x}-2\bar{y}+2)$ (05)

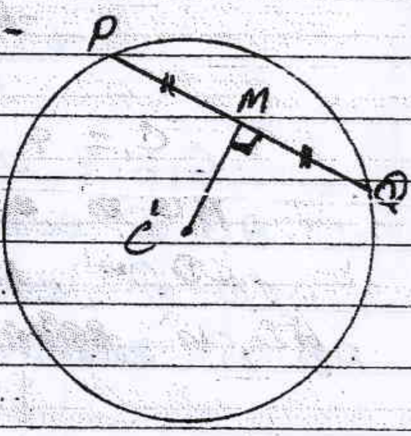
$4\bar{x}^2+4\bar{y}^2-6\bar{x}-4\bar{y}-3=0$ (05)

∴ $S=0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ පථය $4x^2+4y^2-6x-4y-3=0$ වේ (05)

4

$S' \equiv 4x^2+4y^2-6x-4y-3=0$

$S' \equiv x^2+y^2-\frac{3}{2}x-y-\frac{3}{4}=0$



S' හි කේන්ද්‍රය $C' \equiv \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (05)

අරය $r' = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$r' = \frac{5}{4}$ (05)

$PQ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\therefore PM = \frac{\sqrt{3}}{8}$ (05)

$C'M = \left[\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{64}} = \frac{\sqrt{97}}{8}$ (05)

$M \equiv (x', y')$ නම්

M හි පථයේ සමීකරණය

$\left(x' + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{97}}{8}\right)^2$ (05)

(x, y) ලා ඔප්පු කරන්න.

$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{97}{64} = 0$ (10)

35

150

(16)

(a) $y = \tan^{-1}\left[\frac{4\cos x + 3\sin x}{3\cos x - 4\sin x}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{4/5\cos x + 3/5\sin x}{3/5\cos x - 4/5\sin x}\right]$ (05)

$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos x \sin\alpha + \sin x \cos\alpha}{\cos x \cos\alpha - \sin x \sin\alpha}\right]$; $\left(\alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$ (10)

$= \tan^{-1}\left[\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos(x+\alpha)}\right]$ (05)

$= \tan^{-1}(\tan(x+\alpha))$ (05)

$y = x + \alpha$ (05)

$\frac{dy}{dx} = 1$ (05)

35

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\cos x}$ (05) $= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sec x\, dx$ (05)

$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)dx}{(\sec x + \tan x)}$ (10)

$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{(\sec^2 x + \sec x \tan x)dx}{\sec x + \tan x}$ (05)

$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\tan x + \sec x| + C$ (10)

35

$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\tan x + \sec x|\right] = \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}$ (10)

$\frac{d}{dx} \ln|\tan x + \sec x| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos 2x}}$ (10)

20

(C) $\sec\theta - \tan\theta = -(\sqrt{2}+1)$ —— (1) $\theta \in (0, 2\pi)$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (05)

$(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ (05)

$\sec\theta + \tan\theta = \frac{-1}{(\sqrt{2}+1)}$ (05)

$\sec\theta + \tan\theta = -(\sqrt{2}-1)$ —— (2) (05)

(1) + (2) ගැ $2\sec\theta = -2\sqrt{2}$ (05)

$\sec\theta = -\sqrt{2}$ (05)

(2) − (1) ගැ $2\tan\theta = 2$ (05)

$\tan\theta = 1$ (05)

$\sec\theta = -\sqrt{2}$ හා $\tan\theta = 1$ යන සමීකරණ තෘප්ත වන අතර කරන $(0, 2\pi)$ තුළ පිහිටි විසඳුම $\theta = \frac{5\pi}{4}$ බවයි. (10)

$\therefore$ θ හි සාධාරණ විසඳුම $\theta = 2n\pi + \frac{5\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$ (10)

12

(17)

(a) $\cos\theta = \frac{\cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2 + \sin^2\theta/2} = \frac{1 - \tan^2\theta/2}{1 + \tan^2\theta/2}$ (05)

$\sin\theta = \frac{2\sin\theta/2 \cos\theta/2}{\cos^2\theta/2 + \sin^2\theta/2} = \frac{2\tan\theta/2}{1 + \tan^2\theta/2}$ (05)

$y = \frac{1 + \sin\theta}{5 + 4\cos\theta} = \frac{1 + \left(\frac{2\tan\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}\right)}{5 + 4\left(\frac{1 - \tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}\right)}$ (05)

(17)

(a) $y = \dfrac{1 + 2\tan\theta/2 + \tan^2\theta/2}{9 + \tan^2\theta/2}$ (05)

$y = \dfrac{(1+\tan\theta/2)^2}{9 + \tan^2\theta/2}$ (05) 15

$9y + y\tan^2\theta/2 = 1 + 2\tan\theta/2 + \tan^2\theta/2$ (05)

$(y-1)\tan^2\theta/2 - 2\tan\theta/2 + 9y - 1 = 0$ (05)

සැබෑ

$(-2)^2 - 4(y-1)(9y-1) \geq 0$ (05)

$1 - (9y^2 - 10y + 1) \geq 0$

$y(9y - 10) \leq 0$

$y(y - 10/9) \leq 0$ (05)

$\therefore 0 \leq y \leq \frac{10}{9}$ (05)

$0 \leq \dfrac{1+\sin\theta}{5+4\cos\theta} \leq \frac{10}{9}$ (05) 30

$2\sin 2x + \cos 2x = k$

$2 \cdot \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = k$ (05)

$4\tan x + 1 - \tan^2 x - k(1+\tan^2 x) = 0$ (05)

$(1+k)\tan^2 x - 4\tan x + (k-1) = 0$ (05) 15

මූලයන් $\tan x_1, \tan x_2$ නම්,

$\tan x_1 + \tan x_2 = \frac{4}{1+k}$ (05), $\tan x_1 \cdot \tan x_2 = \frac{k-1}{k+1}$ (05)

$\tan(x_1 + x_2) = \dfrac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$ (05)

$= \dfrac{4/(k+1)}{1 - \left(\frac{k-1}{k+1}\right)}$ (05) $= \frac{4}{2}$

$\therefore \tan(x_1 + x_2) = 2$ (05) 25

(17)

(b) L.H.S. $= (b+c)\tan\frac{A}{2} - (b-c)\cot\frac{A}{2}$

$= \dfrac{(b+c)\tan^2 A/2 - (b-c)}{\tan A/2}$ (05)

$= \dfrac{-b(1-\tan^2 A/2) + c(1+\tan^2 A/2)}{\tan A/2}$

$= \dfrac{\dfrac{-b(1-\tan^2 A/2)}{(1+\tan^2 A/2)} + c}{\dfrac{\tan A/2}{(1+\tan^2 A/2)}}$ (05)

$= \dfrac{-b\cos A + c}{\frac{1}{2}\sin A}$ (05)

$= \dfrac{-2b\cos A + 2c}{\sin A}$

$= \left\{\dfrac{-2b\cos A + 2b\sin C}{\sin B}\right\}\dfrac{1}{\sin A}$ (05) $\left(\because \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}\right)$

$= \dfrac{2b(-\sin B\cos A + \sin C)}{\sin A \sin B}$ (05)

$= \dfrac{2b(-\sin B\cos A + \sin(A+B))}{\sin A \sin B}$

$= 2b\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}$ (05)

$= 2b\cot B$

$\therefore (b+c)\tan\frac{A}{2} - (b-c)\cot\frac{A}{2} = 2b\cot B$ (05) [35]

(c) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = A + B$; $A = \cos^{-1}x$,

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ (05)

$= xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

$A+B = \cos^{-1}\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)$ (05)

$\therefore \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)$ (05)

$\cos A = x$

$\therefore \sin A = \sqrt{1-x^2}$

$\because 0 < A < \pi/2$ (05)

$B = \cos^{-1}y$

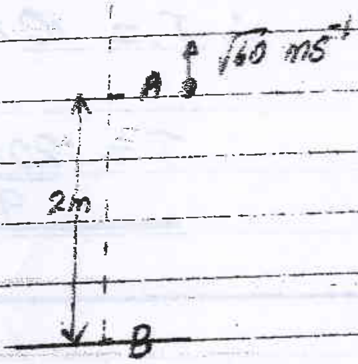
$\cos B = y$

$\therefore \sin B = \sqrt{1-y^2}$

$\because 0 < B < \pi/2$ [20]

[150]

උතුරු පළාත් අධ්‍යාපන දෙපාර්තමේන්තුව
සංයුක්ත ගණිතය II - 13 ශ්‍රේණිය
දෙවන වාර පරීක්ෂණය - 2019
ලකුණු දීමේ පටිපාටිය



01) $A \rightarrow B$ චලිතයට

$\uparrow V^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්,

$V^2 = (\sqrt{60})^2 - 2\times 10(-2)$

$V^2 = 100$

$V = \pm 10$ (05)

B හි ගැටීමට මොහොතකට පෙර අංශුවේ

ප්‍රවේගය $\downarrow 10ms^{-1}$ වේ. (05)

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන්, පොළා පනින ප්‍රවේගය $\uparrow V'$ නම්,

$\frac{V'}{-10} = -e$ (05) $\therefore V' = 10e$

$B \rightarrow A$ චලිතයට $\uparrow V^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්,

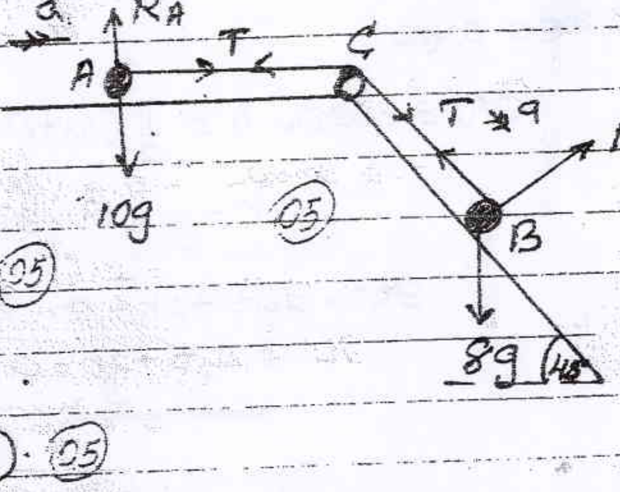
$0 = (10e)^2 - 2\times 10\times 2$ (05)

$e^2 = \frac{4}{10}$

$e = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$\therefore$ තලයත්, අංශුවත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $= \frac{\sqrt{10}}{5}$ (05)

25



(05)

02) අංශුවල ත්වරණය a නම්

තන්තුවේ ආතතිය T නම්

A ට $\rightarrow$ $F = ma$ යෙදීමෙන්,

$T = 10a$ —— (1) (05)

B ට $\searrow$ $F = ma$ යෙදීමෙන්,

$8g \sin 45^\circ - T = 8a$ —— (2) (05)

① + ② න්, $18a = 8g \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{9} g \ ms^{-2}$$ ⑤

$$\therefore T = 10 \times \frac{2\sqrt{2}g}{9}$$

$$T = \frac{20\sqrt{2}}{9} g \ N$$ (05)

25

(03)

OADE වර්ගඵලය h වේ.

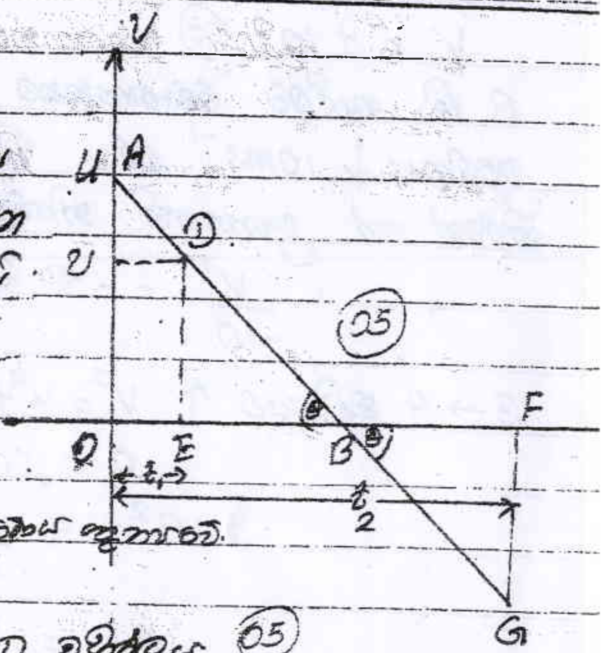
අංශුව ඉහළට යාමේදී t_1 හිදී h උස පසුකරන අතර පහළට පැමිණීමේදී ගමන් කරන විට, t_2 කාලයේදී h උස පසු කර යයි.

BDE Δ ≡ BFG Δ

∴ BE = BF වේ.

එවිට B හිදී කාලය $\frac{t_1+t_2}{2}$ වේ.

∴ $\frac{(t_1+t_2)}{2}$ කාලයේදී අංශුවේ ප්‍රවේගය ශුන්‍ය වේ.



OADE ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය = h

h = OAB වර්ගඵලය − BED වර්ගඵලය (05)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(t_1+t_2)}{2}\right] \times u - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) - t_1\right] v$$

$$h = \frac{1}{4}\left[u(t_1+t_2) - v(t_2 - t_1)\right] \text{ —— ①}$$ (05)

විකල්ප විසඳුම

OADE වර්ගඵලය $h = \frac{1}{2}(u+v)t$ $g = \frac{u-v}{t}$ ∴ $v = u - gt$

$$h = \frac{1}{2}(2u - gt)t$$

$gt^2 - 2ut + 2h = 0$ මෙම සමීකරණයේ මූල t_1 හා t_2 වේ (05)

$$t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$$

$4t_1t_2$

$$\therefore t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$$ (05)

25

උණ්ඩය වැදීමට මොහොතකට පෙර   උණ්ඩය වැදී මොහොතකට පසු.

රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති මූලධර්මයෙන්,

$10mV = mu$ (05)

$\therefore V = u/10$ (05)

චාලක ශක්ති හානිය $= \frac{1}{2}mu^2$ (05) $- \frac{1}{2} \times 10mV^2$ (05)

$= \frac{1}{2}m\left(u^2 - \frac{10u^2}{100}\right)$

$= \frac{9mu^2}{20}$ (05)

[25]

රථයේ වේගය $U = 48\,kmh^{-1} = \frac{48 \times 1000}{3600}\,ms^{-1}$

$= \frac{40}{3}\,ms^{-1}$

මෝටර් රථයේ ජවය H නම්,

$H = PV$ (P යනු ප්‍රකර්ෂණ බලයයි.)

$20 \times 10^3 = P \times \frac{40}{3} \Rightarrow P = 1500N$ (05)

R ← [රථය] → P   R යනු ප්‍රතිරෝධී බලයයි.

→ $F = ma$ යෙදීමෙන්.

$P - R = 1000a$

$1500 - R = 1000 \times 0$ $\therefore R = 1500N$ (05)

F ← [රථය]   රථයේ තිරිංග බලය = F ලෙස ගනිමු.

→ $F = ma$ යෙදීමෙන්,

$-(R+F) = 1000a$ (a රථයේ මන්දනයයි.)

$\therefore a = -\frac{(1500+F)}{1000}$ වේ. (05)

→ $v^2 = u^2 + 2as$ යොදාගන්න,

$$0 = \left(\frac{40}{3}\right)^2 - 2\,\frac{(1500+F)}{1000} \times 30 \quad (05)$$

$$\frac{6F}{100} = \frac{1600}{9} - 90 = \frac{790}{9}$$

$$F = \frac{790 \times 100}{9 \times 6} \quad (05)$$

∴ කිරිගාවල බලය = 1462.96 N ≈ 1463 N

(25)

(06) $\overrightarrow{OA} = 2\pi\underset{\sim}{i} + 3\mu\underset{\sim}{j}$

$\overrightarrow{OB} = 3\pi\underset{\sim}{i} - 2\mu\underset{\sim}{j}$

$\overrightarrow{OC} = 2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$ ∴

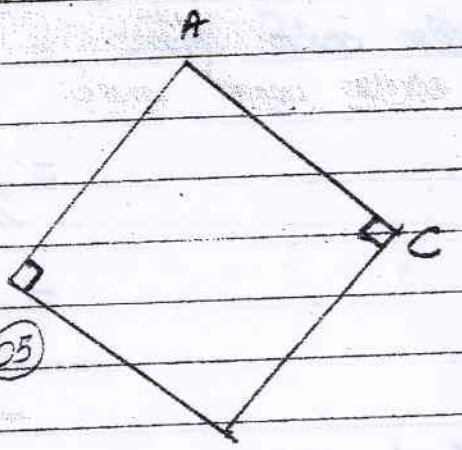
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ ($OA \perp OB$)

$(2\pi\underset{\sim}{i} + 3\mu\underset{\sim}{j}) \cdot (3\pi\underset{\sim}{i} - 2\mu\underset{\sim}{j}) = 0$ (05)

$6\pi^2 - 6\mu^2 = 0$

$6(\pi + \mu)(\pi - \mu) = 0$

$\pi\mu > 0$ නිසා, $\pi = \mu$ වේ. (05)



$BC \perp AC$ බැවින්,

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = (2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} - 3\pi\underset{\sim}{i} + 2\mu\underset{\sim}{j}) \cdot (2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} - 2\pi\underset{\sim}{i}$

$= (2\underset{\sim}{i} + 3\pi\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + 2\mu\underset{\sim}{j}) \cdot (2\underset{\sim}{i} - 2\pi\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} -$

$= * \quad (2-3\pi)(2-2\pi) + (1+2\mu)(1-3\mu) =$

$6(\pi^2 - \mu^2) - 10\pi - \mu + 5 = 0$

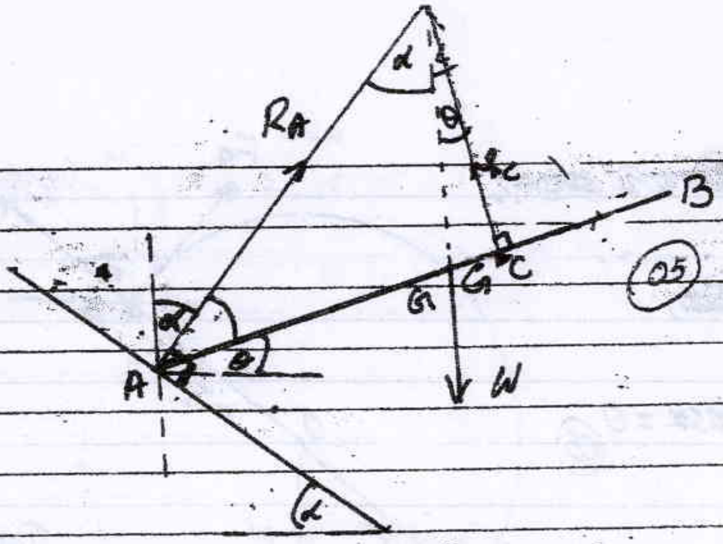
$\pi = \mu$ බැවින්, $-11\pi = -5$

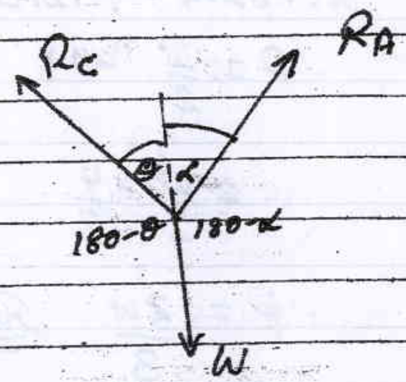
$\pi = \mu = \frac{5}{11}$ (05) + (05)

(25)

$* = [(2-3\pi)\underset{\sim}{i} + (1+2\mu)\underset{\sim}{j}] \cdot [(2-2\pi)\underset{\sim}{i} + (1-3\mu)\underset{\sim}{j}$

7)





R_A, R_C හා W යන බල තුන යටතේ සමතුලිතතාවයේ ඇත.

$\sin\theta = 7/25$, $\sin\alpha = 3/5$

$\cos\theta = 24/25$, $\cos\alpha = 4/5$

ලාමි ප්‍රමේයයෙන්, $\dfrac{R_A}{\sin(180-\theta)} = \dfrac{R_C}{\sin(180-\alpha)} = \dfrac{W}{\sin(\theta+\alpha)}$ (05)

$$R_A = \frac{W\sin\theta}{\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta}$$

$$= \frac{W \cdot 7/25}{3/5 \cdot 24/25 + 4/5 \cdot 7/25}$$

$$= \frac{35W}{72+28} = \frac{35W}{100}$$

$$\therefore R_A = \frac{7W}{20}$$ (05)

$$R_C = \frac{W\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta}$$ (05)

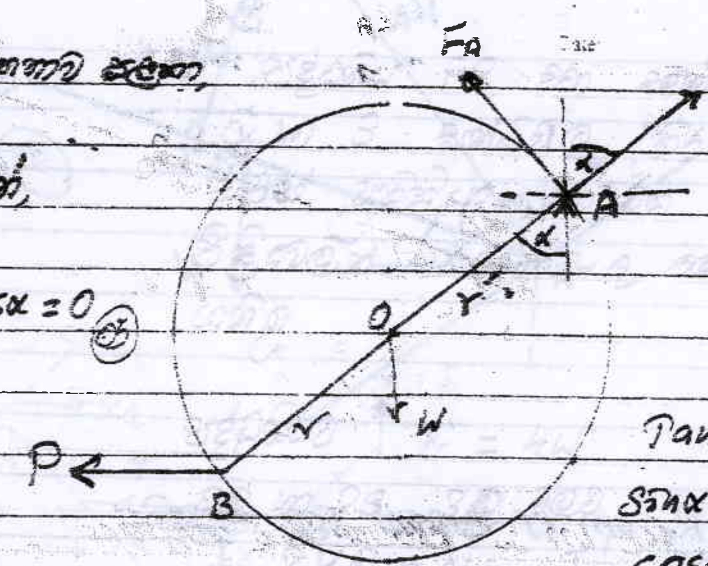
$$= \frac{W \cdot 3/5}{100/125} = \frac{75W}{100}$$

$$\therefore R_C = \frac{3W}{4}$$ (05)

25

(08) වළල්ලේ සමතුලිතතාව සලකා,

A ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,



$W.r\sin\alpha - P.2r\cos\alpha = 0$ (05)

$P = \frac{W}{2}\tan\alpha$

$= \frac{W}{2} \times \frac{4}{3}$

$P = \frac{2W}{3}$ (05)

$\tan\alpha = 4/3$

$\sin\alpha = 4/5$

$\cos\alpha = 3/5$

වළල්ලේ අරය $= r$

$\uparrow$ $R_A\cos\alpha + F_A\sin\alpha - W = 0$

$3R_A + 4F_A = 5W$ ——— ① (05)

$\rightarrow$ $R_A\sin\alpha - F_A\cos\alpha - P = 0$

$4R_A - 3F_A = \frac{10W}{3}$ ——— ② (05)

① × 3 + ② × 4 $\quad 25R_A = \frac{85W}{3}$

$\therefore R_A = \frac{85W}{75}$

$R_A = \frac{17W}{15}$ (05)

$\therefore 4F_A = 5W - 3R_A$

$= 5W - \frac{51W}{15}$

$4F_A = \frac{24W}{15}$

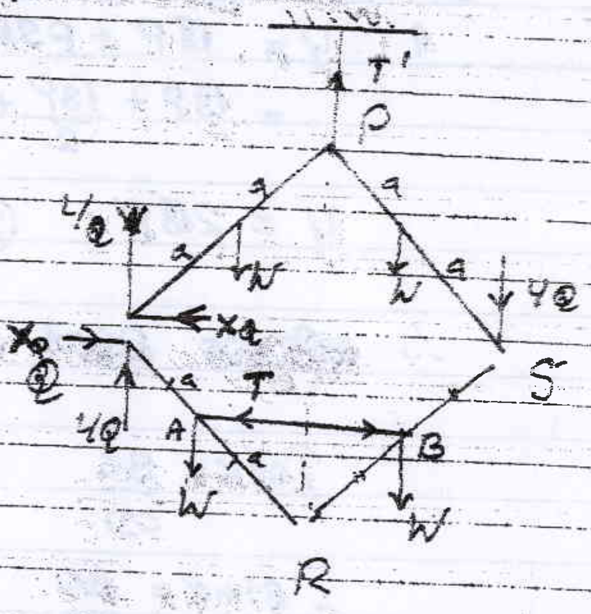
$\therefore F_A = \frac{2W}{5}$ (05)

වළල්ල හා [illegible] දණ්ඩ අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම්

$\mu = \frac{F_A}{R_A} = \frac{2W}{5} / \frac{17W}{15} = 6/17$ (05)

75

(09) පද්ධතිය PR වට සමමිතික වේ.
Q හා S සන්ධිවල තිරස් හා සිරස් ප්‍රතික්‍රියා සංරචක පිළිවෙලින් X_Q හා Y_Q ලෙස ගනිමු.



පද්ධතියට $\uparrow T' = 4W$

PQ හා PS දඬු සඳහා

$\downarrow \; 2Y_Q + 2W - T' = 0$

$2Y_Q + 2W = 4W$

$\therefore \underline{Y_Q = W}$ (05)

PQ සඳහා, P වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$X_Q \cdot 2a\cos 45 - Y_Q \times 2a \sin 45 - W \times a \sin 45 = 0$ (05)

$2X_Q - 2W - W = 0$

$X_Q = \dfrac{3W}{2}$ (05)

RQ සඳහා R වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

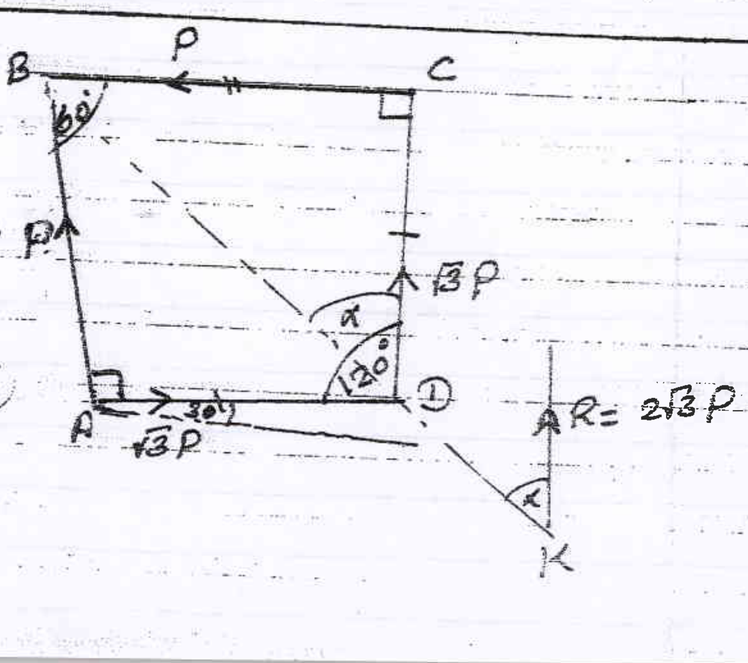
$-T \cdot a \sin 45 + X_Q \cdot 2a \sin 45 + Y_Q \times 2a\cos 45' - W \times a\cos 45' = 0$ (05)

$-T + \dfrac{3W}{2} \times 2 + 2W - W = 0$

$T = 4W$

$\therefore$ AB සැහැල්ලු දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය $= \underline{4W}$ (05)

25



$\leftarrow$ CB දිශාවේ බල විභේදනයෙන්,

$X = P + P\cos 60' - \sqrt{3}P \cos 30'$

$X = \dfrac{3P}{2} - \dfrac{3P}{2}$

$X = 0$ (05)

No:
Date:

$\vec{DC}$ දිශාවේ සමූ විභේදනයෙන්,

$\uparrow \therefore Y = \sqrt{3}P + P\sin 60 + \sqrt{3}P \sin 30$

$= \sqrt{3}P + \frac{\sqrt{3}P}{2} + \frac{\sqrt{3}P}{2}$

$Y = 2\sqrt{3}P$ (05)

$\therefore$ සම්පුයුක්ත බලයේ විශාලත්වය $= \sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{0+(2\sqrt{3}P)^2}$

$= 2\sqrt{3}P$ (05)

$\tan\alpha = \frac{BC}{CD}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{BC}{BD}$

$\leftarrow B$ වූර්ණ ගනිමු,

$2\sqrt{3}P \cdot BK \sin\alpha = \sqrt{3}P \cdot BC + \sqrt{3}P \cdot AB$ (05)

$2\sqrt{3}P \cdot BK \cdot \frac{BC}{BD} = 2\sqrt{3}P \cdot BC \quad (BC = AB)$

$BK = BD$

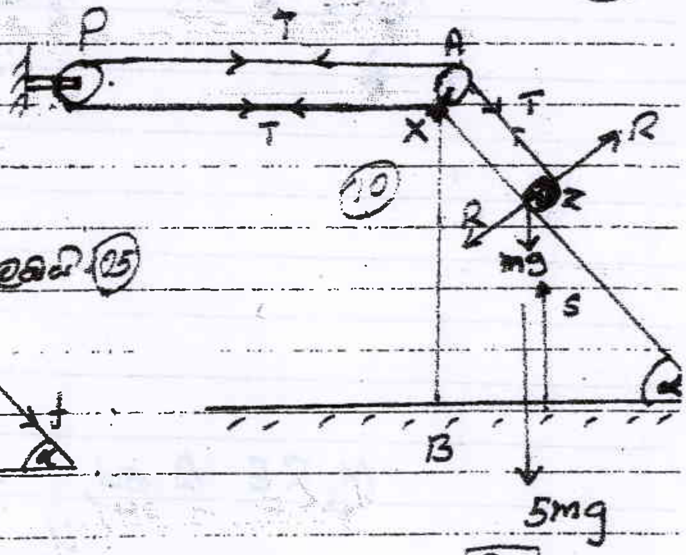
$\therefore$ සම්පුයුක්ත බලයේ ක්‍රියාරේඛාව BD ~~[illegible]~~ 2

D හරහා යයි.

$\therefore$ සම්පුයුක්ත බලයේ ක්‍රියාරේඛාව DC වේ.

(12)

(a)



කුට්ටිය P දෙසට x විස්ථාපනයක් ලබා විට m දිරුව AC මුහුණත දිගේ පහළට $2x$ විස්ථාපනයක් වෙයි (05)

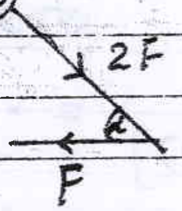
W - කුට්ටිය , Z - දිරුව

$a_{W,E} = \overleftarrow{F}$, $a_{Z,W} = \searrow f$ (α)

20

(i) $\therefore f = 2F$ (05)

$\therefore a_{Z,E} =$



(05)

$F = ma$

(ii) සමූහිතයට $\leftarrow$ $\quad 2T = 5mF + m(F - 2F\cos\alpha)$ ——— (1) (10)

Z ට $\searrow$ $\quad mg\sin\alpha - T = m(2F - F\cos\alpha)$ ——— (2) (1…)

(1) + 2.(2) $\quad 2mg\sin\alpha = 2m(2F - F\cos\alpha) + 5mF + m(F - 2F\cos\alpha)$

$2g\sin\alpha = 4F - 2F\cos\alpha + 5F + F - 2F\cos\alpha$

$10F - 4F\cos\alpha = 2g\sin\alpha$

$\therefore F = \dfrac{g\sin\alpha}{5 - 2\cos\alpha}$ (05)

3…

(iii)

(2) න්, $\quad T = m\left[g\sin\alpha - F(2 - \cos\alpha)\right]$ (05)

$= m\left[g\sin\alpha - \dfrac{g\sin\alpha}{(5 - 2\cos\alpha)}(2 - \cos\alpha)\right]$

$T = \dfrac{mg\sin\alpha\,(3 - \cos\alpha)}{(5 - 2\cos\alpha)}$ (05)

1C

M_2RE - Δ ගේ, $\frac{V_2}{\sin 30^\circ} = \frac{V}{\sin(30-\alpha)}$ (05)

$\therefore V_2 = RV\sin(30-\alpha)$

$V_2 = 2V(\sin 30\cos\alpha - \cos 30\sin\alpha)$

$V_2 = 2V\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4V^2-u^2}}{2V} - \frac{\sqrt{3}\,u}{2\cdot 2V}\right)$

$V_2 = V\left(\frac{\sqrt{4V^2-u^2} - \sqrt{3}\,u}{2}\right)$ (05)

M_3RE Δ ගේ, $R\hat{M}_3E = \beta$

$\frac{u}{\sin\beta} = \frac{V}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin\beta = \frac{u}{2V} = \sin\alpha$

$\frac{V_3}{\sin[180-(\beta+30)]} = \frac{V}{\sin 30^\circ}$

$V_3 = 2V\sin(\beta+30^\circ)$ (05)

$= 2V(\sin\beta\cos 30^\circ + \cos\beta\sin 30^\circ)$

$= 2V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{u}{2V} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4V^2-u^2}}{2V}\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{3}\,u + \sqrt{4V^2-u^2}}{2}\right)$ (05)

ගමනට ගතවන මුළු කාලය $T = \frac{d}{V_1} + \frac{d}{V_2} + \frac{d}{V_3}$ (05)

$T = d\left[\frac{1}{\sqrt{V^2-u^2}} + \frac{2}{\sqrt{4V^2-u^2} - \sqrt{3}\,u} + \frac{2}{\sqrt{3}\,u + \sqrt{4V^2-u^2}}\right]$ (05)

$$y = \frac{4Hx}{R^2}(R-x) \quad (05)$$

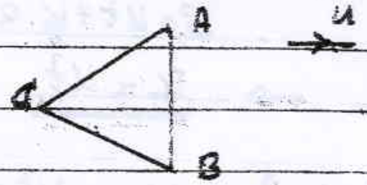
[10]

(b)

M - මෝටර් බෝට්ටුව

R - ඇළ වතුර

E - පොළොව



$V_{R,E} = \vec{u}$, $V_{M,R} = V$

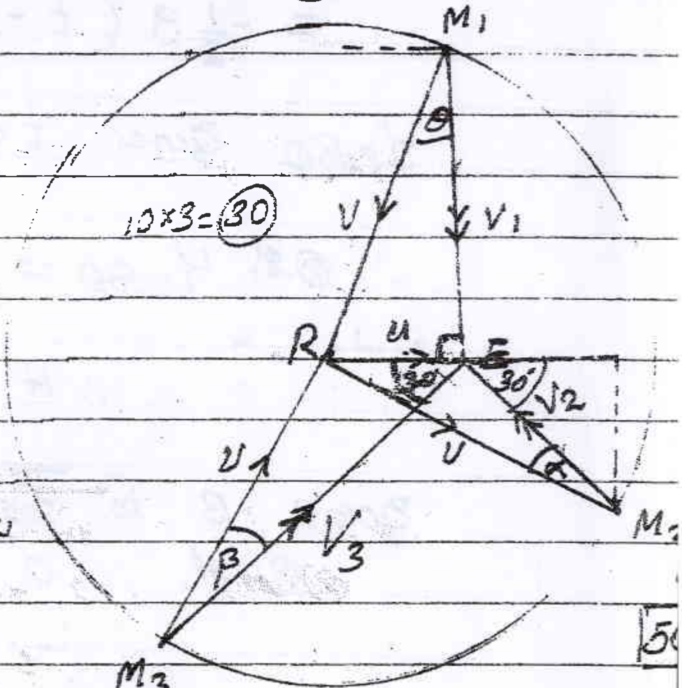
$$V_{M,E} = V_{M,R} + V_{R,E}$$

A – B චලිතයට $\downarrow$ $V_1 = V + \vec{u}$ (05)

B – C චලිතයට $V_2 = V + \vec{u}$ (05)

C – A චලිතයට $V_3 = V + \vec{u}$ (05)

$10 \times 3 = (30)$



RM_1E Δ න්

$$\sin\theta = \frac{u}{V} \quad (05)$$

RM_2E Δ යේ,
මෝටර් බෝට්ටුව $\vec{BC}$ දිගේ ගමන් කරන විට,
මෝටර් බෝට්ටුව යොමු කරන
දිශාව BC සමග සාදන කෝණය
α නම්,

$$\alpha = R\hat{M_2}E$$

[50]

RM_2E Δ ට sin නීතිය යෙදූ විට.

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{V}{\sin(180-30)} = \frac{V_2}{\sin(30-\alpha)} \quad (05)$$

$$\sin\alpha = \frac{u\sin 30^\circ}{V} = \frac{u}{2V} \quad \therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{u}{2V}\right)$$

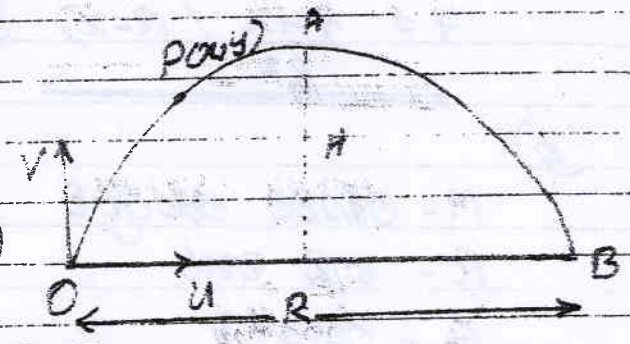
$\cos\alpha = \sqrt{4V^2-u^2}/2V$

C මගට ළඟාවෙන විට, මෝටර් බෝට්ටුව හැරිය යුතු කෝණය $M_1\hat{E}M_2$ වේ $\therefore M_1\hat{E}M_2 = 120^\circ$ [10]

M_1ER Δ යේ, $V_1 = \sqrt{V^2-u^2}$

5 වෙනසට

(11) (a)



O - P චලිතයට

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow$ $\underline{x = ut}$ ..... ① (05)

$\uparrow$ $\underline{y = vt - \frac{1}{2}gt^2}$ ——— ② (05)

10

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + vt$

$= -\frac{1}{2}g\left(t^2 - \frac{2v}{g}t + \frac{v^2}{g^2} - \frac{v^2}{g^2}\right)$ (05)

$= -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v}{g}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$

y උපරිම අගය $t = v/g$ වට ඒ සමාන. (05)

$\therefore$ ② හි, y උපරිම $= \frac{v^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$

$\therefore H = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$ (05)

අංශුව B හි තිගමනා වට, $x = R$ හා $y = 0$ වේ. (05)

② හි, $0 = vt - \frac{1}{2}gt^2$ (05)

$\therefore t = \frac{2v}{g}$

① හි $R = \frac{2uv}{g}$ (05)

30

$2gH = v^2$ හා $2uv = Rg$

$v = \sqrt{2gH}$, $u = \frac{Rg}{2\sqrt{2gH}}$

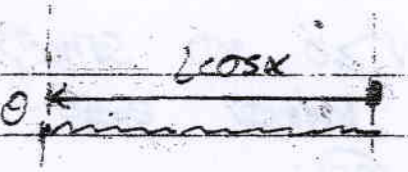
① හි $\frac{x}{u} = t$ ② ට ආදේශයෙන්

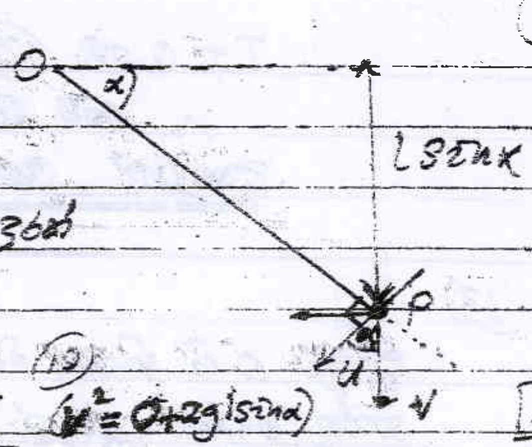
$y = \frac{xv}{u} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{u^2} = \frac{1}{u^2}\left(uvx - \frac{gx^2}{2}\right.$

$= \frac{8gH}{R^2g^2}\left[\frac{Rg}{2}x - \frac{gx^2}{2}\right]$

P.T.

(2)
(b)





තන්තුව තද වන විට, අංශුව l sinα දුරක් ගුරුත්වය යටතේ වැටේ.

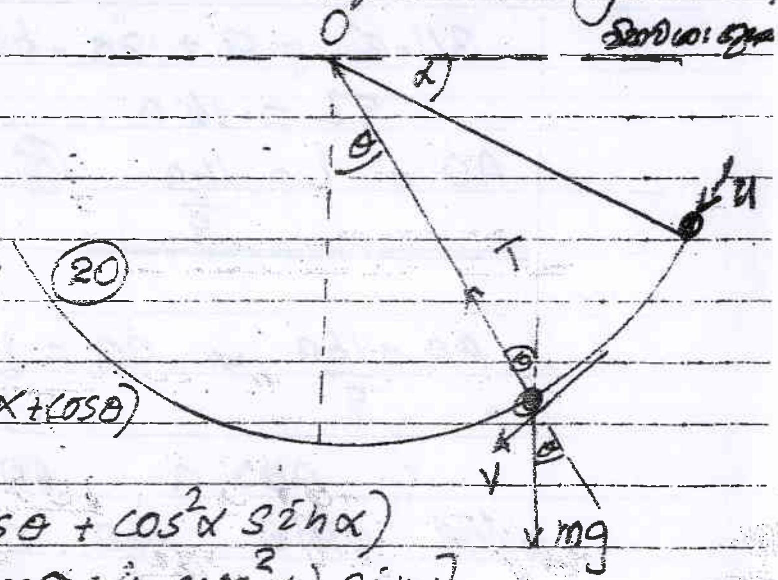
∴ තන්තුව තදවීමට මොහොතකට පෙර (10)
අංශුවේ ප්‍රවේගය $V = \sqrt{2gl\sin\alpha}$ $(v^2 = 0 + 2gl\sin\alpha)$ [10]

අංශුව වෘත්තාකාර පථයක ගමන් කිරීමට P හි ප්‍රවේගය OP ට ලම්බක විය යුතුයි. (05)

$u = v\cos\alpha = \cos\alpha\sqrt{2gl\sin\alpha}$ (05)

(මෙය අංශුව වෘත්තාකාර පථයේ ගමන් ආරම්භ කරන ප්‍රවේගයයි.)

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මයෙන්,



$\frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\theta = \frac{1}{2}mu^2 - mgl\sin\alpha$ (20)

$\frac{1}{2}(v^2 - u^2) = gl(-\sin\alpha + \cos\theta)$

$v^2 = 2gl(-\sin\alpha + \cos\theta + \cos^2\alpha\sin\alpha)$

$v^2 = 2gl[-\sin\alpha + \cos\theta + (1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha]$

$V = \sqrt{2gl(\cos\theta - \sin^3\alpha)}$ (10) [40]

↖ $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්,

$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{l}$ (10)

$\cos\theta = \frac{v^2 + 2gl\sin^3\alpha}{2gl}$ (05)

$T = \frac{mv^2}{l} + mg\frac{(v^2 + 2gl\sin^3\alpha)}{2gl}$ (05)

$T = \frac{3mv^2}{2l} + mg\sin^3\alpha$ (05) [25]

∴ $T \neq 0$ වේ. (05) ∵ $V^2 \geq 0$ හා $\sin\alpha > 0$ (05)

∴ මෙම චලිතයේදී තන්තුව ඇදී කිසිවිටෙකත් බුරුල්වූහොත් නොවේ. (05) [15]

[150]

(13)

අංශුව O හි තිබෙන විට,
තන්තු දෙකම ඇදුණු තත්ව
සමතුලිතතාවේ තිබේ නම්.

$T_1 = mg + T_2$ (05)

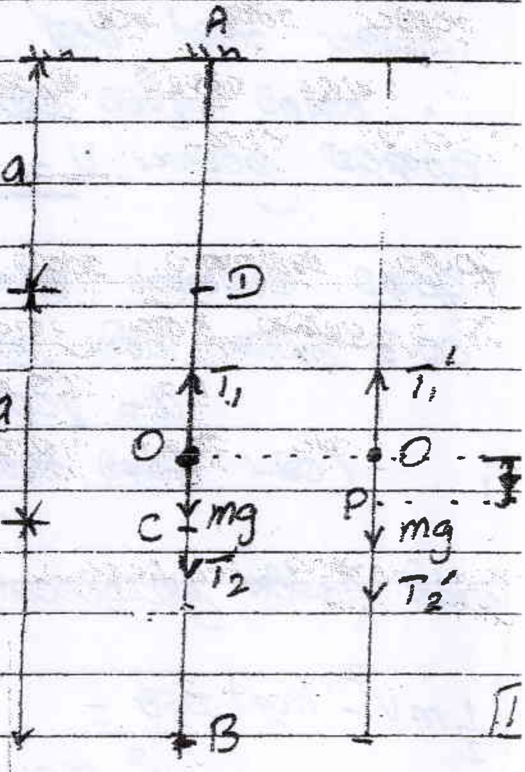
$AO = l$ නම්,

$\frac{3mg}{a}(l-a) = mg + \frac{6mg}{a}(3a-l-a)$ (05)

$3(l-a) = a + 12a - 6l$

$9l = 16a$

$AO = l = \frac{16a}{9}$ (05)



∴ $AO = \frac{16a}{9}$ හා $BO = \frac{11a}{9}$ (05)

∴ $AO > a$, $BO > a$.

තන්තු දෙකම තදව O හි අංශුව සමතුලිතතාවේ තිබේ.

$AD = a$ ∴ $OD = \frac{16a}{9} - a = \frac{7a}{9}$ (05)

අංශුව O හි සිට x දුරක් පහළින් තිබෙන විට

ඉහළ තන්තුවේ ආතතිය T_1' නම

$T_1' = \frac{3mg}{a}\left(\frac{7a}{9} + x\right)$ (10)

පහළ තන්තුවේ ආතතිය $T_2' = \frac{6mg}{a}\left(\frac{2a}{9} - x\right.$

∵ $CO = \frac{2a}{9}$

↓ $F = ma \Rightarrow T_2' + mg - T_1' = m\ddot{x}$ (10

$\frac{6mg}{a}\left(\frac{2a}{9} - x\right) + mg - \frac{3mg}{a}\left(\frac{7a}{9} \ldots\right.$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{9g}{a}x$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{9g}{a}x = 0$$ (05) මගින් සරල අනුවර්තී චලිතය

50

තිබෙන විට අංශුවේ චලිත සමීකරණ දක්වේ. මෙයින් O කේන්ද්‍රය හා කෝණික සංඛ්‍යාතය $3\sqrt{\frac{g}{a}}$ වූ සරල අනුවර්තී චලිතයක් දක්වයි. (05)

දැන් අංශුව C හිදී u ප්‍රවේගයෙන් ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරන්නේ, අංශුව D කරා ළඟාවන පරිදිය. AP = a ඉහළ තන්තුව බුරුල් වන විට හිදී. (05)

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මයෙන්, A හිදී විභව ශක්තිය ශූන්‍ය වේ යැයි ගනිමු.

$$D \text{ හිදී ශක්තිය} = \frac{1}{2}mv^2 - mga + \frac{1}{2}\cdot 6mg\cdot\frac{a^2}{a}$$ (15)

V = 0 විට D කරා අංශුව ළඟාවේ.

$$\therefore D \text{ හිදී ශක්තිය} = 2mga$$ (05)

$$C \text{ හිදී ශක්තිය} = \frac{1}{2}mu^2 - 2mga + \frac{1}{2}3mg\frac{a^2}{a}$$ (15)

$$= \frac{1}{2}m(u^2 - ga)$$ (05)

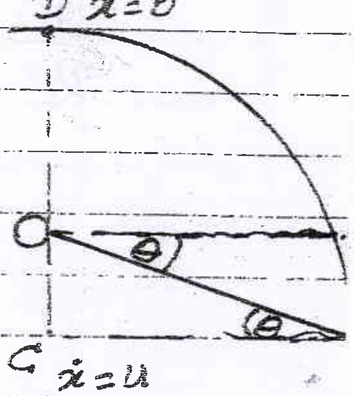
$$\therefore \frac{1}{2}m(u^2 - ga) = 2mga$$

$$u^2 = 5ga$$ (05)

55

∴ ඉහළ තන්තුව නොඇදී පවතින පරිදි u හි අවම අගය $\sqrt{5ga}$ වේ. (05)

මෙම චලිතයේ කේන්ද්‍රය O වන අතර D හිදී ප්‍රවේගය ශූන්‍ය වේ.



∴ චලිතයේ විස්තාරය $OD = \frac{16a}{9} - a$

$$= \frac{7a}{9}$$ (05)

$$OC = a - \frac{7a}{9} = \frac{2a}{9}$$ (05)

එනුයෙන්, $\sin\theta = \frac{2a/9}{7a/9} = 2/7$ (05)

∴ අංශුවේ C සිට D තෙක් චලිතය වීමට ගතවන කාලය $= \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\sqrt{\frac{a}{9g}}$ (05)

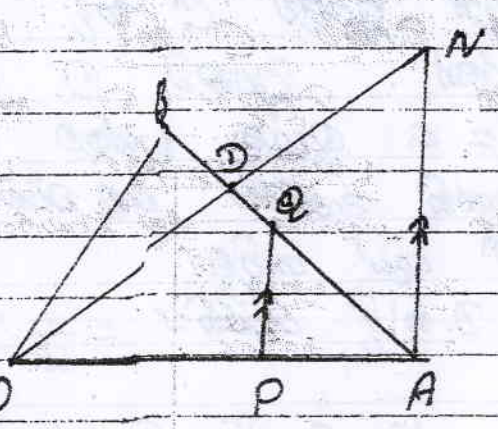
$= \sqrt{\frac{a}{9g}}\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\frac{2}{7}\right)$ (05)

3

150

(14)

(a)



$\vec{OA} = \underset{\sim}{a}$, $\vec{OB} = \underset{\sim}{b}$

$\frac{OP}{PA} = \frac{3}{2}$

$2\vec{OP} = 3\vec{PA}$ (05)

$2\vec{OP} = 3(\vec{PO} + \vec{OA})$

$5\vec{OP} = 3\vec{OA}$

$\therefore \vec{OP} = \frac{3}{5}\vec{OA} = \frac{3}{5}\underset{\sim}{a}$ (05)

10

$\frac{AQ}{QB} = \frac{3}{2}$

$2\vec{AQ} = 3\vec{QB}$ (05)

$2(\vec{AO} + \vec{OQ}) = 3(\vec{QO} + \vec{OB})$

$5\vec{OQ} = 3\vec{OB} + 2\vec{OA}$

$\vec{OQ} = \frac{2}{5}\underset{\sim}{a} + \frac{3}{5}\underset{\sim}{b}$ (05)

10

$\frac{BD}{DA} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4\vec{BD} = \vec{DA}$ (05)

$4(\vec{BO} + \vec{OD}) = \vec{DO} + \vec{OA}$

$5\vec{OD} = \vec{OA} + 4\vec{OB}$

$\vec{OD} = \frac{1}{5}\underset{\sim}{a} + \frac{4}{5}\underset{\sim}{b}$ (05)

O, D, N එක ඒකරේඛීය නිසා, $\vec{ON} = n\vec{OD}$ ...

$\vec{ON} = \frac{n}{5}\underset{\sim}{a} + \frac{4n}{5}\underset{\sim}{b}$ ...

(iii) (c)

AN හා PQ සමාන්තර බවින්,

$\vec{AN} = \mu \vec{PQ}$ නම්.

$\vec{AO} + \vec{ON} = \mu(\vec{PO} + \vec{OQ})$

$\vec{ON} = \mu\left(-\frac{3}{5}\underset{\sim}{a} + \frac{2}{5}\underset{\sim}{a} + \frac{3}{5}\underset{\sim}{b}\right) + \underset{\sim}{a}$

$\vec{ON} = \frac{(1-\mu)}{5}\underset{\sim}{a} + \frac{3\mu}{5}\underset{\sim}{b}$ —— (2) (05)

(1) හා (2) න්,

$\frac{(1-\mu)}{5}\underset{\sim}{a} + \frac{3\mu}{5}\underset{\sim}{b} = \frac{\eta}{5}\underset{\sim}{a} + \frac{4\eta}{5}\underset{\sim}{b}$ (05)

$\frac{1-\mu}{5} = \frac{\eta}{5}$; $\frac{3\mu}{5} = \frac{4\eta}{5}$

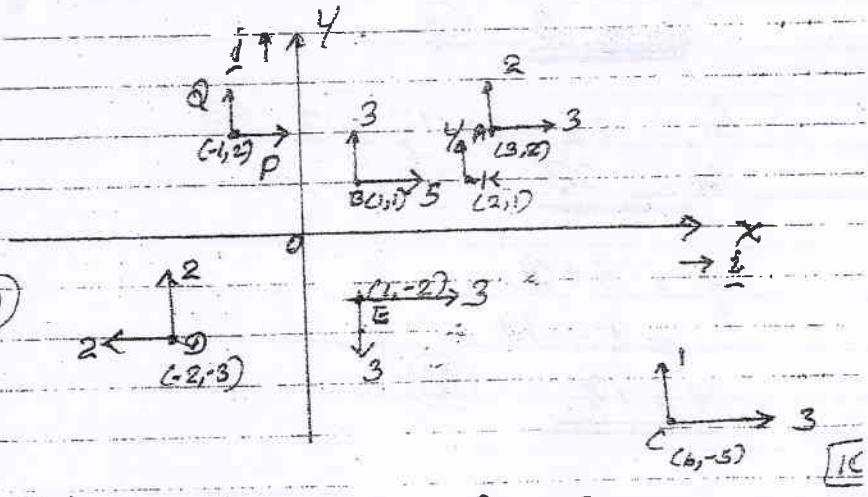
$\eta + \mu = 5$ (05) $3\mu - 4\eta = 0$ (05)

$7\mu = 20$

$\mu = \frac{20}{7}$ (05) $\therefore \eta = \frac{15}{7}$ (05)

$\therefore \vec{ON} = \frac{3}{7}\underset{\sim}{a} + \frac{12}{7}\underset{\sim}{b}$ (05) 50

(b)



10

15

වම පද්ධතියේ සම්පුයුක්ත බලය $\underset{\sim}{R}$ නම්,

$\underset{\sim}{R} = (3+5+3+3-2+P)\underset{\sim}{i} + (2+3-3+1+$

(05)

$\underline{R} = (12+P)\underline{i} + (5+Q)\underline{j}$ (05)

O ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$M = (2\times3 - 3\times2) + (3\times1 - 5\times1) + (1\times6 + 3\times5)$
$+ (-3\times1 + 3\times2) - (2\times2 + 2\times3) - (P\times2 + Q\times1)$ (05)

$M = 12 - 2P - Q$ (05)

(i) පද්ධතිය G ඝූර්ණය ඇති යුග්මයකට තුල්‍ය වේ නම්,
$\underline{R} = \underline{0}$ හා $G = M$ වේ. (05)
එනම්, $12 + P = 0$, $\underline{P = -12}$ (05)
$5 + Q = 0$, $\underline{Q = -5}$ (05) [35]

(ii) $K \equiv (2,1)$ හි $y\underline{j}$ වූ තනි බලයකට තුල්‍ය වේ නම්,
$\therefore y = 5 + Q$ (05), $x = 12 + P = 0$ (05)
$\therefore \underline{\underline{P = -12}}$

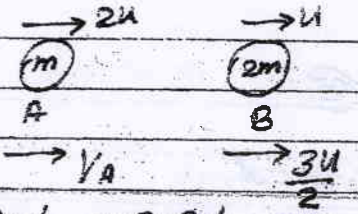
බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ ඝූර්ණය
O $2y = 12 - (2\times-12 + Q)$ (05)
$2(5+Q) = 36 - Q$
$3Q = 26$
$\underline{\underline{Q = 13}}$ (05)

$\therefore G = 12 - 2\times-12 - 13$ (05)
$\underline{\underline{G = 23}}$. (05)

$y = 5 + Q$
$= 5 + 13$
$\underline{\underline{y = 18}}$ (05) [35]

[150]

(15) (a)



(i) A හා B අතර ගැටුමෙන් පසු A හි ප්‍රවේගය V_A නම්, රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයෙන්,

$$\overrightarrow{m V_A + 2m \times \frac{3u}{2}} = m \cdot 2u + 2m \cdot u \quad (10)$$

$$\therefore \overrightarrow{V_A} = u \quad (05)$$

නිව්ටන් ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන්

$$\frac{u - 3u/2}{2u - u} = -e \quad (10)$$

$$e = \frac{1}{2} \quad (05)$$

A හා B අතර ගැටුම සඳහා ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $= \frac{1}{2}$ [30]

(ii) ගැටුම නිසා සිදුවන චාලක ශක්ති හානිය ΔKE නම්,

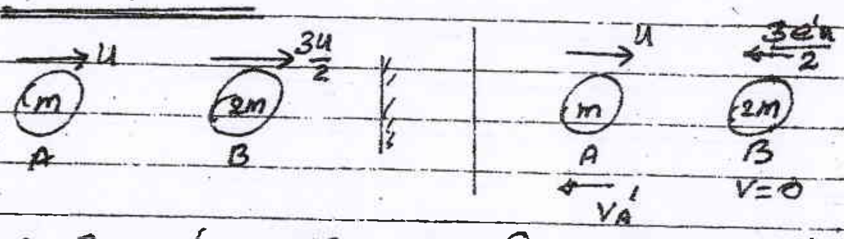
$$\Delta KE = \frac{1}{2}\left[m(2u)^2 + 2m(u)^2 - m(u^2) - 2m\left(\frac{3u}{2}\right)^2\right] \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} m u^2 \left(4 + 2 - 1 - \frac{9}{2}\right)$$

$$\Delta KE = \frac{1}{4} m u^2 \quad (05)$$

[15]

(iii)



බිත්තිය හා B අතර ගැටුමේ ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e' නම්, B පොළා යන ප්‍රවේගය $= \overleftarrow{\frac{3e'u}{2}}$ වේ. (නිව් - ප්‍රත්‍ය: නි:) (05)

පසුව ඇතිවන සංඝට්ටනය සඳහා රේඛීය ගම්‍යතා සංස්: මූල:

$$\leftarrow \quad 2m \times \frac{3e'u}{2} - mu = 0 + m V_A' \quad (10)$$

$\therefore \overleftarrow{V_A'} = (3e-1)u$ (05)

නිව්ටන් ගේ ගුණාංගී නියමයෙන්,

$$\frac{V_A - 0}{-u - \frac{3eu}{2}} = -\frac{1}{2}$$ (10)

$$2V_A' = u + \frac{3eu}{2}$$

$$2(3e-1)u = \frac{1}{2}(2u + 3eu)$$

$$12e' = 3e' + 6$$

$$9e' = 6$$

$$e' = \frac{2}{3}$$ (05)

$\therefore$ B බෝලය හා බිත්තිය අතර ගැටුම සඳහා ගුණාංගී සංගුණකය $= \frac{2}{3}$ (35)

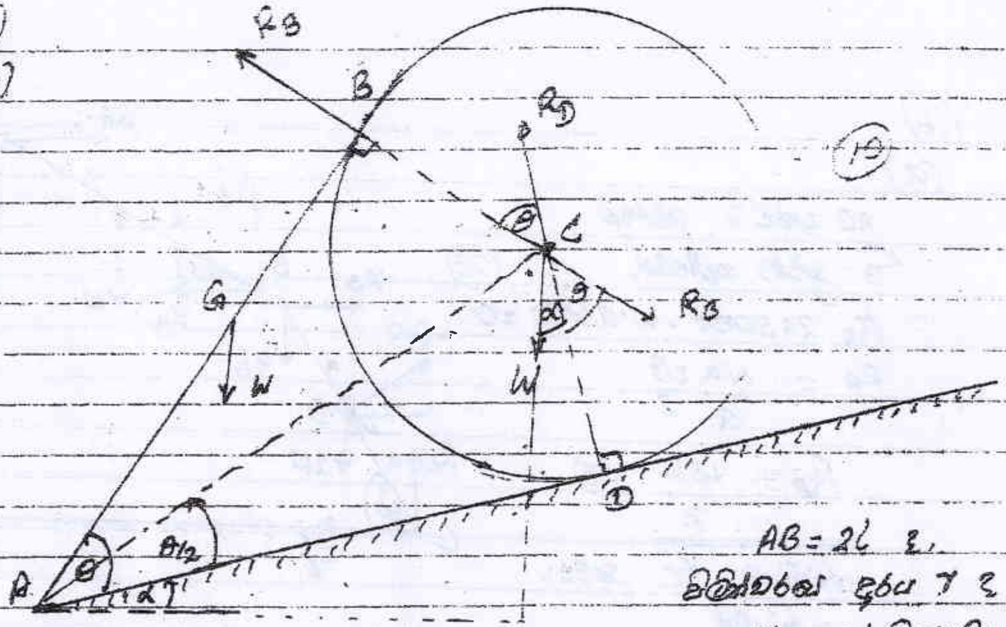
(iv) A බෝලයේ දිශාව ප්‍රවේගය $\overleftarrow{V_A'} = (3 \times \frac{2}{3} - 1)$

$= u$ (05)

(10)

(15)

(b)



(10)

AB = 2l ද,
සිලින්ඩරයේ අරය r ද නම්,
$r = 2l \tan \theta/2$

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්, (දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණ)

$R_B \cdot 2l = W \cdot l \cos(\theta+\alpha)$ (10)

$\therefore R_B = \frac{W}{2}\cos(\theta+\alpha)$ ——— ① (05)

C හි බල සඳහා ලාමී ප්‍රමේය යෙදීමෙන්,

$\frac{R_D}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{W}{\sin(180-\theta)} = \frac{R_B}{\sin(180-\alpha)}$ (10)

$R_B = \frac{W\sin\alpha}{\sin\theta}$ ——— ② (05)

$\therefore$ ① හා ② න්, $\frac{W}{2}\cos(\theta+\alpha) = \frac{W\sin\alpha}{\sin\theta}$ (05)

$\cos(\theta+\alpha)\sin\theta = 2\sin\alpha$

$\cos\theta\cos\alpha\sin\theta - \sin^2\theta\sin\alpha = 2\sin\alpha$

$\sin\alpha(2+\sin^2\theta) = \cos\theta\cos\alpha\sin\theta$

$\tan\alpha = \frac{\cos\theta\sin\theta}{2+\sin^2\theta}$ (05)

$\tan\alpha = \frac{\sin 2\theta}{4+(1-\cos 2\theta)}$ (05)

$\therefore \tan\alpha = \frac{\sin 2\theta}{5-\cos 2\theta}$ (05)

6

(16)

(a)

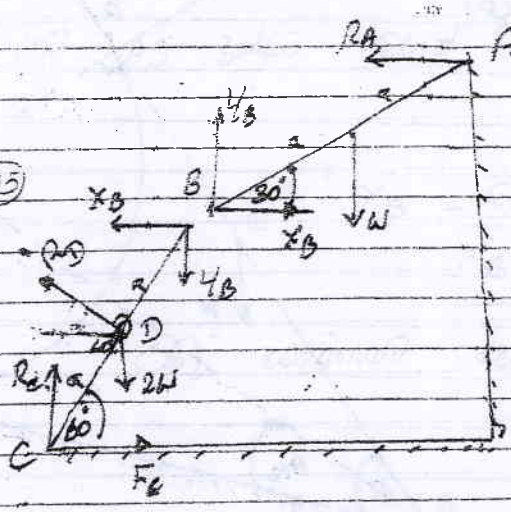
AB දණ්ඩට ලම්බව ක්‍රියාකරන

B වටා සූර්ණ ගනිමු, (05)

$R_A \cdot 2a\sin 30 - W \cdot a\cos 30 = 0$

$R_A = \frac{Wa \times \sqrt{3}}{a \quad 2}$

$R_A = \frac{\sqrt{3}W}{2}$ (05)



(10) (10) 20

ඉදිරියනිවැරදි, C වටා සූර්ණ ගනිමු

(i) $R_D(2a\sin 60 + 2a\sin 30) + R_D \cdot a - W(2a\cos 60 + a\cos 30) - 2W \cdot a\cos 60 = 0$ (10)

$\frac{\sqrt{3}W}{2} \times 2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + R_D \times a - Wa\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2Wa \times \frac{1}{2} = 0$

$R_D = W\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right] + W - \frac{\sqrt{3}W}{2}(\sqrt{3}+1)$

$= \frac{W}{2}(2+\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3})$

$R_D = \frac{W}{2}$ (05) (මුලුම නිවැරදි ඉහතින්ම ලකුණු 15)

(ii) ඉදිරියනිවැරදි $\longrightarrow$ $F_C - R_A - R_D\sin 60 = 0$ (05)

$F_C = \frac{\sqrt{3}W}{2} + \frac{W}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_C = \frac{3\sqrt{3}W}{4}$ (05)

$\uparrow$ $R_C + R_D\cos 60 - 2W - W = 0$ (05)

$R_C = 3W - \frac{W}{4}$

$R_C = \frac{11W}{4}$ (05) 20

(iii) AB දණ්ඩට සලකන්න, $\uparrow \; Y_B - W = 0$

$$\underline{Y_B = W} \quad (05)$$

$\rightarrow$

$$X_B - R_A = 0$$

$$\underline{X_B = \frac{\sqrt{3}W}{2}} \quad (05) \qquad 10$$

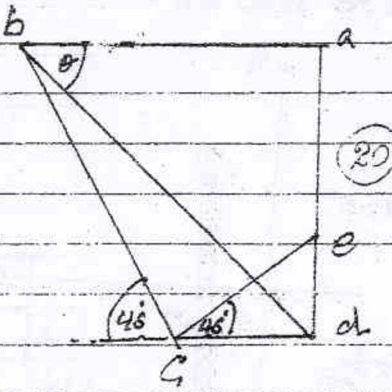
C හිදී සමතුලිතතාව සඳහා විට, $F_C \leq \mu R_C$ (05)

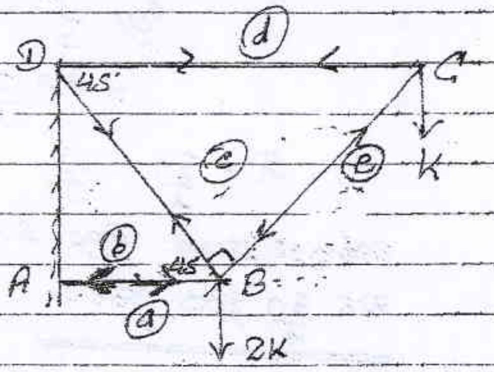
$$\frac{3\sqrt{3}W}{4} \leq \mu \times \frac{11W}{4}$$

$$\therefore \mu \geq \frac{3\sqrt{3}}{11} \quad (05)$$

∴ C හි ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{3\sqrt{3}}{11}$ ට වඩා කුඩා විය නොහැක. (05) 15

(b)





දණ්ඩ	තෙරපුම	ආතති
AB (ba)	4 kN	–
BC (ec)	$\sqrt{2}$ kN	–
BD (bc)	–	$3\sqrt{2}$ kN
CD (cd)	–	1 kN

5×8 (40)

A හි ප්‍රතික්‍රියාව ba මගින් දැක්වේ. ∴ A හි ප්‍රතික්‍රියාව = 4 kN

D හි ප්‍රතික්‍රියාව bd මගින් දැක්වේ. එය $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ kN (5)

79 $\theta = \tan^{-1} 3/4$.

(17)

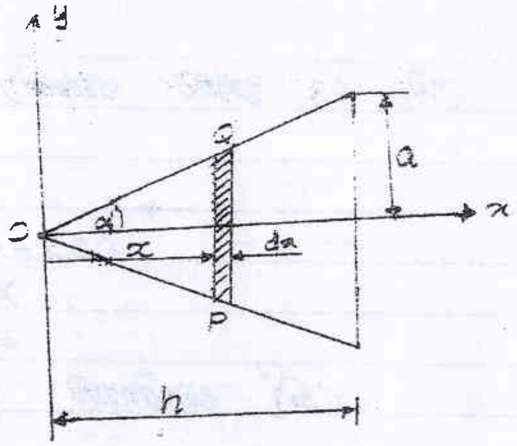
PQ ආස්තරයේ ස්කන්ධය = $\pi (x \tan\alpha)^2 dx \rho$

(ρ ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වයයි)

$\tan\alpha = a/h$

∴ කේතුවේ ස්කන්ධය

$= \int_0^h \pi \rho \tan^2\alpha \, x^2 dx$ (05)



$= \pi \rho \frac{a^2}{h^2} \left[x^3/3 \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi a^2 h \rho$ (05)

කේතුව Ox වටා සමමිතික නිසා එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට

Ox මත $\bar{x}$ දුරින් පිහිටයි. (05)

$\bar{x} \cdot \frac{1}{3} \pi a^2 h \rho = \int_0^h \pi \rho \tan^2\alpha \, x^2 \cdot x \, dx = \pi \rho \tan^2\alpha \int_0^h x^3 dx$ (05) (05)

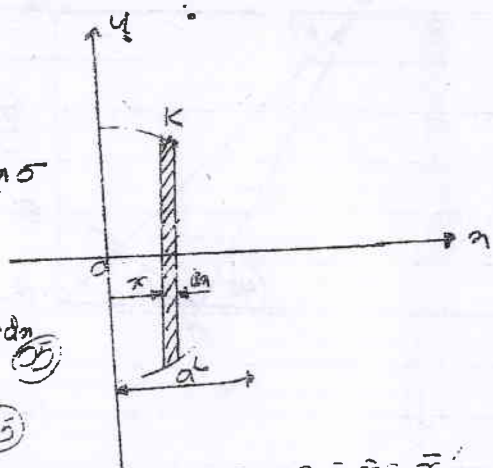
$= \pi \rho \frac{a^2}{h^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^h = \frac{\pi \rho a^2 h^2}{4}$ (05)

∴ $\bar{x} = \frac{3h}{4}$ (05)

35

කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිතික අක්ෂය මත ශීර්ෂයේ

සිට $\frac{3h}{4}$ දුරින් පිහිටයි.



KL ආස්තරයේ ස්කන්ධය = $\pi (a^2 - x^2) dx \sigma$

σ - අර්ධගෝලයේ ඝනත්වය

∴ අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධය $= \int_0^a \pi (a^2 - x^2) \sigma dx$ (05)

$= \pi \sigma \left[a^2 x - x^3/3 \right]_0^a = \frac{2}{3} \pi a^3 \sigma$ (05)

අර්ධ ගෝලයේ ... Ox වටා සමමිතික බැවින් Ox ... මත O සිට $\bar{x}$

දුරින් එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය පිහිටයි. (05)

∴ $\bar{x} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 \sigma = \int_0^a \pi (a^2 - x^2) \sigma x \, dx = \pi \sigma \left[\frac{x^2}{2} a^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \pi \sigma \frac{a^4}{4}$ (05) (05)

∴ $\bar{x} = \frac{3}{8} a$ (05), අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{3}{8} a$ දුරින්

C ශංකුවේ පරිමාව $= \frac{1}{3}\pi a^2(3a) = \pi a^3$

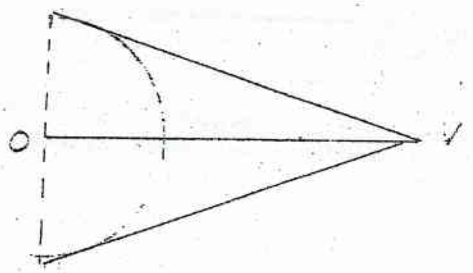
ඒකක ඝනත්වය ලෙස ස්කන්ධය ලෙස $M = \rho\pi a^3$

H අර්ධගෝලයේ පරිමාව $= \frac{2}{3}\pi a^3$

අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධය $= \frac{2}{3}M$. (05)

R හා H එකතු, ශංකුව C අක්ෂය වටා සමමිතික නිසා, ඒවා සංහති කේන්ද්‍ර අක්ෂය මතය පිහිටයි.

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට (C සිට)
ශංකුව C	M (05)	$3a/4$ (05)
අර්ධ ගෝලය H	$\frac{2}{3}M$ (05)	$\frac{3}{8}a$ (05)
R වස්තුව	$(M-\frac{2}{3}M) = M/3$ (05)	$\bar{x}''$

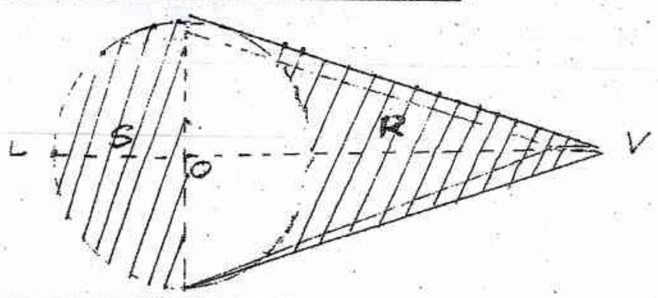


(ii) $\frac{M}{3}\bar{x}'' = M\cdot\frac{3a}{4} - \frac{2}{3}M\cdot\frac{3}{8}a = M\frac{a}{2}$ (05)

$\bar{x}'' = \frac{3a}{2}$

R වස්තුවේ ස්කන්ධය $M/3$ හා එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත C සිට $\frac{3a}{2}$ දුරින් පිහිටයි. (05)

[40]



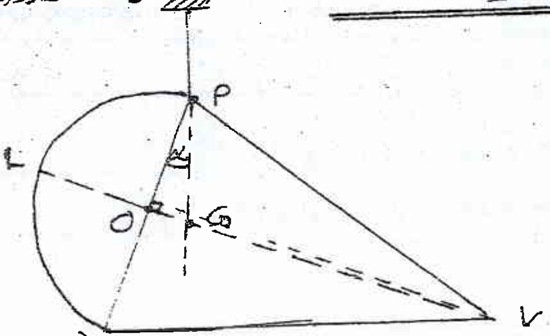
වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය L සිට
R	$M/3$ (05)	$a + 3a/2 = 5a/2$
H	$2M/3$ (05)	$5a/8$
S	M	$\bar{x}'''$

S සංයුක්ත වස්තුව LY වට සමමිතික නිසා එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය L සිට $\bar{x}''$ දුරින් පිහිටයි

$L\circlearrowleft \quad M\bar{x}'' = \frac{M}{3}\cdot\frac{5a}{2} + \frac{2M}{3}\cdot\frac{5a}{8} = \frac{M}{6}\cdot 5a$ (10)

$\bar{x}'' = \frac{5a}{2}$ (05)

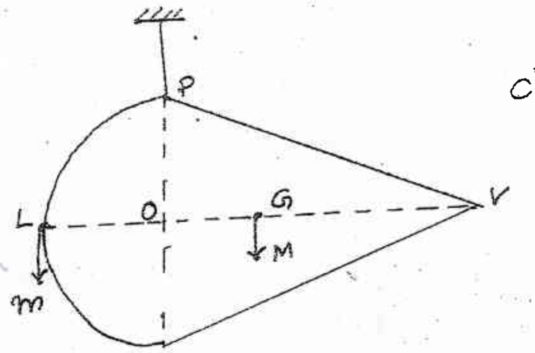
S සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය LY මත L සිට $\frac{5a}{2}$ දුරින් පිහිටයි [25]



(i) $\tan\alpha = \frac{OG}{PO} = \frac{(5a/2 - a)}{a} = 3/2$ (05)

∴ සමමිතික අක්ෂය සිරස සමග සාදන කෝණය $\cot^{-1} 3/2$ කි වේ. (05) [10]

(ii)



$C\circlearrowleft \quad m\cdot a = M\cdot\frac{3}{2}a$

$m = \frac{3M}{2}$ (05)

[25]

සමමිතික අක්ෂය තිරස් වන පරිදි L හි ඇලවිය යුතු ස්කන්ධය $\frac{3M}{2}$ වේ.

[150]