සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි.

රහස්‍ය ලේඛනයකි.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2017

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
ප්‍රධාන/ සහකාර පරීක්ෂක රැස්වීමේ දී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2017

10 - සංයුක්ත ගණිතය

ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

A කොටස	10 x 25	=	250
B කොටස	05 x 150	=	750

එකතුව = **1000/10**

I පත්‍රය සඳහා අවසාන ලකුණු = **100**

5. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\lim_{x \to \alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan \alpha} = 3\alpha^2 \cos^2 \alpha$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan \alpha} = \lim_{x \to \alpha} \frac{(x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$ 5

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{(x-\alpha)\cos x \cos \alpha \cdot (x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha}$$ 5

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)} \cdot \cos x \cos \alpha \cdot (x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$ 5

5

$$= 1 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (3\alpha^2)$$

$$= 3\alpha^2 \cos^2 \alpha .$$ 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 1

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan \alpha} = \lim_{x \to \alpha} \frac{(x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{\tan(x-\alpha)(1 + \tan x \tan \alpha)}$$ 5 $\left(\because \tan(x-\alpha) = \frac{\tan x - \tan \alpha)}{1 + \tan x \tan \alpha)} \right)$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{x-\alpha}{\tan(x-\alpha)} \cdot \frac{x^2 + \alpha x + \alpha^2}{(1 + \tan x \tan \alpha)}$$ 5

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)} \cdot \frac{\cos(x-\alpha) \cdot (x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{(1 + \tan x \tan \alpha)}$$

5

$$= 1 \cdot \frac{1 \cdot 3\alpha^2}{1 + \tan^2 \alpha}$$ 5

$$= \frac{3\alpha^2}{\sec^2 \alpha} = 3\alpha^2 \cos^2 \alpha .$$ 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{\tan x-\tan\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad 5$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\frac{\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha}{\cos x\cos\alpha}} \quad 5$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{(x-\alpha)}{\sin(x-\alpha)}\cdot\cos x\cos\alpha \quad 5$$

$$=3\alpha^2\cdot 1\cdot\cos^2\alpha$$

5

$$=3\alpha^2\cos^2\alpha. \quad 5$$

25

6. $0<a<b$ යැයි ගනිමු. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right)=-\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}$ බව පෙන්වන්න.

එ නයින්, $\int\frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}\,dx$ සොයන්න.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(b-a)}{b}\cos^2 x}}\times\sqrt{\frac{b-a}{b}}\times(-\sin x) \quad 5 + 5$$

$$=-\frac{\sin x}{\sqrt{b-b\cos^2 x+a\cos^2 x}}\times\sqrt{b-a}$$

$$=-\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}} \quad 5$$

$$\therefore\int-\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}\,dx=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right)+\text{නියතය} \quad 5$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) + C,$$ මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$y = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\sin y = \sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x$ හා $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

$$\cos y \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-a}{b}}(-\sin x) \text{------------- (1)}$$ 5

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{b-a}{b}\cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\frac{b(1-\cos^2 x) + a\cos^2 x}{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}{\sqrt{b}}$$ 5

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}.$$ 5

පෙර මෙන් අනුකලනය 10

25

7. C වක්‍රයක්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx} = -\cot^3\theta$ බව පෙන්වන්න.
ස්පර්ශ රේඛාවේ අනුක්‍රමණය -1 වන පරිදි C වක්‍රය මත වූ P ලක්ෂ්‍යයෙහි බණ්ඩාංක සොයන්න.

$x = 3\cos\theta - \cos^3\theta \qquad y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta; \quad \frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$

5 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{3\cos\theta(1-\sin^2\theta)}{-3\sin\theta(1-\cos^2\theta)} = -\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta} = -\cot^3\theta.$$ 5

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow \cot\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$ 5

$$P \equiv \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \equiv \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{2\sqrt{2}}\right).$$ 5

25

---

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $3x - 4y = 2$ හා $4x - 3y = 1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.
(i) l_1 හා l_2 අතර කෝණවල සමච්ඡේදකයන්හි සමීකරණ ලියා දක්වන්න.
(ii) l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

සමච්ඡේදක,

$$\frac{3x-4y-2}{5} = \pm\frac{4x-3y-1}{5}$$ 5

මගින් දෙනු ලැබේ.

$x + y + 1 = 0$ හෝ $7x - 7y - 3 = 0$ 5

l_1 හා $x + y + 1 = 0$ අතර සුළු කෝණය α ලෙස ගන්න.

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{3}{4}}\right|$$ 5

$= 7 > 1.$ 5

$\therefore 7x - 7y - 3 = 0$ යනු l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමීකරණය වේ. 5

25

9. S යනු $x^2+y^2-4=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය යැයි ද l යනු $y=x+1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ද ගනිමු. S හා l හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නා වූ ද S වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන්නා වූ ද වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x^2+y^2-4)+\lambda(y-x-1)=0$ ආකාර වේ.; මෙහි $\lambda\in\mathbb{R}$.

i.e. $x^2+y^2-\lambda x+\lambda y-\lambda-4=0.$ 10

මෙය S ට ප්‍රලම්බ නම්, $g=0; f=0; c=-4; g'=-\dfrac{\lambda}{2}; f'=\dfrac{\lambda}{2}; c'=-\lambda-4,$ සමගින්

$2gg'+2ff'=c+c'$ විය යුතුයි. 5

i.e. $0=-\lambda-8$

$\therefore \lambda=-8.$ 5

$\therefore$ පිළිතුර $x^2+y^2+8x-8y+4=0$ වේ. 5

25

---

10. $-\pi<\theta\le\pi$ සඳහා $\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2=1+\sin\theta$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\cos\dfrac{\pi}{12}+\sin\dfrac{\pi}{12}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ බව පෙන්වා $\cos\dfrac{\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}$ හි අගය ද සොයන්න. $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}$$

5

$$=1+\sin\theta \quad \left(\because \sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1 \text{ and } 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta.\right)$$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ යැයි ගනිමු. 5

එවිට $\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^2=1+\dfrac{1}{2}.$

$\therefore \sin\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ------------- (1) 5 $\left(\because \sin\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}>0\right)$

$\theta=\dfrac{-\pi}{6}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

$\therefore \cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ------------- (2) ($\because \sin\frac{\pi}{12} < \cos\frac{\pi}{12}$) 5

$(1)-(2) \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$ 5

25

B කොටස

11. (a) $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙන බව දී ඇත. $a^2 > 3b$ බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ ද b ඇසුරෙන් $\alpha\beta$ ද ලියා දක්වන්න.

$|\alpha - \beta| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$ බව පෙන්වන්න.

$|\alpha + \beta|$ හා $|\alpha - \beta|$ ස්වකීය මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය

$9x^2 - 6\left(|a| + \sqrt{a^2 - 3b}\right)x + 4\sqrt{a^4 - 3a^2b} = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(b) $g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-1)(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $3x+2$ වේ. $(x-1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -4 බව පෙන්වන්න.

p හා q හි අගයන් සොයා $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

5

(a) විවේචකය $\Delta = (2a)^2 - 4(3)(b)$

$= 4(a^2 - 3b)$. 5

$f(x) = 0$ ට තාත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති නිසා, $\Delta > 0$ විය යුතුයි. 5

$\therefore\ a^2 > 3b$. 5

$\boxed{20}$

$\alpha + \beta = -\frac{2a}{3}$ හා $\alpha\beta = \frac{b}{3}$.

5 5

$\boxed{10}$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 10

$= \frac{4a^2}{9} - \frac{4b}{3}$ 5

$= \frac{4}{9}(a^2 - 3b)$. 5

$\therefore \; |\alpha - \beta| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$. 5

25

$\alpha' = |\alpha + \beta|$ හා $\beta' = |\alpha - \beta|$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha' = \frac{2}{3}|a|$ හා $\beta' = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$.

5

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x - \alpha')(x - \beta') = 0$ වේ. 5

i.e. $x^2 - (\alpha' + \beta')x + \alpha'\beta' = 0$. 5

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{2}{3}|a| + \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}\right)x + \frac{4}{9}|a|\sqrt{a^2 - 3b} = 0.$

5 5

$\Rightarrow 9x^2 - 6\left(|a| + \sqrt{a^2 - 3b}\right)x + 4\sqrt{a^4 - 3a^2 b} = 0$. 5

30

(b) $g(x)$ යන්න $(x-1)(x+2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $3x+2$ වන නිසා ,

$g(x) = h(x)(x-1)(x+2) + 3x + 2$, ------------ (1) 10

මෙහි $h(x)$ මාත්‍රය 1 වන බහුපදයකි.

ශේෂ ප්‍රමේයය මගින් $g(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(1)$ වේ.

5

$(1) \Rightarrow g(1) = 5$. 5

එනයින් , $g(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය 5 වේ.

නැවතත්, ශේෂ ප්‍රමේයය මගින් $g(x)$ යන්න $(x+2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(-2)$ වේ. 5

$(1) \Rightarrow g(-2) = -4.$ 5

එනයින් , $g(x)$ යන්න $(x+2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය -4 වේ.

$\boxed{30}$

$g(1) = 5 \Rightarrow 1 + p + q + 1 = 5$ 5

$p + q = 3$

$g(-2) = -4 \Rightarrow -8 + 4p - 2q + 1 = -4$ 5

$4p - 2q = 3$

$p = \frac{3}{2}$ හා $q = \frac{3}{2}.$

5 5

$\boxed{20}$

---

5 5

දැන් $g(-1) = -1 + p - q + 1 = 0. (\because p = q)$

එමනිසා සාධක ප්‍රමේයය මගින් , $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. 5 $\boxed{15}$

---

12. (*a*) x හි ආරෝහණ බල වලින් $(5+2x)^{14}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

$r=0,1,2,\ldots,14$ සඳහා ඉහත ප්‍රසාරණයේ x^r අඩංගු පදය T_r යැයි ගනිමු.

$x \neq 0$ සඳහා $\dfrac{T_{r+1}}{T_r}=\dfrac{2(14-r)}{5(r+1)}x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $x=\dfrac{4}{3}$ වන විට, ඉහත ප්‍රසාරණයෙහි විශාලතම පදය ලබාදෙන r හි අගය සොයන්න.

(*b*) $c \geq 0$ යැයි ගනිමු. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{2}{(r+c)(r+c+2)}=\dfrac{1}{(r+c)}-\dfrac{1}{(r+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{2}{(r+c)(r+c+2)}=\frac{(3+2c)}{(1+c)(2+c)}-\frac{1}{(n+c+1)}-\frac{1}{(n+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{(r+c)(r+c+2)}$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

c සඳහා සුදුසු අගයන් සහිත ව මෙම ඓක්‍යය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+2)}=\frac{1}{3}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+1)(r+3)}$ බව පෙන්වන්න.

(a) $\displaystyle (5+2x)^{14}=\sum_{r=0}^{14}{}^{14}C_r 5^{14-r}(2x)^r$ 10

$\displaystyle =\sum_{r=0}^{14}{}^{14}C_r 5^{14-r}\cdot 2^r\cdot x^r$, මෙහි $r=0,1,\ldots,14$ සඳහා ${}^{14}C_r=\dfrac{14!}{r!(14-r)!}$.

5 $\boxed{15}$

$r=0,1,\ldots,14$ සඳහා $T_r={}^{14}C_r 5^{14-r}\cdot 2^r\cdot x^r$ යැයි ගන්න.

එවිට $\dfrac{T_{r+1}}{T_r}=\dfrac{14!\;5^{13-r}\;2^{r+1}}{(r+1)!(13-r)!}x^{r+1}\Big/\dfrac{14!\;5^{14-r}\;2^r}{r!(14-r)!}x^r$ 5

10

$=\dfrac{2(14-r)}{5(r+1)}x$ 5 $\boxed{20}$

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$ බව දී ඇත; මෙහි $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ මගින් $\mathbf{B}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ. $a = 1$ හා $b = -1$ බව පෙන්වා, a හා b සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ සොයන්න.

$\mathbf{P}^{-1}$ ලියා දක්වා, එය භාවිතයෙන්, $\mathbf{PQ} = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{Q}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වූ ඒකක න්‍යාසයයි.

(*b*) ආගන්ඩ් සටහනක, $|z| = 1$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථය වූ C හි දළ සටහනක් අඳින්න.

$z_0 = a(\cos\theta + i\sin\theta)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ. $\frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය a ඇසුරෙන් ද ප්‍රධාන විස්තාරය θ ඇසුරෙන් ද සොයන්න.

P, Q, R හා S යනු පිළිවෙළින් z_0, $\frac{1}{z_0}$, $z_0 + \frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ඉහත ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යය ඉහත C මත පිහිටන විට

(i) Q හා S ලක්ෂ්‍ය ද C මත පිහිටන බවත්

(ii) R ලක්ෂ්‍යය තාත්ත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටන බවත්

පෙන්වන්න.

(a) $$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$ 5

$$= \begin{pmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{pmatrix}$$ 10

$$AB^T = P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ 5

$$\Leftrightarrow \quad 2+2a=4, \quad 2+ab=1, \quad -1+2a-b=2, \quad -1+b^2=0.$$ 10

$$\Leftrightarrow \quad a=1, \quad b=-1.$$ 5

දැන්, $B^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 5

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$ 5

45

$P^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$ 10

තවද $PQ = P^2 + 2I \Leftrightarrow P^{-1}(PQ) = P^{-1}(P^2 + 2I)$ 5

$\Leftrightarrow Q = P^{-1}P^2 + P^{-1}(2I)$ 5

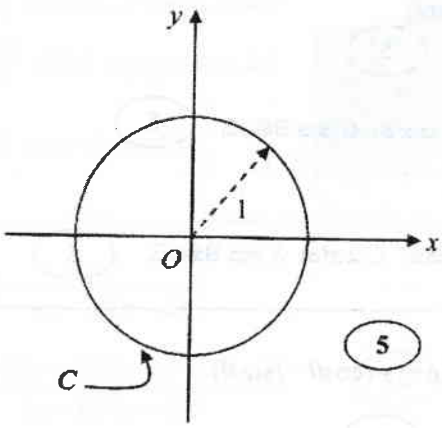
$\Leftrightarrow Q = P + 2P^{-1}$ 5

$\Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ 5

$\therefore Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$ 5

35

(b)



5

5

$$= \frac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2} \;, \quad (x \neq 1, 2 \text{ සඳහා}) \quad 5$$

20

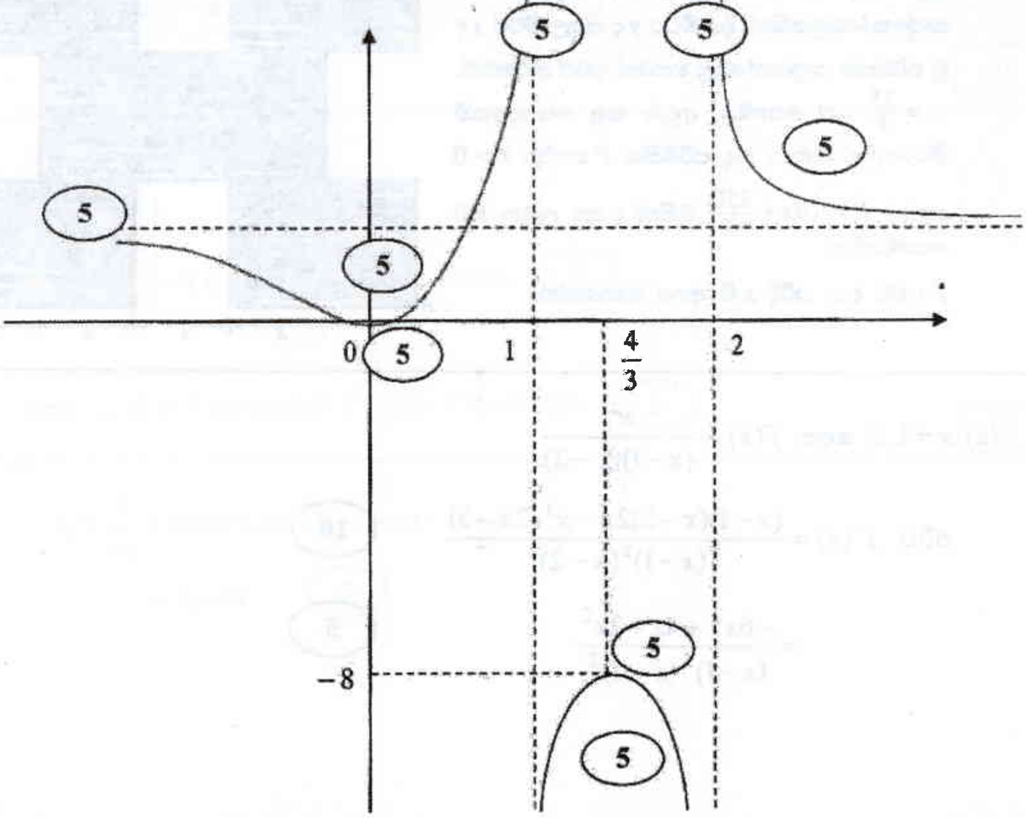
තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$. එනයින් එය $y=1$ වේ.

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\infty$ හා $\lim_{x\to 1+} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to 2-} f(x)=-\infty$ හා $\lim_{x\to 2+} f(x)=\infty$.

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ: $x=1, 2$

$f'(x)=0 \iff x=0$ or $x=\frac{4}{3}$. 5

	$-\infty<x<0$	$0<x<1$	$1<x<\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}<x<2$	$2<x<\infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	(+)	(-)	(-)
	5	5	5	5	5



හැරුම් ලක්ෂ දෙකක් පවතී ∴ (0,0) - ස්ථානීය අවමයක් $\left(\frac{4}{3},-8\right)$ - ස්ථානීය උපරිමයක්

5 $x=0$ or $2<x<2$ 5 $\boxed{70}$

(b) වර්ගඵලය : $(5x)(3y)-4xy=3$ 5

$11xy=385$

$xy=35$

$y=\frac{35}{x}.$ 5

පරිධිය: $P=2(5x+3y)+4x+4y$ 5

$=14x+10y$

$=14x+\frac{350}{x};\quad x>0.$ 5

$\frac{dP}{dx}=14-\frac{350}{x^2}$ 5

$\frac{dP}{dx}=0\Leftrightarrow x^2=\frac{350}{14}=25$

5

$\therefore x=5$ 5

$0<x<5$ සඳහා $\frac{dP}{dx}<0$ හා $5<x$ සඳහා $\frac{dP}{dx}>0$ වේ.

5 5

$x=5$ වන විට P අවමයක් වේ. 5 $\boxed{50}$

---

15. (a) (i) $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, ඒ නයින්, $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int xe^{-x}\,dx$ සොයා, ඒ නයින්, $y = xe^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද $x = 1$, $x = 2$ හා $y = 0$ සරල රේඛාවලින් ද ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(b) $c > 0$ හා $I = \displaystyle\int_0^c \frac{\ln(c+x)}{c^2+x^2}\,dx$ යැයි ගනිමු. $x = c\tan\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන්,

$I = \dfrac{\pi}{4c}\ln c + \dfrac{1}{c}J$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta$ වේ.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$ බව පෙන්වන්න.

$I = \dfrac{\pi}{8c}\ln(2c^2)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(i) $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$ 10

$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$

$1 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$x^0 : 1 = A$

$x^1 : 0 = 2A+B+C$ 10

$x^2 : 0 = A+B$

$\therefore\ A=1, B=-1 \text{ and } C=-1.$ 10

$\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx$ 5

15 $= \ln|x| - \ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1} + C'$, මෙහි C' යනු අභිමත නියතයකි.

50

(ii) $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$ 10

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C''$, මෙහි C'' යනු අභිමත නියතයකි. 5

5

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_1^2 xe^{-x}\,dx$ 5

$= -(x+1)e^{-x}\Big|_1^2$ 5

$= 2e^{-1} - 3e^{-2}.$ 5

35

(b) $x = c\tan\theta$ යැයි ගනිමු.

එවිට $dx = c\sec^2\theta\, d\theta.$

$x = 0$ වනවිට $\theta = 0$ වන අතර $x = c,$ වනවිට $\theta = \frac{\pi}{4}$ වේ.

5

එවිට , $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2 + c^2\tan^2\theta} \cdot c\sec^2\theta\, d\theta$ 5 5

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2\sec^2\theta} \cdot c\sec^2\theta\, d\theta$ 5

$= \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln c + \ln(1+\tan\theta)\}\, d\theta$ 5

$= \frac{1}{c}\ln c \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta + \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\{1+\tan\theta\}\, d\theta$

$= \frac{1}{c}\ln c \cdot \theta \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{c}J$ 5

$$= \frac{\pi}{4c} \ln c + \frac{1}{c} J \,. \quad 5$$

35

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right) d\theta \quad 5$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left\{1 + \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}\right\} d\theta \quad 5$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{2}{(1 + \tan\theta)} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln 2 - \ln(1 + \tan\theta)\} d\theta \quad 5$$

$$= \ln 2 \cdot \frac{\pi}{4} - J$$

$$\therefore J = \frac{\pi}{8} \ln 2 \,. \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4c} \ln c + \frac{1}{c} \frac{\pi}{8} \ln 2 \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{8c} \{2 \ln c + \ln 2\}$$

$$= \frac{\pi}{8c} \ln(2c^2) \,. \quad 5$$

30

---

16. $m \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $P \equiv (0,1)$ ලක්ෂ්‍යය $y = mx$ මගින් දෙනු ලබන l සරල රේඛාව මත නොපිහිටන බව පෙන්වන්න.

l ට ලම්බව P හරහා වූ සරල රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(-mt, t+1)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

ඒ නයින්, P සිට l ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය වූ Q ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක $\left(\dfrac{m}{1+m^2}, \dfrac{m^2}{1+m^2}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

m විචලනය වන විට, Q ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - y = 0$ මගින් දෙනු ලබන S වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, Q හි පථයේ දළ සටහනක් xy-තලයෙහි අඳින්න.

තව ද $R \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ ලක්ෂ්‍යය S මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

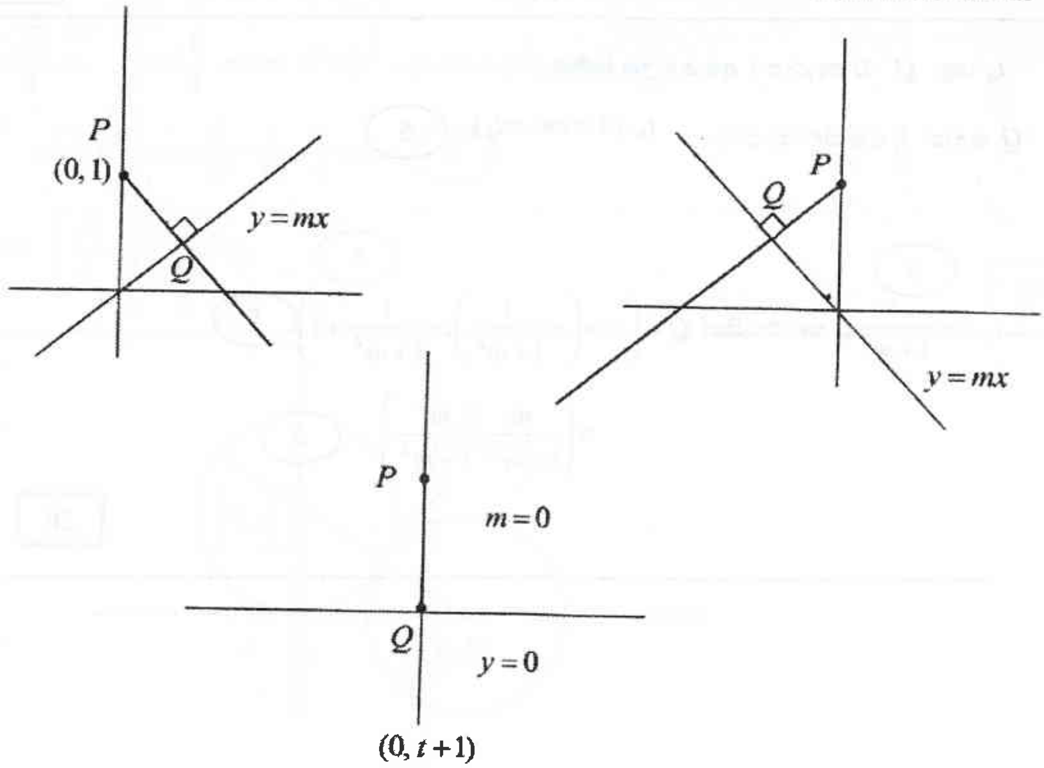
R ලක්ෂ්‍යයේ දී S බාහිරව ස්පර්ශ කරන හා x-අක්ෂය මත කේන්ද්‍රය පිහිටන S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

S' හි කේන්ද්‍රයම කේන්ද්‍රය ලෙස ඇතිව S අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

$(0, 1)$ ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටයි නම් එවිට $1 = m \times 0$ ලෙස විය යුතුයි. i.e. $1 = 0$. මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore (0, 1)$ යන්න l මත නොපිහිටයි. 5 5

10



එනයින් , $AB = AD \Rightarrow \dfrac{\sin(20^\circ+\alpha)}{\sin\alpha} = 2\cos40^\circ$. 5

5

$\therefore\ \sin(20^\circ+\alpha) = 2\sin\alpha\cos40^\circ$

$\Rightarrow\ \sin20^\circ\cos\alpha + \cos20^\circ\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos40^\circ$ 5

$\Rightarrow\ \cot\alpha = \dfrac{2\cos40^\circ - \cos20^\circ}{\sin20^\circ}$ 5

$\boxed{60}$

10

$\theta = 20^\circ$ සමගින් (i) $\Rightarrow$ $\dfrac{2\cos40^\circ - \cos20^\circ}{\sin20^\circ} = \sqrt{3}$ 5

$\therefore\ \cot\alpha = \sqrt{3}$ 5

5

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$. ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ නිසා)

$\boxed{25}$

(b) $\cos4x + \sin4x = \cos2x + \sin2x$

$\Leftrightarrow \sin4x - \sin2x = \cos2x - \cos4x$ 5

$\Leftrightarrow 2\cos3x\sin x = 2\sin3x\sin x$

5 5

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos3x - \sin3x) = 0$ 5

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ or $\cos3x = \sin3x$ 5

5

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ or $\tan 3x = 1$ 5 $(\because \cos 3x \neq 0)$ 5

$\Leftrightarrow x = n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$ හෝ $3x = m\pi + \frac{\pi}{4}$ for $m \in \mathbb{Z}$ 5

$\Leftrightarrow x = n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$ හෝ $x = \frac{m\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ for $m \in \mathbb{Z}$ 5

$\boxed{50}$
