

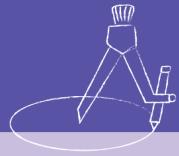


# இலையாந்த கணிதம்

## தொகையீட்டின் பிரயோகம்

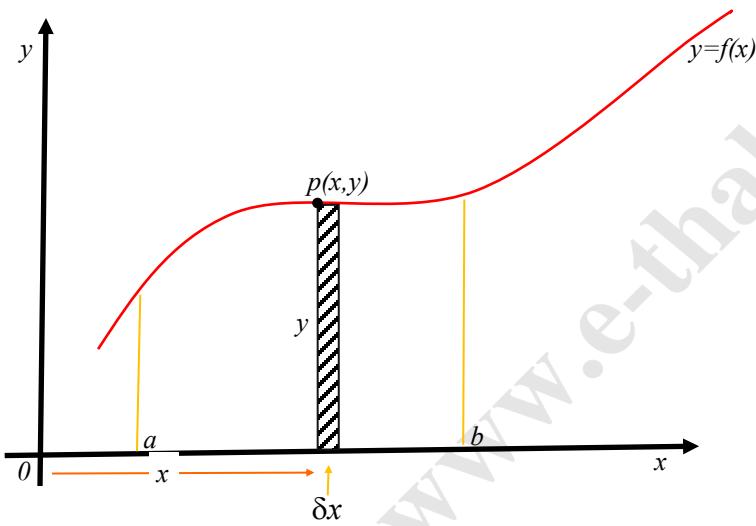
Mathematical content includes:

- Geometric formulas: Area of a circle, triangle, parallelogram, trapezoid, and cone.
- Trigonometric identities:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\csc^2 x + \sec^2 x = 1$ .
- Hyperbolic functions:  $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ ,  $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ .
- Integration and differentiation:  $\int f(x) dx$ ,  $\frac{d}{dx} f(x)$ .
- Series expansions:  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ ,  $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ .
- Logarithms and exponentials:  $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ .
- Complex numbers:  $a+bi$ ,  $|a+bi|$ ,  $\arg(a+bi)$ .
- Calculus:  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt$ .
- Probability and statistics:  $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ .



## தொகையීட்டின் பிரயோகம்

- வளையி ஒன்றின் கீழுள்ள பரப்பளவை காண்பார்.
- வளையிகளினால் அடைக்கப்படும் பரப்பளவை காண்பார்.

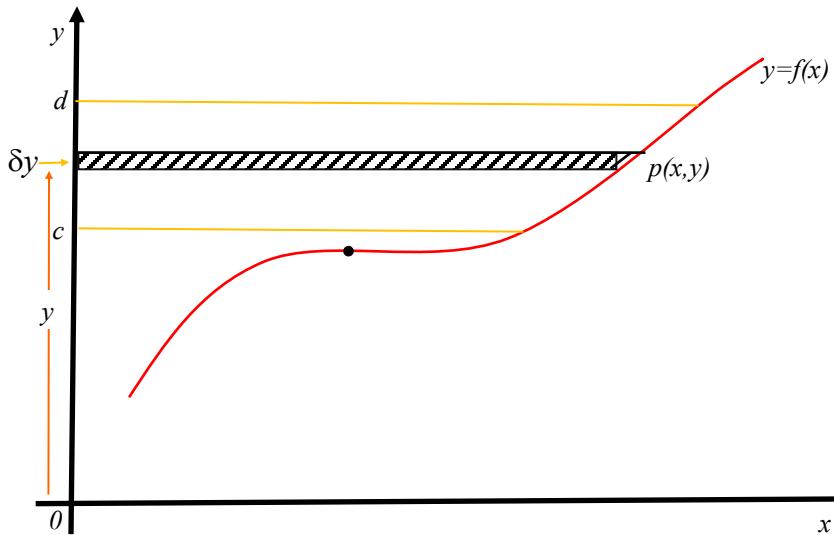
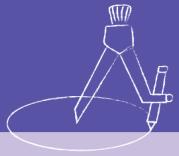


கீலத்தின் பரப்பளவு =  $y \delta x$

$y=f(x)$  என்ற வளையி  $x=a$ ,  $x=b$  என்பவற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகள் மற்றும்  $x$  அச்சு என்பவற்றால் அடைக்கப்பட்ட பரப்பு  $A$  எனின்,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{x=a}^b y \delta x \\ &\equiv \int_a^b y dx \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

தொகை :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)  
கணினிவடிவமைப்பு திரு பா.சாமிருபன், த.தொ.தொ. ஆசிரியர் (வ/கனகராயன்குளம் மகா வித்தியாலயம்)



கீலத்தின் பரப்பளவு =  $x \delta y$

$y=f(x)$  என்ற வளையி  $y=c$ ,  $y=d$  என்பவற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகள் மற்றும்  $y$  அச்சு என்பவற்றால் அடைக்கப்பட்ட பரப்பு  $A$  எனின்,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{y=c}^d x \delta y \\ &= \int_c^d x dy \\ &= \int_c^d f^{-1}(x) dy \end{aligned}$$

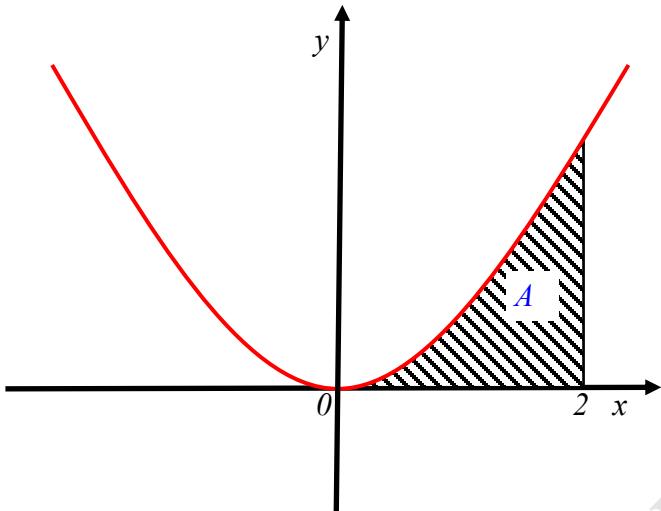


தொகுப்பு :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)  
கணினிவடிவமைப்பு திரு பா.சாமிருபன், த.தொ.தொ. ஆசிரியர் (வ/கனகராயன்குளம் மகா வித்தியாலயம்)



## உதாரணம் 1

$y=x^2$  என்ற வளையியின் கீழ்  $x=0$  இருந்து  $x=2$  வரை, வளையிக்கும்  $x$  அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 y dx \\
 &= \int_0^2 x^2 dx \\
 &= \left\{ \frac{x^3}{3} \right\}_0^2 \\
 &= \frac{1}{3} \{2^3 - 0\} \\
 &= \frac{8}{3} \text{ சதுர அலகு}
 \end{aligned}$$

## உதாரணம் 2

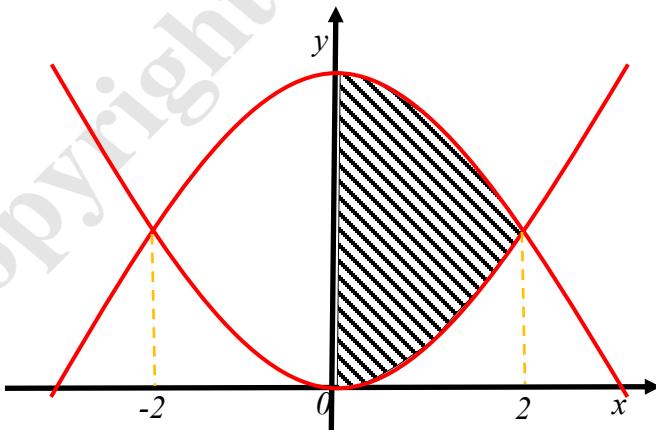
$y=x^2$ ,  $y=8-x^2$  ஆகிய இரு வளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. முதலாம் காற்பகுதியில் இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

இரு வளையிகளையும் தீர்க்க.

$$x^2 = 8 - x^2$$

$$x = \pm 2$$

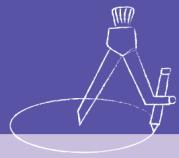
வெட்டுப்புள்ளிகள்  $(2,4)$   $(-2,4)$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 (8 - x^2) dx - \int_0^2 x^2 dx \\
 &= \int_0^2 (8 - 2x^2) dx \\
 &= \left\{ 8x - \frac{2x^3}{3} \right\}_0^2 \\
 &= 16 - \frac{16}{3} \\
 &= \frac{32}{3} \text{ சதுர அலகு}
 \end{aligned}$$

தொகுப்பு :-திரு முருகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு திரு பா.சாமிருபன், த.தொ.தொ. ஆசிரியர் (வ/கனகராயன்குளம் மகா வித்தியாலயம்)



## உதாரணம் 3

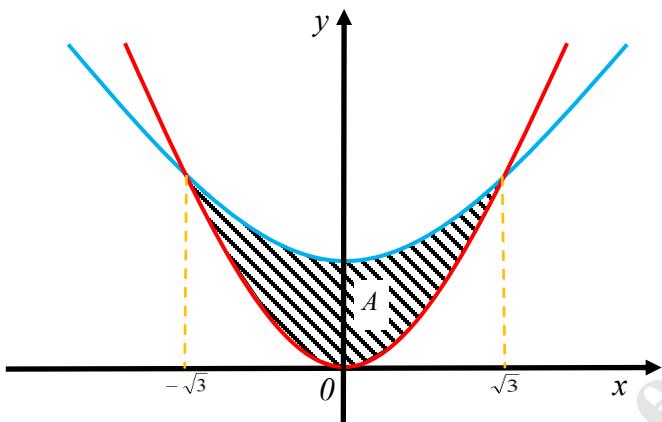
$y=5x^2$ ,  $y=2x^2+9$  ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரசே-  $12\sqrt{3}$  தசத்தின் பரப்பளவு சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.

இரு வளையிகளையும் தீர்க்க.

$$5x^2 = 2x^2 + 9$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\sqrt{3}} (2x^2 + 9) dx - \int_0^{\sqrt{3}} 5x^2 dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} (9 - 3x^2) dx \\ &= \left\{ 9x - 3 \frac{x^3}{3} \right\}_0^{\sqrt{3}} \\ &= 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

சமச்சீரினால் இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு =  $6\sqrt{3} \times 2$   
=  $12\sqrt{3}$  சதுர அலகு

## உதாரணம் 4

$y=x^2$ ,  $y^2=x$  ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

இரு வளையிகளையும் தீர்க்க.

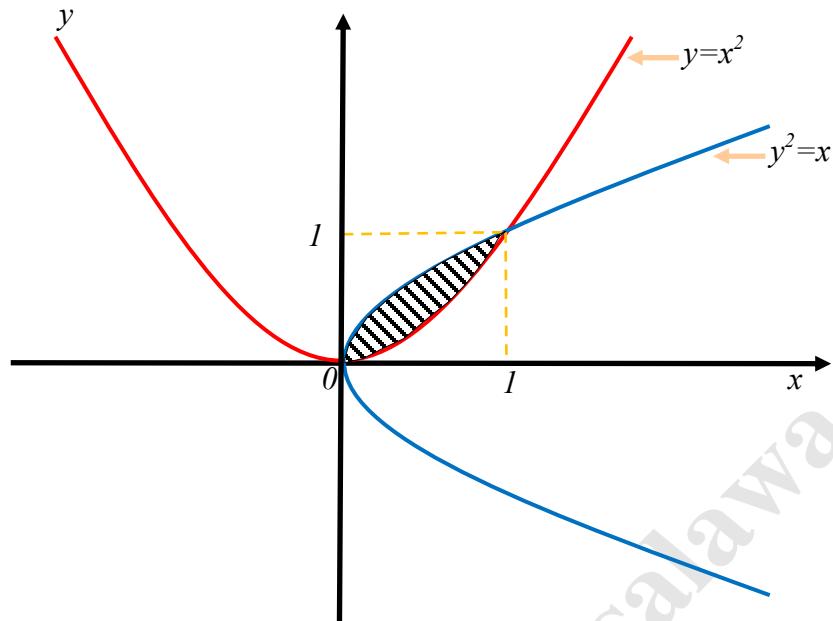
$$x^4 = x$$

$$x(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$x=0 \text{ or } x=1 \text{ or } x^2+x+1=0$$

$$x=0,1$$

$$\Delta < 0$$



### Method I

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x^2 dx \\
 &= \int_0^1 \left( x^{\frac{1}{2}} - x^2 \right) dx \\
 &= \left\{ \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right\}_0^1 \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

### Method II

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy - \int_0^1 y^2 dy \\
 &= \int_0^1 \left( y^{\frac{1}{2}} - y^2 \right) dy \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

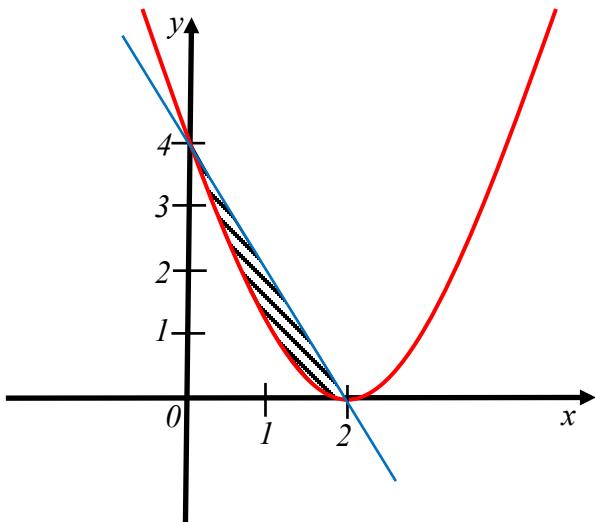
தொகுப்பு :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு திரு பா.சாயிருபன், த.தொ.தொ. ஆசிரியர் (வ/கனகராயன்குளம் மகா வித்தியாலயம்)



### உதாரணம் 5

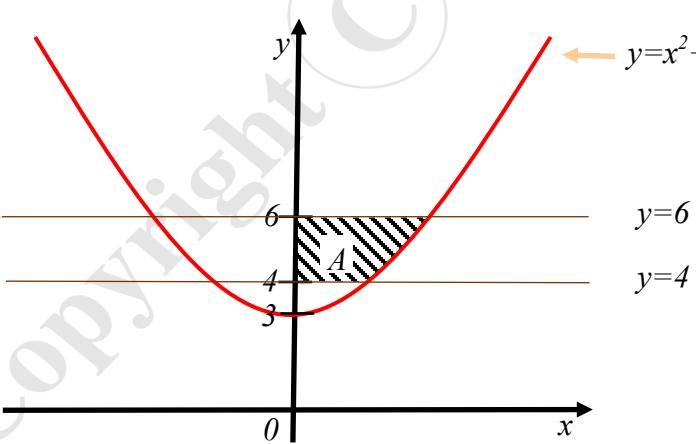
$y=(x-2)^2$ ,  $y=4-2x$  ஆகிய இரு வளையிகளைக் கண்டுப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு  $\frac{4}{3}$  சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} X 2 X 4 - \int_0^2 (x-2)^2 dx \\
 &= 4 - \left\{ \frac{(x-2)^3}{3} \right\} \\
 &= 4 - \frac{1}{3} \{0 - (-8)\} \\
 &= 4 - \frac{8}{3} \\
 &= \frac{4}{3} \text{ சதுர அலகுகள்}
 \end{aligned}$$

### உதாரணம் 6

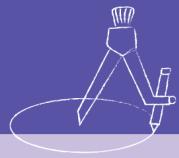
$y=x^2+3$ ,  $y=4$ ,  $y=6$  ஆகிய வளையிகளால் முதலாம் கால்வட்டத்தில் அடைக்கப்பட்ட பரப்பு  $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)$  சதுர அலகுகள் எனகாட்டுக.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_4^6 (y-3)^{\frac{1}{2}} dy \\
 &= \left\{ \frac{(y-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right\} \\
 &= \frac{2}{3} \left\{ 3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right\} \\
 &= \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)
 \end{aligned}$$

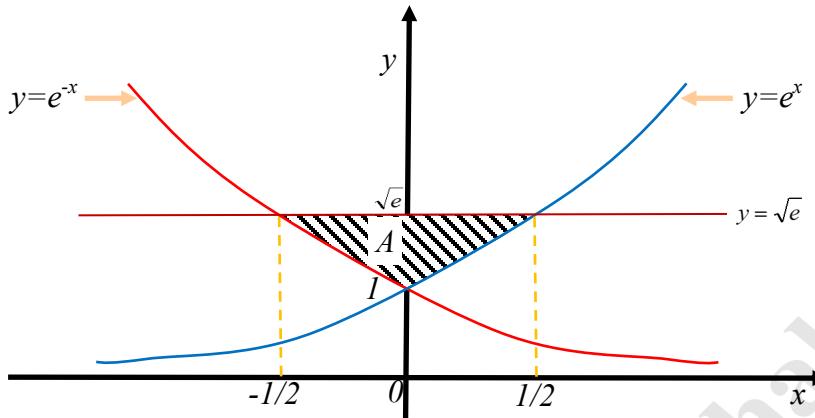
தொகுப்பு :-திரு முருகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு திரு பா.சாமிருபன், த.தொ.தொ. ஆசிரியர் (வ/கனகராயன்குளம் மகா வித்தியாலயம்)



## உதாரணம் 7

வெட்டுப்புள்ளிகளைத் தெளிவாகக் காட்டி  $y=e^x$ ,  $y=e^{-x}$  ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு வளையிகளாலும்  $y=\sqrt{e}$  என்ற கோட்டினாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு  $(2-\sqrt{e})$  என காட்டுக.



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \sqrt{e} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx \\
 &= \frac{\sqrt{e}}{2} - \left\{ e^x \right\}_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{e}}{2} - \left\{ e^{\frac{1}{2}} - e^0 \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{e}}{2} - \sqrt{e} + 1 \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{e}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{சமச்சரின்படி தேவையான பரப்பு} &= 2A \\
 &= (2 - \sqrt{e})
 \end{aligned}$$

## உதாரணம் 8

பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி  $\int xe^{-x} dx$  ஜக் கண்டு இதிலிருந்து வளையி  $y=xe^{-x}$  இனாலும்  $x=1$ ,  $x=2$ ,  $y=0$  எனும் நேர்கோடுகளாலும் உள்ளடக்கப்படும் நேர்கோடுகளாலும் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

$$\begin{aligned}
 \int xe^{-x} dx &= x \frac{e^{-x}}{-1} - \int \frac{e^{-x}}{-1} \cdot 1 \cdot dx \\
 &= -xe^{-x} + \frac{e^{-x}}{-1} + c \\
 &= -e^{-x}(x+1) + c \quad c - \text{தொகையீட்டு மாறிலி
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 xe^{-x} dx \\
 &= \left\{ -e^{-x}(x+1) \right\}_1^2 \\
 &= -3e^{-2} - (-2e^{-1}) \\
 &= 2e^{-1} - 3e^{-2}
 \end{aligned}$$