05 ஒருங்கிசைவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதனூடாக நாங்கள்......

- ஒருங்கிசைவான உருக்களை அறிந்துகொள்வோம்.
- முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையும் சந்தர்ப்பங்களை அறிந்துகொள்வோம்.
- முக்கோணிகளின் ஒருங்கிசைவு தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்போம்.

உங்கள் புகைப்படங்கள் இரண்டினை எடுத்து அவதானியுங்கள், அவை ஒன்றுக்கொன்று வித்தியாசமாகவுள்ளதா? அல்லது ஒரே மாதிரியாகவுள்ளதா?

உங்களுடைய கணித பாடப்புத்தகத்தையும் உங்கள் வகுப்பிலுள்ள நண்பனின் கணித பாடப்புத்தகத்தையும் அவதானியுங்கள். அவை ஒன்றுக்கொன்று வித்தியாசமாகவுள்ளதா? அல்லது ஒரே மாதிரியாகவுள்ளதா?

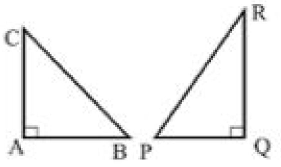
அதேபோன்று பாடசாலைப் பருவகாலச் சீட்டுக்கள் இரண்டு, புகையிரதப் பருவகாலச் சீட்டுக்கள் இரண்டு போன்றவற்றை ஒப்பிட்டுப்பாருங்கள். அவற்றில் ஒற்றுமையுள்ளதா?

யாதேனும் ஒரு தளவுருவின் வடிவம், நீளம், கோணப்பெறுமானங்கள், பரப்பளவுகள் போன்ற இயல்புகள் வித்தியாசப்படாது ஏனைய தளவுருக்களில் சமனாகக் காணப்படுமானால் அவ்வுருக்கள் ஒருங்கிசைவாகும்.

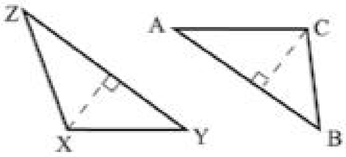
இலவச விநியோகத்திற்காக

செயற்பாடு - 1

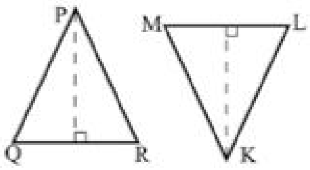
கீழே காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணச் சோடிகளின் பக்கங்களின் நீளங்கள், கோணங்களின் பெறுமானங்கள் ஆகியவற்றை அளந்தும், கணித்தும் பாருங்கள். பரப்பளவுகளையும் கணித்துப் பாருங்கள்.



AB	நீளம்	....	QR	நீளம்	....
AC	நீளம்	....	PQ	நீளம்	....
BC	நீளம்	....	PR	நீளம்	....



XY	நீளம்	....	AC	நீளம்	....
XZ	நீளம்	....	BC	நீளம்	....
YZ	நீளம்	....	AB	நீளம்	....



PQ	நீளம்	....	KM	நீளம்	....
QR	நீளம்	....	ML	நீளம்	....
PR	நீளம்	....	KL	நீளம்	....

$A\hat{B}C$	....	$P\hat{R}Q$	......	$X\hat{Z}Y$	....	$A\hat{B}C$	......
$A\hat{C}B$	....	$Q\hat{P}R$	....	$X\hat{Y}Z$	....	$B\hat{A}C$	....
$B\hat{A}C$	....	$P\hat{Q}R$	....	$Z\hat{X}Y$	....	$A\hat{C}B$	....

Δ ABC இன் பரப்பளவு .... Δ PQR இன் பரப்பளவு ....

Δ XYZ இன் பரப்பளவு .... Δ ABC இன் பரப்பளவு ....

கேத்திர கணிதத்தில் இரு முக்கோணிகளிலுள்ள இயல்புகள் அனைத்தும் சமனாக இருக்குமானால் அவ்விரு முக்கோணிகள் இரண்டும் ஒன்றுடன் ஒன்று சரியாகப் பொருந்தும்.

அவ்வாறான முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகள் எனப்படும்.

முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையும்போது ஒத்த பக்கங்கள் மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று சமனாகும். ஒத்த கோணங்கள் மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று சமனாகும். அவற்றின் பரப்பளவுகளும் சமனாகும்.

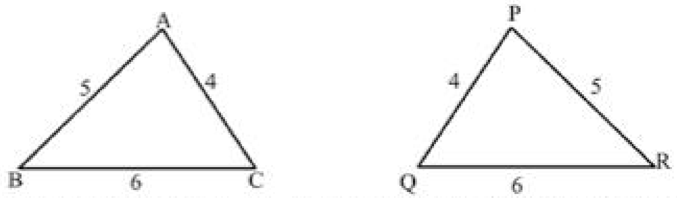
ஒருங்கிசைவு என்பது தள உருக்களிலுள்ள எல்லா உறுப்புக்களும் சமனாக அமையும் என்பதாகும்.

ஒரு முக்கோணியின் உறுப்புக்கள் 3 பக்கங்கள், 3 கோணங்கள் ஆகியவையாகும்.

சந்தர்ப்பம் 1

செயற்பாடு-2

உருவில் இரு முக்கோணிகளின் பக்கங்களை அவதானியுங்கள். கோணங்களை அளந்து சமனானதா எனப்பாருங்கள்.



முக்கோணி ABC ஐ ஒரு திசுக்கடதாசியில் பிரதி செய்யுங்கள். பின்னர் அதனை முக்கோணி PQR இன் மீது வைத்து பொருந்துகின்றதா எனப் பாருங்கள்.

இங்கு பக்கம் AB இன் நீளம் பக்கம் PR இன் நீளத்திற்கு சமனாகும்.
இங்கு பக்கம் AC இன் நீளம் பக்கம் PQ இன் நீளத்திற்கு சமனாகும்.
இங்கு பக்கம் BC இன் நீளம் பக்கம் QR இன் நீளத்திற்கு சமனாகும்.

இவ்விரு முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்களின் நீளங்கள் சமமாகும் என்பதை மட்டும் நாம் அறிவோம்.
ஒத்த கோணங்களை அளந்து பார்த்தால் அவையும் ஒன்றுக்கொன்று சமனாக இருப்பதைக் காணமுடியும்.
கணிப்பதன் மூலம் அல்லது இரு முக்கோணிகளை வெட்டியெடுத்து ஒன்றன்மீது ஒன்றைப் பொருத்துவதன் மூலம் அவற்றின் பரப்பளவும் சமனாகும் என்பதை அறிந்துகொள்ள முடியும். எனவே இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைவாகும்.

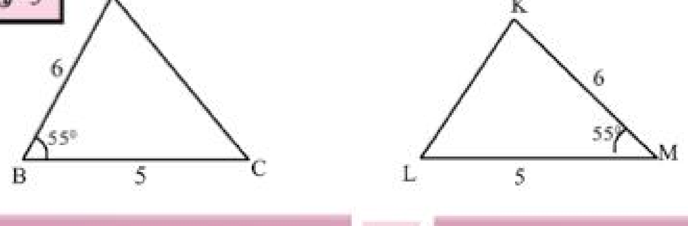
ஒருங்கிசைவு என்பதைக் குறிப்பதற்கு $\equiv$ எனும் குறியீடு பயன்படுத்தப்படும்.

$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta PQR$ என எழுத முடியும். இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைவதற்குக் காரணமாக அமைவது, ஒரு முக்கோணியிலுள்ள 3 பக்கங்களும் மற்ற முக்கோணியில் உள்ள 3 பக்கங்களுக்கும் சமனாக அமைவதாகும்.

ஒரு முக்கோணியின் 3 பக்கங்களும் இன்னுமொரு முக்கோணியின் 3 பக்கங்களுக்கும் சமனாக இருப்பின், அவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைவாகும். இதனை (ப:ப:ப) எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்போம்.

சந்தர்ப்பம் 11

செயற்பாடு-3



இலவச விநியோகத்திற்காக

முக்கோணம் ABC இன் மீது திசுக்கடதாசியை வைத்து அதனைப் பிரதிசெய்து முக்கோணி KLM மீது வைத்து ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்துகின்றதா எனப்பாருங்கள்.

இங்கு முக்கோணி ABC, முக்கோணி KLM ஐ பரீட்சித்துப் பாருங்கள்.

AB இன் நீளம் KM இன் நீளத்திற்குச் சமனாகுமா?

BC இன் நீளம் LM இன் நீளத்திற்குச் சமனாகுமா?

பக்கம் AB, BC என்பனவற்றால் அமையும் கோணம் $A\hat{B}C$ ஆகும்.

பக்கம் AB, BC நீளங்களுக்குச் சமனான, KM , LM ஆகிய இரு பக்கங்களால் அமைக்கும் கோணம் $K\hat{M}L$ ஆகும்.

பக்கம் AC, KL என்பனவற்றின் நீளங்களை அளந்து பாருங்கள்.

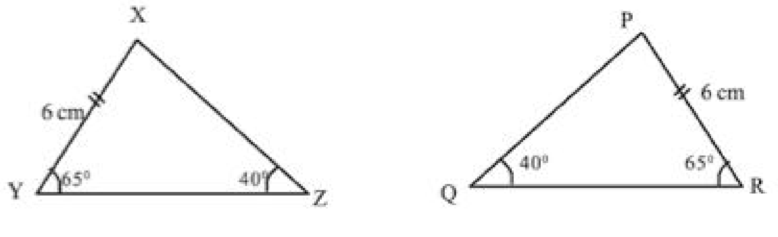
$B\hat{A}C$ · $L\hat{K}M$ ஆகியவற்றை அளந்து பாருங்கள். $A\hat{C}B$ · $K\hat{L}M$ ஆகியவற்றை அளந்து பாருங்கள்.

இம் முக்கோணிகள் இரண்டும் ஒன்றுடன் ஒன்று ஒருங்கிசையும் என்பதை அவதானிப்பதன் மூலம் அறிந்துகொள்ள முடியும்.
எனவே இம் முக்கோணிச் சோடிகள் ஒருங்கிசையும். Δ ABC $\equiv$ Δ KLM ஆகும்.

> ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களும் அவ்விரு பக்கங்களுக்கு இடையே அமையும் கோணமும், இன்னொரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களுக்கும் அவ்விரு பக்கங்களுக்கு இடையே அமையும் கோணத்திற்கும் சமனாயின் அவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையும். இதனைச் சுருக்கமாக (ப:கோ:ப.) எனக் குறிப்போம்.

சந்தர்ப்பம் 111

செயற்பாடு - 4



இலவச விநியோகத்திற்காக

முக்கோணி XYZ ஐப் பிரதிசெய்து முக்கோணி PQR மீது வைத்து அவை ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்துகின்றதா எனப் பாருங்கள்.

XYZ, PQR முக்கோணிகள் இரண்டிலும்.

$XY = PR$, $X\hat{Y}Z = 65^0$, $P\hat{R}Q = 65^0$.

$X\hat{Z}Y = 40^0$, $P\hat{Q}R = 40^0$ ஆகும்.

எனவே கோணங்களின் அமைவின்படி XY இற்கு ஒத்த பக்கம் PR ஆகும்.

இவ்விரு முக்கோணிகளின் மற்றைய பக்கங்களையும் கோணத்தையும் அளந்து பார்த்தால்,

YZ இற்கு சமனான பக்கம் QR ஆகும்.

XZ இற்கு சமனான பக்கம் PQ ஆகும்.

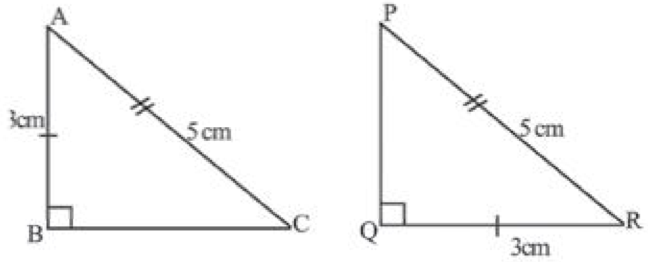
$Y\hat{X}Z$ ஆனது $Q\hat{P}R$ இற்கு சமனாகும்.

எனவே Δ XYZ, Δ PQR ஒருங்கிசைவாகும்.

ஒரு முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்களும் ஒரு பக்கமும் இன்னொரு முக்கோணியின் இரண்டு கோணங்களுக்கும் ஒத்த ஒரு பக்கத்திற்கும் சமனாக இருந்தால் அவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையும் இதனை சுருக்கமாக (கோ.கோ.ப) எனக் குறிப்போம்

சந்தர்ப்பம் iv

செயற்பாடு 5



இலவச விநியோகத்திற்காக

Δ ABC ஐ திசுக் கடதாசியில் பிரதி செய்து முக்கோணி PQR மீது வைத்து அவை இரண்டும் பொருந்துகின்றனவா எனப் பாருங்கள்.

$A\hat{B}C$, $P\hat{Q}R$ என்பன இரு செங்கோணங்களாகும்.

AB இன் நீளம் 3cm, QR இன் நீளம் 3cm ஆகும்.

AC = 5cm, PR = 5cm இவை செம்பக்கமாகும்.

இம் முக்கோணிகள் இரண்டும் செங்கோண முக்கோணிகளாக அமைந்திருப்பது ஒரு விசேட சந்தர்ப்பமாகும்.

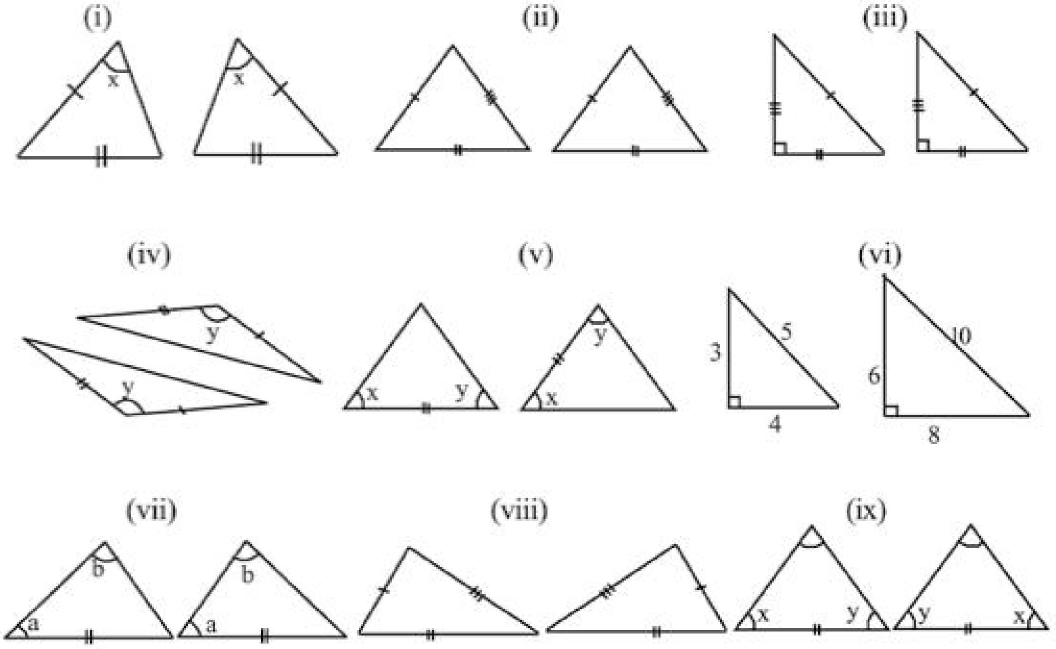
பக்கங்களை அளந்து பார்க்கும்போது BC இன் நீளம் PQ இன் நீளத்திற்கு சமனாகும்.

$B\hat{A}C = P\hat{R}Q \quad B\hat{C}A = Q\hat{P}R$

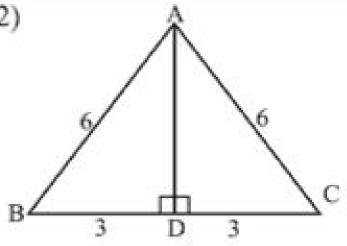
> செங்கோண முக்கோணிகள் இரண்டில் செம்பக்கங்கள் இரண்டும், இன்னுமொரு பக்கச் சோடியும் சமனாக அமைந்தால் இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையும் இதனை சுருக்கமாக (செ.ப:ப) எனக் கூறுவோம்.

பயிற்சி 5.1

(01) கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணச் சோடிகள் ஒருங்கிசையுமா இல்லையா என்பதைத் தீர்மானித்து ஒருங்கிசையும் சந்தர்ப்பங்களைக் குறிப்பிடுங்கள்.

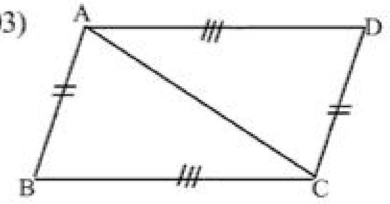


(02)



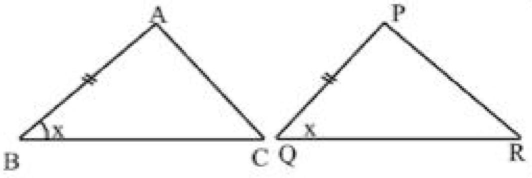
ΔABD , ΔADC என்பன ஒருங்கிசைவதற்குரிய காரணத்தைக் குறிப்பிடுங்கள்.

(03)



ΔABC , ΔADC என்பன ஒருங்கிசைவதற்குரிய காரணத்தைக் குறிப்பிடுங்கள்.

(04)

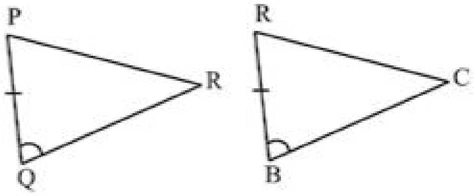


i. ΔABC , ΔPQR இரண்டும் ஒருங்கிசைவதற்கு BC , QR சமனாக வேண்டும் என அரவிந்தன் கூறுகின்றான்.

ii. ΔABC , ΔPQR இரண்டும் ஒருங்கிசைவதற்கு $A\hat{C}B$, $P\hat{R}Q$ கோணங்கள் இரண்டும் சமனாக வேண்டும் என ரஹீம் கூறுகின்றான்.

இக்கூற்றுக்கள் இரண்டிலும் எது உண்மையாகும். காரணத்தைக் குறிப்பிடுங்கள்.

(05)

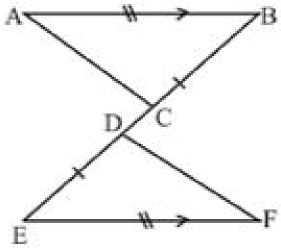


இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைவதற்கு சரியான மற்றைய காரணத்தைக் குறிப்பிட்டு, அதன் அடிப்படையில் ஒருங்கிசைவதற்கான சந்தர்ப்பத்தையும் எழுதுங்கள்.

ஒருங்கிசைந்த பின்னர் சமனான ஒத்த உறுப்புக்களை எழுதிக்காட்டுங்கள்.

இலவச விநியோகத்திற்காக

உதாரணம்-1



உருவில் AB = EF , AB // EF ஆகும்.
BC = DE ஆகும்.
AC = DF எனக் காட்டுங்கள்.
Δ ABC, ΔDEF இல்
AB // EF என்பதால் $A\hat{B}C = D\hat{E}F$ (ஒன்றுவிட்ட கோணம்)
AB = EF (தரவு)
BC = DE (தரவு)
$\therefore$ Δ ABC $\equiv$ Δ DEF (ப:கோ:ப.) சந்தர்ப்பம்.
$\therefore$ ஏனைய ஒத்த உறுப்புக்களும் சமனாகும்.
$\therefore$ AC = DF

பயிற்சி 5.2

(01) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் பொருத்தமான மாதிரி உருக்களை வரைந்து Δ ABC , Δ PQR என்பன ஒருங்கிசைகின்றதா? இல்லையா? என்பதைத் தீர்மானித்து ஒருங்கிசைவதாயின், அதற்குரிய காரணத்தை எழுதுங்கள். ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளில் சமனாகும் ஏனைய கோணங்களையும், பக்கங்களையும் எழுதிக் காட்டுங்கள்.

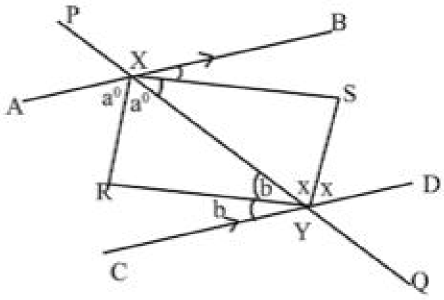
(i). AB = PR, BC = PQ, $\hat{B} = \hat{Q}$
(ii). AB = QR, BC = PR, CA = PQ
(iii). AB = PR, AC = QR, $\hat{A} = \hat{R}$
(iv). $\hat{B} = \hat{P}$, $\hat{C} = \hat{R}$, BC = QR
(v). $\hat{A} = \hat{Q}$, $\hat{B} = \hat{R}$, $\hat{C} = \hat{P}$
(vi). AB = PR, $\hat{C} = \hat{Q}$, $\hat{B} = \hat{R}$

(02) Δ ABC இல் $\hat{A}$ இன் இருசம கூறாக்கியானது BC ஐ X இல் சந்திக்கின்றது. AX ஆனது BC இற்கு செங்குத்தாயின் AB = AC எனக் காட்டுங்கள்.

(03) Δ ABC இல் AB = AC, BX = CY ஆகுமாறு X , Y எனும் புள்ளிகள் AB , AC இல் அமைந்துள்ளன. BY = CX எனக் காட்டுங்கள்.

இலவச விநியோகத்திற்காக

(04).



AB // CD

$A\hat{X}Y$ இன் இருசம கூறாக்கியும்,

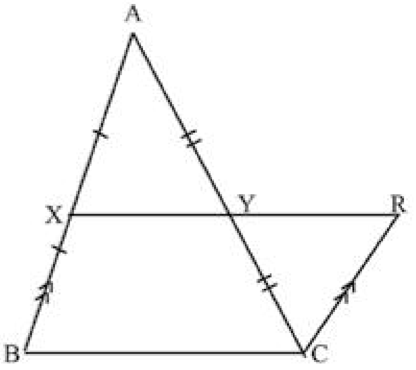
$C\hat{Y}X$ இன் இருசம கூறாக்கியும் R இல் சந்திக்கின்றன. அவ்வாறே

$B\hat{X}Y$ இன் இருசம கூறாக்கியும் $D\hat{Y}X$ இன் இருசம கூறாக்கியும் S இல் சந்திக்கின்றன.

$\Delta RXY = \Delta XSY$ எனக் காட்டுங்கள்.

(05). AB எனும் நேர்கோட்டின் நடுப்புள்ளி O ஆகும். O இனூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக AX , BY வரையப்பட்டுள்ளது. AX = BY எனக் காட்டுங்கள்.

(06). ΔABC இல் AB, AC என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே X,Y ஆகும். BA இற்கு சமாந்தரமாக C இனூடாக வரையப்பட்ட கோட்டை நீட்டப்பட்ட XY ஐ R இல் சந்திக்கின்றது. $\Delta AXY \equiv \Delta YRC$ எனக் காட்டுங்கள்.



சாராம்சம்

★ இரு தளவுருக்கள் ஒன்றோடொன்று சரியாகப் பொருந்துமாயின் அவை ஒருங்கிசைவான உருக்களாகும்.

★ இரு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவதற்கு நான்கு சந்தர்ப்பங்கள் உள்ளன.

1. பக்கம், பக்கம், பக்கம்
2. பக்கம், கோணம், பக்கம்
3. கோணம், கோணம், பக்கம்
4. செம்பக்கம், பக்கம்

★ ஒருங்கிசைவைக் குறிப்பதற்கு ≡ எனும் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.

இலவச விநியோகத்திற்காக