(10) සංයුක්ත ගණිතය

ප්‍රශ්න පත්‍ර ව්‍යුහය

I පත්‍රය - **කාලය : පැය 03යි.** (ඊට අමතරව කියවීම් කාලය මිනිත්තු 10 යි.)

මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් **දෙකකින්** සමන්විත වේ.

A කොටස - ප්‍රශ්න **දහයකි.** ප්‍රශ්න **සියල්ලට ම** පිළිතුරු සැපයිය යුතු ය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 25 බැගින් ලකුණු 250කි.

B කොටස - ප්‍රශ්න **හතකි.** ප්‍රශ්න **පහකට** පිළිතුරු සැපයිය යුතු ය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 150 බැගින් ලකුණු 750කි.

I පත්‍රය සඳහා මුළු ලකුණු 1000 ÷ 10 = 100

II පත්‍රය - **කාලය : පැය 03යි.** (ඊට අමතරව කියවීම් කාලය මිනිත්තු 10 යි.)

මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් **දෙකකින්** සමන්විත වේ.

A කොටස - ප්‍රශ්න **දහයකි.** ප්‍රශ්න **සියල්ලට ම** පිළිතුරු සැපයිය යුතු ය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 25 බැගින් ලකුණු 250කි.

B කොටස - ප්‍රශ්න **හතකි.** ප්‍රශ්න **පහකට** පිළිතුරු සැපයිය යුතු ය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 150 බැගින් ලකුණු 750කි.

II පත්‍රය සඳහා මුළු ලකුණු 1000 ÷ 10 = 100

අවසාන ලකුණ ගණනය කිරීම :

I පත්‍රය	=	100
II පත්‍රය	=	100
අවසාන ලකුණ	=	200 ÷ 2 = 100

(10) සංයුක්ත ගණිතය

I පත්‍රය

A කොටස

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන් සියලු $n \in \mathbb{Z}^{+}$ සඳහා $6^{n} - 1$ යන්න 5 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. $2|x-3| \leq 2+x$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන්හි කුලකය සොයන්න.
ඒ නයින්, $2|x+3| \leq 2-x$ විසඳන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. ආගන්ඩ් සටහනක $|z - i| \leq 1$ හා $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}\,(z - i) \leq \frac{3\pi}{4}$ යන අවශ්‍යතා තෘප්ත කරන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

R පෙදෙස තුළ වූ z සඳහා, $\text{Re}\,z + \text{Im}\,z$ හි උපරිම අගය ලියා දක්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left((8 + x)^{\frac{1}{3}} - 2\right) \sin 2x}{x^2} = \dfrac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. $P \equiv (4\cos\theta, 3\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ඉලිප්සයට අඳිනු ලබන ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\frac{x}{4}\cos\theta + \frac{y}{3}\sin\theta = 1$ බව පෙන්වන්න.

P හිදී ඉහත ඉලිප්සයට අඳිනු ලබන අභිලම්බය $\left(0, -\frac{7}{6}\right)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ හි අගය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. $\tan^{-1}\left[\frac{5}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{3}\right]$ යන්න x විෂයෙහි අවකලනය කරන්න. **ඒ නයින්,** $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$ සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

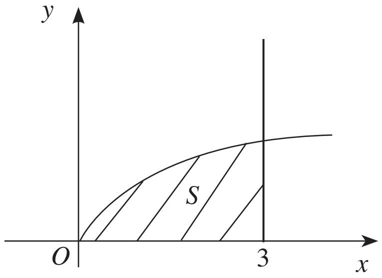
....

....

....

....

7. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ වක්‍රයෙන් ද $x = 3$ සරල රේඛාව හා x−අක්ෂය මගින් ද ආවෘත වූ පෙදෙස S යැයි ගනිමු (රූපය බලන්න). x−අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් S භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $3\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.



....

....

....

....

....

....

....

....

8. $(2, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන විචල්‍ය සරල රේඛාවක් x−අක්ෂය හා y−අක්ෂය පිළිවෙළින් P හා Q ලක්ෂ්‍ය වලදී හමුවේ. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය R වේ. R ලක්ෂ්‍යය $x + 2y = 2xy$ වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. (0, 0) හා (0, 2) ලක්ෂ්‍ය හරහා යන $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$ වෘත්තයෙහි පරිධිය සමච්ඡේදනය කරන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $\sqrt{3}\ \cos x - \sin x$ යන්න $R\cos(x+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.

ඒ නයින්, $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + 1 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

B කොටස

11. (*a*) a හා b යනු ප්‍රභින්න තාත්ත්වික සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු. $x^2 + 2bx + 2ab = a^2$ සමීකරණයෙහි මූල තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න බව පෙන්වන්න.
$a \neq 2b$ හා $a \neq 0$ ම නම් පමණක් ඉහත සමීකරණයේ මූල වන α හා β දෙකම නිශ්ශූන්‍ය වන බව පෙන්වන්න.
දැන් $a \neq 2b$ හා $a \neq 0$ යැයි සිතමු. $\dfrac{\alpha}{\beta}$ හා $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ස්වකීය මූල ලෙස වූ වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(*b*) $f(x)$ යනු මාත්‍රය 2 ට වැඩි බහුපදයක් යැයි ද p හා q යනු ප්‍රභින්න තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය දෙවරක් යෙදීමෙන් $f(x)$ යන්න $(x-p)(x-q)$ වලින් බෙදූ විට ශේෂය $\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}(x-p)+f(p)$ බව පෙන්වන්න.
$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-2)$ න් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය, $(x-1)$ න් එය බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය මෙන් තෙගුණයක් බව $(x-1)(x-2)$ න් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $kx+5$ වන බව ද දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. a, b හා k හි අගයන් සොයන්න.

12. (*a*) $(1+x)^2\left(2x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)^{10}$ හි ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වායත්ත පදය -15 බව පෙන්වන්න.

(*b*) වෙනස් පරිසාධන වාර්තා සහිත කෙටිදුර ධාවකයන් 8 දෙනකු අතුරින් ධාවකයින් 4 දෙනකුගෙන් සමන්විත සහාය දිවීමේ කණ්ඩායමක් තෝරා ගත යුතුව ඇත. ඔවුන් අතුරින් අඩුතම දක්ෂතා පෙන්වා ඇති ක්‍රීඩකයා තෝරා ගතහොත් වැඩිතම දක්ෂතා පෙන්වා ඇති ක්‍රීඩකයා ද තෝරා ගනු ලැබේ. එසේ නමුත් අඩුතම දක්ෂතා පෙන්වා ඇති ක්‍රීඩකයා තෝරා නොගෙන වැඩිතම දක්ෂතා පෙන්වා ඇති ක්‍රීඩකයා තෝරා ගත හැකිය. මෙලෙස සාදා ගත හැකි වෙනස් සහාය දිවීමේ කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

(*c*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = \dfrac{2r^2-5}{(r+1)^2(r+2)^2}$ හා $f(r) = \dfrac{\lambda r + \mu}{(r+1)^2}$ යැයි ගනිමු; මෙහි λ සහ μ යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි λ හා μ හි අගයන් සොයන්න.
$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$ යැයි ගනිමු. $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2n+1}{(n+2)^2}$ බව පෙන්වන්න.
$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

13. (*a*) $a, b, c \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. තවද $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & b & 1 \\ b & 1 & c \end{pmatrix}$ හා $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c & 2a+c \\ 1 & b \end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු.
$\mathrm{AB^T} = \mathrm{C}$ වන පරිදි a, b හා c හි අගයන් සොයන්න.
a, b හා c හි මෙම අගයන් සඳහා $(\mathrm{C^T})^{-1}$ සොයා, **ඒ නයින්**, $\mathrm{C^{-1} P C^T} = 5\mathrm{C}$ වන පරිදි වූ P න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා වූ ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිත කරමින්, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම් $z^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\theta \in \mathbb{R}$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$ වේ.
$-1 + i\sqrt{3}$ හා $\sqrt{3} + i$ යන එක් එක් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $-\pi < \theta \leq \pi$ වේ.
$m, n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^n}{(\sqrt{3}+i)^m} = 8$ නම් $n = m+3$ හා $n = 4k-1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $k \in \mathbb{Z}$ වේ.

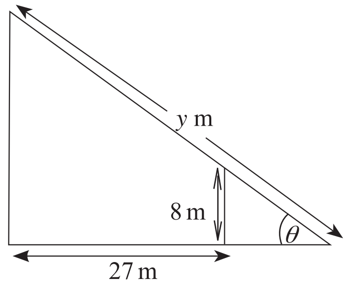
14. (*a*) $x \neq -2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(x+1)}{(x+2)^2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය වූ $f'(x)$ යන්න $x \neq -2$ සඳහා

$f'(x) = \dfrac{-x}{(x+2)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$x \neq -2$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x+2)^4}$ **බව දී ඇත;** මෙහි $f''(x)$ මගින් $f(x)$ හි දෙවෙනි ව්‍යුත්පන්නය දක්වයි.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) ගොඩනැගිල්ලක සිරස් බිත්තියක සිට 27 m දුරකින්, 8 m ක් උස වැටක් ඇත. රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි, ඉණිමගක් එහි පහළ කෙළවර තිරස් පොළොව මත ඇතිව වැටට යන්තම් ඉහළින් ගොස් බිත්තිය කරා ළඟා වේ. ඉණිමගෙහි දිග y m යැයි ද ඉණිමග තිරස සමඟ සාදන කෝණය θ යැයි ද ගනිමු. y යන්න θ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.



$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ වන්නේ $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

සුදුසු ප්‍රාන්තරතුළ $\dfrac{dy}{d\theta}$ හි ලකුණ සැලකීමෙන්, කෙටිතම එවන් ඉණිමගෙහි දිග සොයන්න.

15. (*a*) භින්න භාග ඇසුරෙන් $\dfrac{4}{(x-1)(x+1)^2}$ යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \frac{1}{(1-e^{-x})(1+e^{x})^2}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\displaystyle\int x^2(\sin x + 2\cos x)\,dx$ සොයන්න.

(*c*) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{(2-\sin^2 x)}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

16. $A \equiv (-1, 1)$ යැයි ද l යනු $x + y = 7$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ද ගනිමු.

$A\hat{B}C = A\hat{C}B = \tan^{-1}(7)$ වන පරිදි l මත වූ B හා C ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

තවද $B\hat{A}C$ කෝණයෙහි සමච්ඡේදකය වන m හි සමීකරණය සොයන්න.

BC විෂ්කම්භයක් ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය ලියා දක්වා **ඒ නයින්** B හා C හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය පරාමිතියක් ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

A, B හා C ලක්ෂ්‍යය හරහා යන S වෘත්තයෙහි සමීකරණය අපෝහනය කරන්න.

S වෘත්තයේ හා m සරල රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

17. (*a*) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \cos^3 2x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $8(\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x) = 1$ විසඳන්න.

(*b*) ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. BC මත D හා E ලක්ෂ්‍ය ගෙන ඇත්තේ $BD : DE : EC = 1 : 2 : 3$ වන පරිදි ය. තවද $B\hat{A}D = \alpha$, $D\hat{A}E = \beta$ හා $E\hat{A}C = \gamma$ යැයි ගනිමු. සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන් $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = 5\sin\alpha\ \sin\gamma$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ හා $|z| \leq 1$ යැයි ගනිමු. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z = \pi$ නම්,

$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$ බව පෙන්වන්න.

* * *

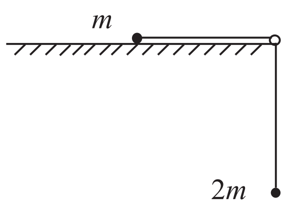
(10) සංයුක්ත ගණිතය

II පත්‍රය

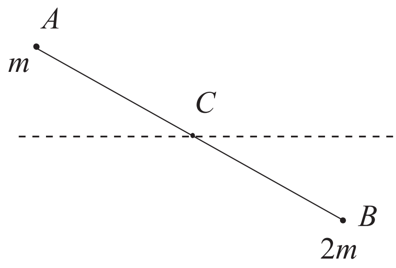
A කොටස

1. ස්කන්ධ m හා λm වූ අංශු දෙකක් සුමට තිරස් මේසයක් මත පිළිවෙළින් u හා $\frac{2u}{3}$ වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වේ. ඒවායේ සරල ගැටුමෙන් අනතුරුව අංශු සමාන $\frac{u}{2}$ වේගවලින් එකිනෙකින් ඉවතට චලනය වන බව දී ඇත. ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{3}{5}$ බවත් λ හි අගය $\frac{9}{7}$ බවත් පෙන්වන්න.

2. රළු තිරස් මේසයක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, මේසයේ දාරයට ලම්බව දාරයේ සවිකර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් නිදහසේ එල්ලෙන ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශුවකට සම්බන්ධ කරනු ලැබේ. තන්තුව ඇදී තිබිය දී පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. ස්කන්ධය m වූ අංශුව හා මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{4}$ වේ. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{5}{6}mg$ බව පෙන්වන්න.



3. දිග $2a$ වූ සැහැල්ලු AB දණ්ඩක A හා B දෙකෙළෙවරට පිළිවෙළින් ස්කන්ධ m හා $2m$ වූ අංශු දෙකක් සම්බන්ධ කර ඇත. දණ්ඩේ C මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර තිරස් පිහිටීමක අල්වා තබා නිශ්චලතාවේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. (රූපය බලන්න.) ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් දණ්ඩ තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට එක් එක් අංශුවේ v වේගය $v^2 = \dfrac{2ga}{3}\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.



....

....

....

....

....

....

....

4. A හා B මෝටර් රථ දෙකක්, ඍජු මාර්ගයක සමාන්තර මංතීරු දෙකක එකම දිශාවට චලනය වේ. $t = 0$ කාලයේ දී A හා B පිළිවෙළින් u හා $\dfrac{u}{4}$ වේගවලින් පාලමක් පසු කර යයි. A මෝටර් රථය එම නියත u වේගයෙන්ම චලනය වන අතර B මෝටර් රථය $t = T$ කාලයේ දී වේගය $\dfrac{5u}{4}$ වන තුරු නියත ත්වරණයෙන් චලනය වී පසුව එම වේගය පවත්වා ගෙන යයි. A මෝටර් රථයේ හා B මෝටර් රථයේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න. **ඒ නයින්** B මගින් A පසුකර යෑමට ගතවන කාලය නිර්ණය කිරීමට සමීකරණක් ලබා ගන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

5. ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 300ක් වූ දුම්රියක්, සෘජු සමතලා දුම්රිය මාර්ගයක් දිගේ $15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ නියත වේගයෙන් චලනය වන අතර චලිතයට ප්‍රතිරෝධය මෙට්‍රික් ටොන් එකකට $50\,\mathrm{N}$ වේ. දුම්රියේ ජවය, කිලෝ වොට්වලින් සොයන්න. ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 50ක් වූ පිටුපස මැදිරිය ගිලිහී යන අතර එන්ජිමේ ප්‍රකර්ෂණ බලය නොවෙනස්ව පවතී. දුම්රියේ ඉතිරි කොටසෙහි ත්වරණය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\lambda\mathbf{i} + \mu\,\mathbf{j}$ හා $\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ වේ. මෙහි λ හා μ ධන නියත වේ. $OABC$ චතුරස්‍රයේ විකර්ණ දිගින් සමාන හා එකිනෙකට ලම්බ වේ. $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ ලියා දක්වන්න. අදිශ ගුණිතය භාවිතයෙන් $\lambda = 4$ හා $\mu = 3$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

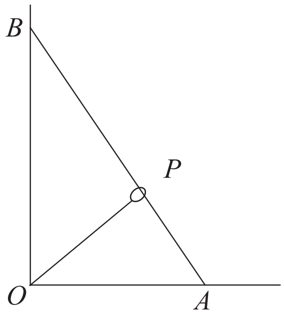
....

....

....

....

7. කුඩා සැහැල්ලු සුමට P මුදුවක් තුළින් යන දිග $2a$ හා බර W වූ සුමට ඒකාකාර AB දණ්ඩක් එහි A කෙළෙවර සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත ද අනෙක් B කෙළෙවර සුමට සිරස් බිත්තියක් ස්පර්ශ වෙමින් ද තිබේ. තිරසට 60°ක කෝණයක් සාදමින් බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක දණ්ඩ සමතුලිතතාවේ තබනු ලැබ ඇත්තේ මුදුව රූපයෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි වූ O ලක්ෂ්‍යයට යා කරන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. $O\hat{P}A = 90^{\circ}$ බව පෙන්වා තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත රළු තලයක් මත තබා ඇත. මෙහි μ ($< \tan\alpha$) යනු අංශුව හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ. අංශුව සමතුලිතතාවේ රඳවා ඇත්තේ තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාව දිගේ උඩු අතට අංශුවට යෙදූ P බලයක් මගිනි.
$mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \le P \le mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. ස්වකීය මුහුණත් හය මත 1, 2, 3, 4, 5 හා 6 ලෙස තිත් ලකුණු කොට ඇති නොනැඹුරු සම්මත දාදු කැටයක් වැඩි තරමින් විසිකිරීම් තුනකදී ලබාගත් මුලු තිත් ගණන හරියටම හයක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

10. a, b, 4, 5, 7, 4 හා 5 යන සංඛ්‍යා හතෙහි මධ්‍යනය හා මාතය සමාන වේ. මෙහි a හා b යනු ධන නිඛිල වේ. a හා b හි අගයන් සොයා සංඛ්‍යා හතෙහි විචලතාව $\frac{6}{7}$ බව පෙන්වන්න.

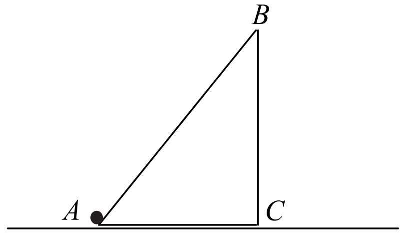
B කොටස

11. (*a*) තිරස් පොළොව මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට, තිරසට $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් $u=\sqrt{2ga}$ ප්‍රවේගයක් සහිතව ප්‍රක්ෂේප කරන ලද අංශුවක්, ගුරුත්වය යටතේ චලනය වී P ලක්ෂ්‍යයක ඇති ඉලක්කයක වදී. P හි O සිට මනිනු ලබන තිරස් හා සිරස් දුරවල් පිළිවෙළින් a හා ka වේ; මෙහි k යනු නියතයකි. $\tan^2\theta - 4\tan\theta + 4k + 1 = 0$ බව පෙන්වා $k \leq \frac{3}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.
දැන් $k=\frac{11}{16}$ යැයි ගනිමු. ප්‍රක්ෂේපණය විය හැකි දිශා දෙක අතර කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{4}{19}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) A ගුවන් තොටුපොළක්, B ගුවන් තොටුපොළක සිට දකුණින් නැගෙනහිරට θ කෝණයකින් d දුරක පිහිටයි. එක්තරා දිනකදී, උතුරේ සිට $v\ (< u)$ ප්‍රවේගයෙන් හමන සුළඟකට සාපේක්ෂව u වේගයෙන් ගුවන් යානයක් කෙළින්ම A සිට B දක්වා පියාසර කරයි. මෙම ගුවන් ගමන සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණයේ දළ සටහනක් ඇඳ A සිට B දක්වා පියාසර කිරීමට ගතවන කාලය $\dfrac{d}{\sqrt{u^2-v^2\sin^2\theta}-v\cos\theta}$ බව පෙන්වන්න.

දින කිහිපයකට පසුව, දකුණේ සිට $\frac{v}{2}$ ප්‍රවේගයකින් හමන සුළඟට සාපේක්ෂව $\frac{u}{2}$ වේගයෙන් ගුවන් යානය ආපසු කෙළින්ම B සිට A දක්වා පියාසර කරයි. ආපසු චලිතය සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණයේ දළ සටහනක් ඇඳ B සිට A දක්වා පියාසර කිරීමට ගතවන කාලය A සිට B දක්වා ගතවන කාලය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.

12. (*a*) දී ඇති රූපයෙහි ABC ත්‍රිකෝණය මගින්, ස්කන්ධය $3m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන සිරස් හරස්කඩක් නිරූපණය කරයි. AB රේඛාව, එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වේ. තවද $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$ වේ. AC අයත් මුහුණත සුමට තිරස් බිමක් මත ඇතිව කුඤ්ඤය තබනු ලබයි. ස්කන්ධය m වන අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා, $\overrightarrow{AB}$ දිගේ u ප්‍රවේගයක් ලබා දෙනු ලැබේ. AB සුමට බව හා අංශුව කුඤ්ඤය හැර නොයන බව උපකල්පනය කරමින්, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව නිශ්චලතාවට පැමිණීමට අංශුව ගනු ලබන කාලය සොයන්න.



දැන් මෙම පිහිටුමේදී අංශුව කුඤ්ඤයට ඇලේ යැයි සිතන්න. ඇලුන අංශුව සහිත කුඤ්ඤය අතිරේක d දුරක් චලනය වීම සඳහා ගන්නා කාලය සොයන්න.

(*b*) ස්කන්ධය m වූ P පබළුවක්, සිරස් තලයක සවිකර ඇති අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තාකාර සුමට කම්බියක් දිගේ චලනය වීමට නිදහස් ය. කම්බියේ ඉහළම A ලක්ෂ්‍යයෙහි දී පබළුව අල්වා තබා, යන්තමින් විස්ථාපිත පිහිටුමකින් නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.
OP යන්න θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට, පබළුවේ වේගය වන v යන්න, $v^2=2ga(1-\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
පහළම ලක්ෂ්‍යය වන B වෙත ළඟා වීමේදී පබළුවේ වේගය සොයන්න.
B ලක්ෂ්‍යය වෙත P ළඟා වන විට, එය B හි නිශ්චලතාවේ තිබූ ස්කන්ධය m වූ වෙනත් පබළුවක් සමග ගැටී හාවී Q සංයුක්ත පබළුවක් සාදයි. OQ යන්න $\frac{\pi}{3}$ කෝණයකින් හැරී ඇති විට Q ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.

13. ස්වාභාවික දිග a හා මාපාංකය mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. එක එකක ස්කන්ධය m වූ අංශු දෙකක් තන්තුවේ අනික් කෙළවර වූ P ට ඈඳනු ලැබ පද්ධතිය සමතුලිතව එල්ලෙයි. මෙම පිහිටීමෙහි දී තන්තුවේ විතතිය $2a$ බව පෙන්වන්න.

දැන් අංශුවලින් එක් අංශුවක් ගිලිහී යන අතර ස්කන්ධය m වූ ඉතිරි අංශුව, තන්තුවේ කෙළවරට සම්බන්ධව තිබියදී, චලනය වීමට පටන් ගනී. P හි චලිතය සඳහා $\ddot{x} + \dfrac{g}{a}(x - 2a) = 0$ සමීකරණය ලබා ගන්න. මෙහි $x(\geq a)$ යනු තන්තුවේ දිග වේ.

මෙම සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය C හා විස්තාරය සොයන්න.

C ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුව සිරස් ආවේගයක් දෙනු ලබන්නේ එහි ප්‍රවේගය තෙගුණ වන පරිදි ය. තන්තුව ඇදී පවතින තුරු චලිතයේ කේන්ද්‍රය එලෙසම පවතින බවත්, මෙම චලිතයේ විස්තාරය $3a$ බවත් පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $\sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\dfrac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$ මුළු කාලයකට පසුව තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.

තන්තුව බුරුල්වන මොහොතේ දී අංශුවේ වේගය සොයන්න.

14. (*a*) $PQRS$ යනු සමාන්තරාස්‍රයක් යැයි ද T යනු $QT : TR = 2 : 1$ වන පරිදි QR මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. තවද $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$ හා $\overrightarrow{PS} = \mathbf{b}$ යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{PR}$ හා $\overrightarrow{ST}$ දෛශික $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

PR හා ST හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය U යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{PU} = \lambda\overrightarrow{PR}$ හා $\overrightarrow{SU} = \mu\overrightarrow{ST}$ යැයි සිතමු; මෙහි λ හා μ අදිශ නියත වේ. PSU ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $(\lambda - \mu)\,\mathbf{a} + \left(\lambda + \dfrac{\mu}{3} - 1\right)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ බව පෙන්වා λ හා μ හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) බල තුනකින් සමන්විත පද්ධතියක් Oxy-තලයෙහි පහත දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියා කරයි.

ලක්ෂ්‍යය	**පිහිටුම් දෛශික**	**බලය**
A	$2a\mathbf{i} + 5a\mathbf{j}$	$F\mathbf{i} + 3F\mathbf{j}$
B	$4a\mathbf{j}$	$-2F\mathbf{i} - F\mathbf{j}$
C	$-a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$	$F\mathbf{i} - 2F\mathbf{j}$

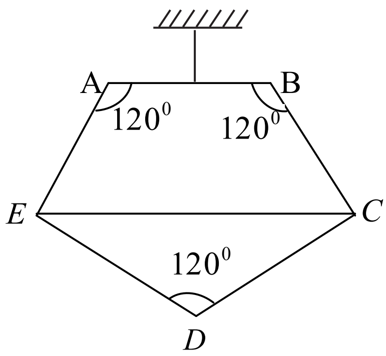
මෙහි $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ මගින් පිළිවෙළින් Ox හා Oy ඛණ්ඩාංක අක්ෂවල ධන දිශාවලට ඒකක දෛශික වන අතර F, a යනු පිළිවෙළින් නිව්ටන් හා මීටරවලින් මනිනු ලැබූ ධන රාශි වේ. මෙම බල තනි රූප සටහනක සලකුණු කර, ඒවායේ දෛශික ඓක්‍යය ශූන්‍ය වන බව පෙන්වන්න. $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ පිහිටුම් දෛශිකය සහිත P ලක්ෂ්‍යයක් වටා පද්ධතියේ වාමාවර්ත ඝූර්ණය G සොයා, එය x හා y වලින් ස්වායත්ත වන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය බව පෙන්වා මෙම යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයන්න.

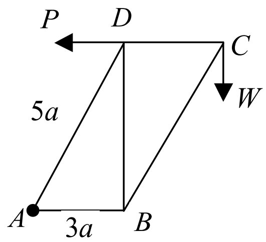
දැන් $X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$ අතිරේක බලයක්, $\mathbf{d} = -\dfrac{5a}{2}\,\mathbf{i}$, පිහිටුම් දෛශිකය සහිත D ලක්ෂ්‍යයෙහි දී යොදා ගනු ලබන්නේ A, B, C හා D ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියාකරන බල හතරේ සම්ප්‍රයුක්තය O මූලය හරහා යන පරිදි ය.

X හා Y හි අගයන් සොයන්න.

15. (*a*) $AE = BC = 2a$ හා $ED = CD = 2b$ වන **ඒකක දිගක** බර w වූ ඒකාකාර දඬුවලින් නිදහස් ලෙස සන්ධි කළ $ABCDE$ පංචාස්‍රයක ආකාරයේ රාමුවක් රූපයේ දැක්වේ. A, B හා D ශීර්ෂවල කෝණ එක එකක් 120° වේ. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙන් රාමුව සමතුලිතව එල්වා සමමිතික හැඩය පවත්වා ගනු ලබන්නේ C හා E සන්ධි යා කරන දිග $2b\sqrt{3}$ වන සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගිනි. D සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවෙහි විශාලත්වය $b\sqrt{3}w$ බව පෙන්වා CE සැහැල්ලු දණ්ඩේ තෙරපුම සොයන්න.



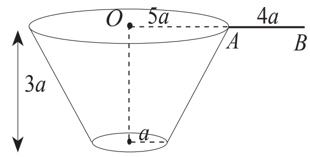
(*b*) AB, BC, CD, DA හා DB සැහැල්ලු දඬු ඒවායේ කෙළෙවරවලින් නිදහසේ සන්ධි කරන ලද චලනය කළ හැකි A සන්ධිය වටා සිරස් තලයක රාමු සැකිල්ලක් රූපයේ දැක්වේ. මෙහි $AB = CD = 3a$, $BC = DA = 5a$ හා $DB = 4a$. C සන්ධියේ W බරක් එල්වා එය AB හා DC තිරස්ව ද BD සිරස් ව ද සමතුලිතව තබා ගනු ලබන්නේ D සන්ධිය හිදී CD දිගේ P තිරස් බලයක් මගිනි. W ඇසුරින් P සොයන්න.



බෝ අංකනය යොදමින් ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක දළ සටහනක් ඇඳ ඒ නයින් සෑම දණ්ඩකම ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න. මේවා ආතති ද තෙරපුම ද යන්න සඳහන් කරන්න.

16. අනුකලනය මගින්, එකිනෙකට h දුරකින් වූ අරය r හා $\lambda r (\lambda > 1)$ වූ වෘත්තාකාර ගැටි දෙකකින් යුත් ඒකාකාර වූ කුහර සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ජින්නකයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, කුඩා ගැටියේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{h}{3}\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\right)$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.

අරය a හා පෘෂ්ඨීක ඝනත්වය σ වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක ගැටිය, අරයයන් a හා $5a$ වූ වෘත්තාකාර ගැටි සහිත එම σ පෘෂ්ඨීක ඝනත්වයම ඇති හිස් සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක උස $3a$ වූ ජින්නකයක කුඩා ගැටියට පැස්සීමෙන් ද, දිග $4a$ හා රේඛීය ඝනත්වය ρ වූ තුනී ඒකාකාර AB දණ්ඩක් ජින්නකයේ ලොකු ගැටියට O, A හා B ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය වන පරිදි රූපයේ දැක්වෙන ඇසුරින් පැස්සීමෙන් ද සාස්පානක් සාදා ඇත. සාස්පානෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.



$\frac{\rho}{\sigma} < \frac{31}{24}\pi a$ නම්, තිරස් මේසයක් මත ස්වකීය පතුල ස්පර්ශ වන පරිදි තැබූ විට සාස්පාන සමතුලිතව පැවතිය හැකි බව පෙන්වන්න.

$\rho = \pi a \sigma$ බව දී ඇත. සාස්පාන, B කෙළවරෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති විට BA යටි අත් සිරස සමඟ සාදන කෝණය ද සොයන්න.

17.(*a*) පෙට්ටියක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින් ම සමාන වූ රතු බෝල 6ක්, කොළ බෝල 3ක් හා නිල්බෝල 3ක් අඩංගු වේ. සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. බෝලය නිල් එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
ඉවතට ගත් බෝලය කොළ හෝ රතු නම් අමතර රතු බෝලයක් හා අමතර නිල් බෝලයක් මුල් බෝලය සමගම පෙට්ටියට එකතු කරනු ලැබේ. ඉවතට ගත් බෝලය නිල් නම් ප්‍රතිස්ථාපනයක් නොමැත. දැන්, සසම්භාවී ලෙස දෙවන බෝලයක් පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. ඉවතට ගත් දෙවන බෝලය නිල් එකක් වීමේ සම්භාවිතාව කුමක් ද?

ඉවතට ගත් දෙවන බෝලය නිල් එකක් බව දී ඇති විට, ඉවතට ගත් පළමු බෝලය නිල් එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) සිසුන් 100 ක් විභාගයකදී ලබා ගත් ලකුණු පහත වගුවේ දී ඇත.

ලකුණු	5 - 19	20 - 34	35 - 49	50 - 64	65 - 79	80 - 94
මධ්‍ය ලකුණ (x_i)	12	27	42	57	72	87
සංඛ්‍යාතය (f_i)	10	20	30	15	15	10

$y_i = \dfrac{1}{15}(x_i - 42)$, පරිණාමනය භාවිතයෙන් මෙම ලකුණු ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාව නිමානය කරන්න.

තවත් සිසුන් 100 ක් එම විභාගයටම ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය සහ විචලතාව පිළිවෙළින් 40 හා 15 වේ. මුළු සිසුන් 200 ම මෙම විභාගය සඳහා ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව නිමානය කරන්න.

* * *