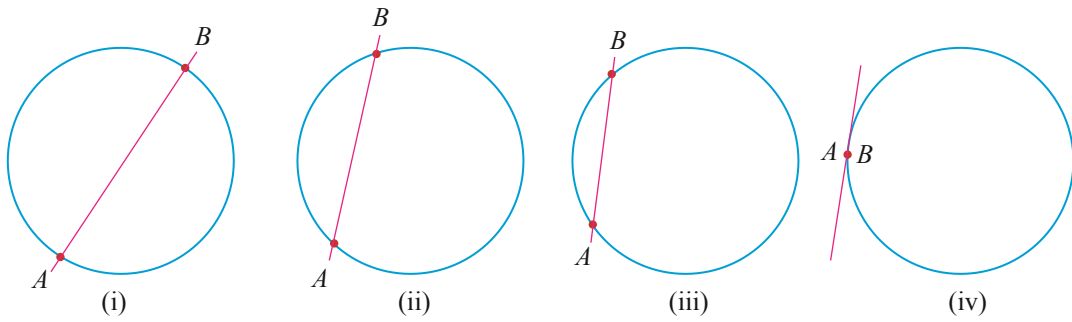




20 ස්පර්ශක

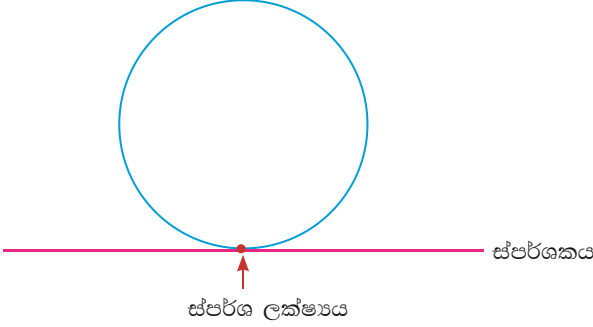
මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
 ↳ වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයකදී වෘත්තයට අදින ලද ස්පර්ශක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට,
 ↳ බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අදින ලද ස්පර්ශක දෙක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට
 හැකියාව ලැබේ.

20.1 හැඳින්වීම

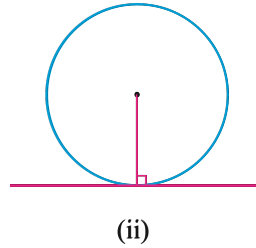
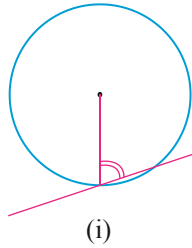


ඉහත (i) සිට (iv) තෙක් රූප සටහන් හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න. සරල රේඛාව හා වෘත්තයේ ජේදන ලක්ෂ්‍යයන් වන A හා B අතර පරතරය කෙමෙන් අඩු වේ. (iv) වන රූපය වන විට A හා B එකම ලක්ෂ්‍යයක් බවට පත් වේ.

වෘත්තයකට හා සරල රේඛාවකට පොදු ලක්ෂ්‍යය 1ක් පමණක් ඇත්නම් එම සරල රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරන්නේ යැයි කියනු ලැබේ. එවිට සරල රේඛාවට වෘත්තයේ ස්පර්ශකයක් යැයි කියනු ලැබේ. ස්පර්ශකයකට හා වෘත්තයකට පොදු ලක්ෂ්‍යය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය යැයි කියනු ලැබේ.



20.2 වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයක් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරයන් අතර ඇති සබඳතාවය



- (i) රූපයේ වෘත්තයේ අරය හා වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි සරල රේඛාවක් අතර සූළ කෝණයක් සෑදෙන විට, එම සරල රේඛාව වෘත්තය දෙතැනක දී ඡේදනය වේ.
- (ii) රූපයේ පරිදි අරය හා වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයකදී ඇඳි සරල රේඛාව අතර කෝණය සෘජු කෝණයක් වන විට එම සරල රේඛාව ස්පර්ශකයක් බවට පත් වේ.

ප්‍රමේයය

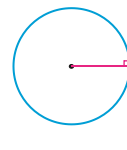
වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බකව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.

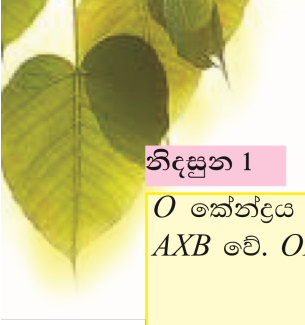


ඉහත පරිදි වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බකව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වන සේ ම එහි විලෝමය ද සත්‍ය වේ. එනම්, වෘත්තය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකය හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරය එකිනෙකට ලම්බ විය යුතු ය.

ප්‍රමේයයේ විලෝමය

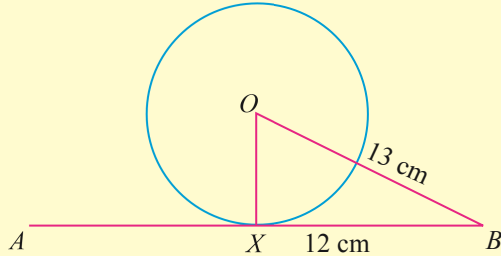
වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරයට ලම්බක වේ.





නිදසුන 1

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත X ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. X හිදී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය AXB වේ. $OB = 13$ cm හා $XB = 12$ cm වේ. වෘත්තයේ අරය සොයන්න.



AXB වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් නිසා,

$\widehat{OXB} = 90^\circ$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයකදී අඳින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි අරයට ලම්බ නිසා)

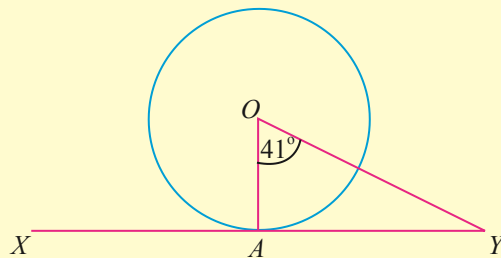
දැන් $OXB \triangle$ ට පයිතගරස් සමීකරණය යෙදීමෙන්,

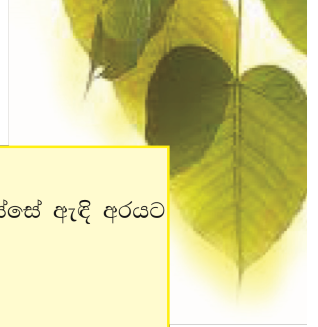
$$\begin{aligned} OX^2 + XB^2 &= OB^2 \\ OX^2 + 12^2 &= 13^2 \\ OX^2 + 144 &= 169 \\ OX^2 &= 169 - 144 \\ OX^2 &= 25 \\ OX &= \sqrt{25} \\ OX &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

\therefore වෘත්තයේ අරය 5 cm වේ.

නිදසුන 2

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයකදී ඇඳි ස්පර්ශකය XAY වේ. $\widehat{AOY} = 41^\circ$ නම් \widehat{AYO} හි අගය සොයන්න.





XAY වෘත්තයට ස්පර්ශයක් නිසා,

$\widehat{OAY} = 90^\circ$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අදින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ඇදී ඇරයට ලම්බ වන නිසා)

$\widehat{AOY} = 41^\circ$ (දී ඇත.)

$41^\circ + 90^\circ + \widehat{OYA} = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ තුනෙහි එකතුව 180° ක් වේ.)

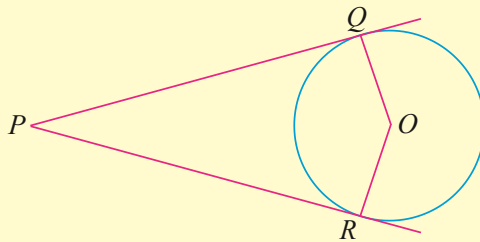
$$131^\circ + \widehat{OYA} = 180^\circ$$

$$\widehat{OYA} = 180^\circ - 131^\circ$$

$$= 49^\circ$$

නිදසුන 3

$PQOR$ චතුරස්‍රය සලකමු.



$\widehat{PQO} = 90^\circ$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අදින ස්පර්ශකය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ඇදී ඇරයට ලම්බ නිසා)

$\widehat{PRO} = 90^\circ$ (ඉහත පරිදිම)

$$\widehat{PQO} + \widehat{PRO} = 90^\circ + 90^\circ$$

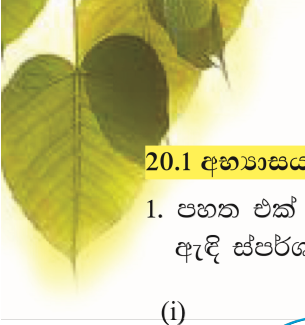
$$\widehat{PQO} + \widehat{PRO} = 180^\circ$$

චතුරස්‍රයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 360° ක් නිසා,

$$\widehat{QPR} + \widehat{QOR} = 180^\circ \text{ ක් ද වේ.}$$

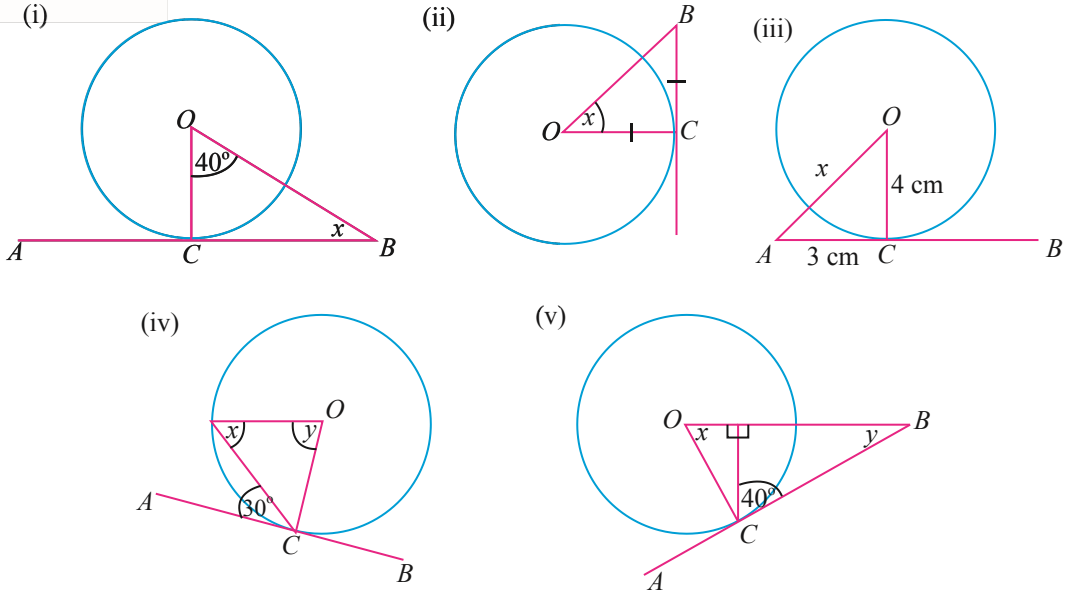
$\therefore PQOR$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. (සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක බැවින්)



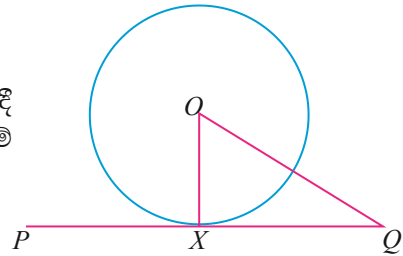


20.1 අභ්‍යාසය

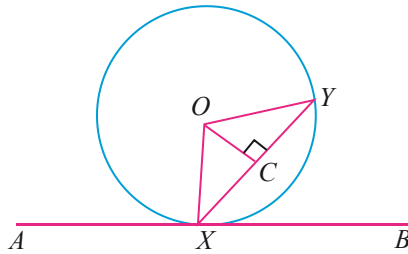
1. පහත එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද AB යනු වෘත්තය මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය ද වේ නම් වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.



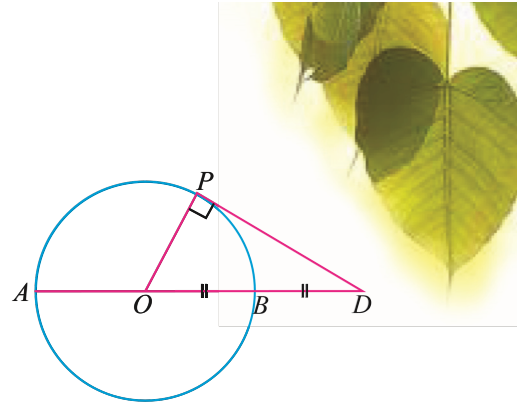
2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත X ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය PQ වේ. $OQ = 15$ cm, $XQ = 12$ cm නම් වෘත්තයේ අරය සොයන්න.



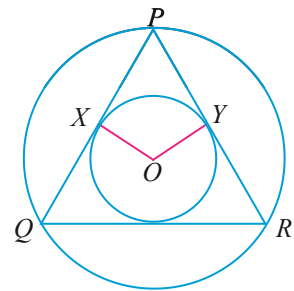
3. කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තයක් මත X හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වෙයි. රූපයේ පරිදි $XY \perp OC$ නම්, $\widehat{YOC} = \widehat{BXC}$ බව සාධනය කරන්න.



4. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB විෂ්කම්භය වේ. $OB = BD$ වන පරිදි AB භාදය D තෙක් දික්කර ඇත. D සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය PD වේ.
- O, P, D ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය B බව,
 - OPB සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව,
 - $\widehat{BAP} = 30^\circ$ බව,
 - $PA = PD$ බව
- සාධනය කරන්න.



5. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්ත දෙකක් රූපයේ දැක්වේ. PQ හා PR රේඛා X හා Y හිදී කුඩා වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.
- $PX = XQ$ බව,
 - PQR සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව,
- සාධනය කරන්න.



6. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක XY විෂ්කම්භය වේ. X හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. AY රේඛාව, P හිදී වෘත්තය ඡේදනය කරයි.
- $\widehat{XPY} = \widehat{AXY}$ බව
 - $\widehat{PXY} = \widehat{XAP}$ බව
- සාධනය කරන්න.

20.3 බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකය

ක්‍රියාකාරකම I

- පියවර 1 අරය 5 cm වන වෘත්තයක් අඳින්න. එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න.
- පියවර 2 රූපයේ පරිදි වෘත්තය මත A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කර OA හා OB යා කරන්න.
- පියවර 3 කෝණමානය භාවිතයෙන් $OA \cap$ හා $OB \cap$ ලම්බ වන පරිදි සරල රේඛාවක් අඳින්න.
- පියවර 4 එම සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කර යා කරන්න.
- පියවර 5 $AP, BP, \widehat{AOP}, \widehat{BOP}, \widehat{APO}, \widehat{BPO}$ මැන අගය සොයන්න.
- විවිධ වෘත්ත අඳිමින් ඉහත ක්‍රියාකාරකම සිදු කරමින් ලබා ගත හැකි නිගමන මොනවාදැයි සොයා බලන්න.
- ඉහත සොයා ගත් සම්බන්ධතා පහත පරිදි ප්‍රමේයයක් ලෙස ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.





ප්‍රමේයයේ විලෝමය

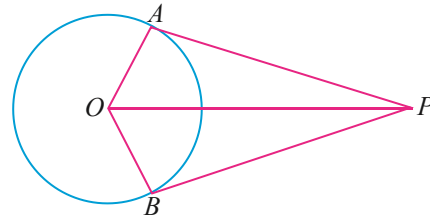
බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශ දෙකක් අඳිනු ලැබේ නම්,

- (i) ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.
- (ii) බාහිර ලක්ෂ්‍යය හා වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.
- (iii) ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයේ සමාන කෝණ ආපාතනය කරයි.



ඉහත ප්‍රමේයය පහත පරිදි විධිමත්ව සාධනය කළ හැකි ය.

දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට A හා B හිදී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් PA හා PB වේ.



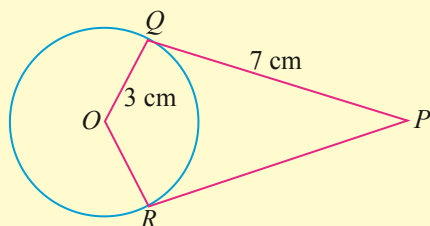
- සාධනය කළ යුත්ත :
- (i) $AP = BP$ බව
 - (ii) $\widehat{APO} = \widehat{BPO}$ බව
 - (iii) $\widehat{POA} = \widehat{POB}$ බව

සාධනය : POA හා POB Δ වල,
 $OA = OB$ (එකම වෘත්තයක අර සමාන වේ.)
 $OP = OP$ (පොදු පඳය)
 $\widehat{OAP} = \widehat{OBP} = 90^\circ$ (ස්පර්ශක අරයට ලම්බක නිසා)
 $\therefore AOP \Delta \equiv POB \Delta$ (කර්ණ පා අවස්ථාව)

අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සැලකීමෙන්,
 (i) $AP = BP$ වේ.
 (ii) $\widehat{APO} = \widehat{BPO}$ වේ.
 (iii) $\widehat{POA} = \widehat{POB}$ වේ.

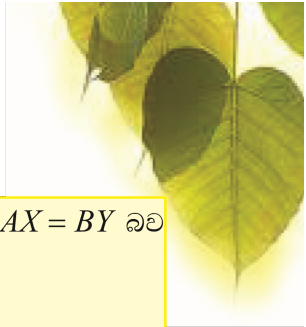
නිදසුන 1

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට P බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශකය PQ හා PR වේ. $PQ = 7$ cm, $OQ = 3$ cm නම් $OQPR$ රූපයේ පරිමිතිය සොයන්න.



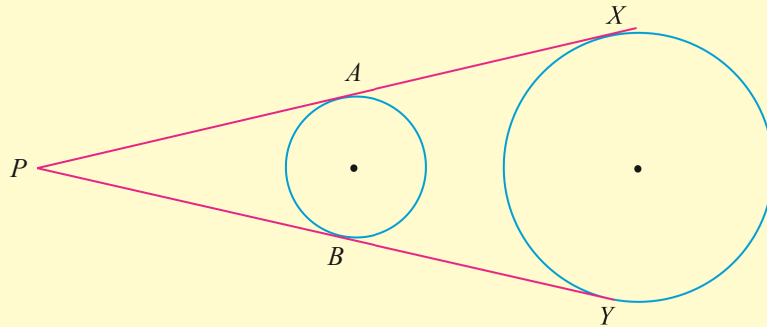
$PR = PQ$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශක දිගින් සමාන නිසා)
 $PR = 7$ cm
 $OQPR$ පරිමිතිය = 3 cm + 7 cm + 7 cm + 3 cm
 = 20 cm





නිදසුන 2

දී ඇති රූපයේ PAX හා PBY යනු වෘත්ත දෙකට ම පොදු ස්පර්ශක 2කි. $AX = BY$ බව සාධනය කරන්න.



දත්තය : PAX හා PBY යනු වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශක 2කි.
 සාධනය කළ යුත්ත : $AX = BY$ බව
 සාධනය : බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ස්පර්ශක දිගින් සමාන නිසා,

$$PX = PY \text{ ————— } \textcircled{1}$$

$$PA = PB \text{ ————— } \textcircled{2}$$

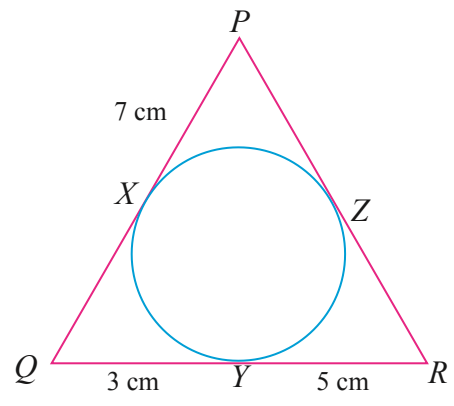
$$\textcircled{1} - \textcircled{2},$$

$$PX - PA = PY - PB$$

$$AX = BY$$

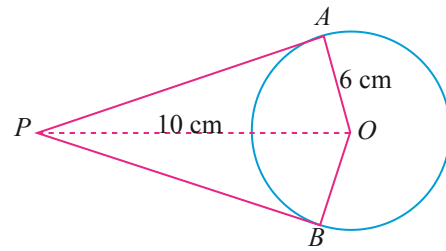
20.2 අභ්‍යාසය

- රූපයේ PQ, QR, PR පිළිවෙලින් වෘත්තය මත X, Y, Z හිදී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. $PX = 7 \text{ cm}, QY = 3 \text{ cm}, YR = 5 \text{ cm}$ නම් PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

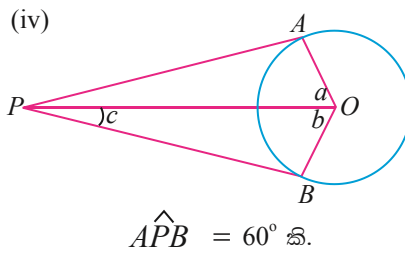
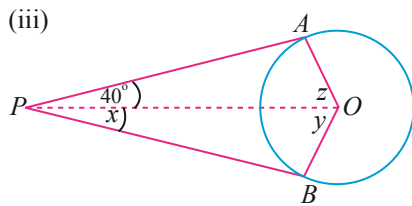
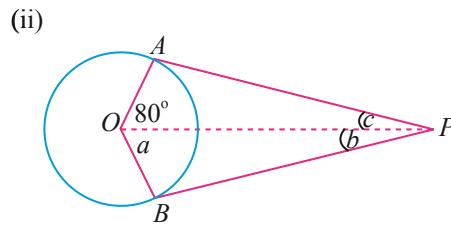
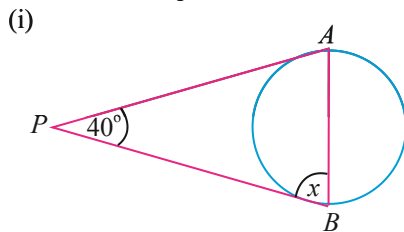




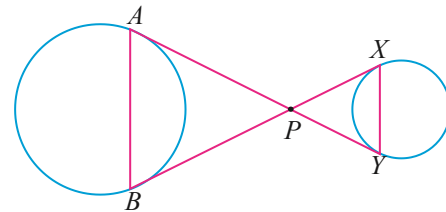
2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක P බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක 2ක් PA හා PB වේ. $OA = 6 \text{ cm}$, $PO = 10 \text{ cm}$ නම් $OAPB$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.



3. විජීය පදවලින් දැක්වෙන කෝණවල අගය සොයන්න. PA හා PB ස්පර්ශක වන අතර වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.



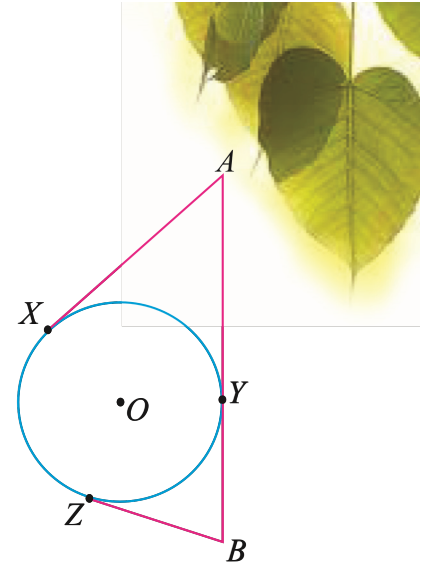
4. රූපයේ AY හා BX යනු වෘත්ත දෙකට ම පොදු ස්පර්ශක වේ. AY හා BX රේඛා P හිදී ඡේදනය වේ. $AB \parallel XY$ බව සාධනය කරන්න.



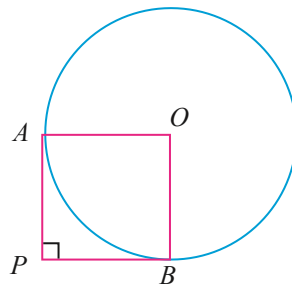
5. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට බාහිරින් පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක PA හා PB වේ. PO හා AB සරල රේඛා X හිදී ඡේදනය වේ.

- (i) $AXP \Delta \equiv BXP \Delta$ බව,
- (ii) AB හා PO ලම්බක බව,
- (iii) $\widehat{AOB} = 2\widehat{PAB}$ බව සාධනය කරන්න.

6. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට Y හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. A හා B හිදී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AX හා BZ වේ. $AX + ZB = AB$ බව සාධනය කරන්න.



7. රූපයේ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට P බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක PA හා PB වේ. $\hat{APB} = 90^\circ$ නම් $OAPB$ සමචතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



සාරාංශය

- වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බකය ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.
- වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයකදී අඳින ලද ස්පර්ශකය, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි අරයට ලම්බක වේ.
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශ දෙකක් අඳිනු ලැබේ නම්,
 - ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.
 - බාහිර ලක්ෂ්‍යය හා වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.
 - ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයේ සමාන කෝණ ආපාතනය කරයි.

