# 8 පයිතගරස් ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම අධ්‍යයනය කිරීමෙන් ඔබට,
- පයිතගරස් ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට,
- පයිතගරස් සම්බන්ධය ඇසුරෙන් ගණනය කිරීම්වල යෙදීමට,

හැකියාව ලැබේ.

## 8.1 හැඳින්වීම

අලුත් පිරිවෙන් ශාලාව සෑදීමට පැමිණි පෙදරේරුවෙකු ගෙපළ කැපීමට පෙර ලණු ඇදීම ආරම්භ කළ මොහොතේ සිට චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවන් ඒ දෙස බලා සිටී. ඔවුන් අතර ඇති වූ සංවාදය පහත වේ.

පොඩි හාමුදුරුවෝ - මාමේ ගෙපළ කැපීමට පෙර ලණු අදින්නේ ඇයි?

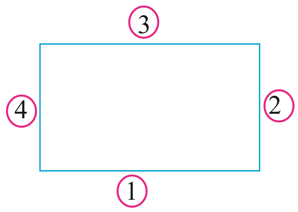
පෙදරේරු මාමා - පොඩි හුමුදුරුවන්ට තේරෙන්නේ නැත්තේ ඇයි? ලණුවක් ඇද ඇති විට හරි කෙළින් ගෙපළ කපා ගන්න පුළුවන්.

පොඩි හාමුදුරුවෝ - එතකොට මේ පැත්තට සමාන දිගක් අනෙක් පැත්තේ තියෙනවා කියල මාමා කොහොමද කියන්නේ.

පෙදරේරු මාමා - මට තේරුනේ නෑ පොඩි හාමුදුරුවෝ කියන දේ.

පොඩි හාමුදුරුවෝ - ඉන්නකෝ මම බිම ඒක ඇඳලා පෙන්වන්න.

එහෙම කියපු පොඩි හාමුදුරුවෝ චතුරස්‍රයක් බිම ඇඳ පැති හතර 1, 2, 3 හා 4 ලෙස නම් කරයි.




පොඩි හාමුදුරුවෝ - මාමා කියන්නේ කොහොම ද 1 පැත්ත සහ 2 පැත්ත සෘජුකෝණී බව ඒ කියන්නේ හරි හතරැස් බව? ඒ වගේම 2 පැත්ත සහ 4 පැත්ත රේල් පාර වගේ හරි කෙළින්ම යන බව,

පෙදරේරු මාමා - ආ ඒකට අපිට කියා දී තියෙනවා ලණු ඇදීමට පෙර මුලු පරස් අරින්න කියලා. ඒක තමයි අපි 3, 4, 5 ක්‍රමය භාවිත කළේ.

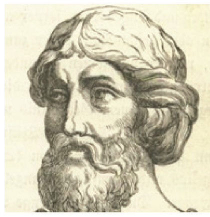
චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවන්ට එය තේරුනේ නෑ. '' මුලු පරස් අරින්න'' ඒ ගැන ඇසීමට චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවන්ට බැරි විය. එයට හේතුව පිරිවෙණ පටන් ගන්න සීනුව නාද වුණ නිසා ය.

චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවෝ ගණිත ගුරුතුමාගෙන් මෙසේ ඇසුවේ ය.

පොඩි හාමුදුරුවෝ - මොකක් ද සර් මුලු පරස් අරිනවා කියන්නේ.
ගුරුතුමා - ආ ඒක ද? මම ඒ ගැන අද පන්තියේදී කියල දෙන්නම්.

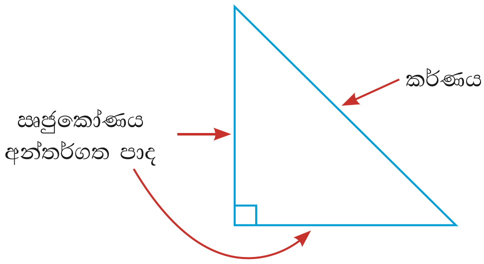
එසේ කියූ ගුරුතුමා පන්තියේ දී අද ඉගෙන ගන්න පාඩමේ නම ලියන්න ළමයි කියල ''**පයිතගරස් ප්‍රමේයය**'' යැයි කළු ලෑල්ලේ ලිව්වේ ය.

චන්දිම පොඩි හාමුදුරුවන්ට තවත් ප්‍රශ්නයක් ඇති වුණි. සර් කිවුවේ මුලු පරස් අරිනවා කියන වචනයේ තේරුම කියනවා කියල දැන් ''පයිතගරස් ප්‍රමේයය'' කියල අලුත් පාඩමක් පටන් ගත්තා, මේ දෙක අතර ඇති සම්බන්ධය කුමක් ද? ගුරුතුමා මෙලෙස පාඩම ආරම්භ කරන ලදි.



ක්‍රි.පූ. 6 වන සියවසේ දී පයිතගරස් නම් ග්‍රීක ගණිතඥයා විසින් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල පාදවල දිග අතර පවත්නා ජ්‍යාමිතික සම්බන්ධතාවක් ඉදිරිපත් කරන ලදි. ඒ කාලයට පෙරත් ඉන්දියාවේ පැවති නොයෙක් ශිෂ්ඨාචාර අතර ද එම සම්බන්ධතාව දැන සිටි බවට සාක්ෂි ඇතත් මෙම සම්බන්ධතාව මුල්වරට ජ්‍යාමිතිකව සාධනය කරන්නට ඇත්තේ පයිතගරස් නම් විද්‍යාඥයා විසින් යැයි කියා ගුරුතුමා පාඩම විස්තර කළේ ය.

මෙම සම්බන්ධය හඳුනා ගැනීමට ප්‍රථම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල පාද හඳුනා ගැනීම වැදගත් බව ගුරුතුමා පවසන ලදි. ඉන් පසු ඔහු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් කළු ලෑල්ල මත ඇඳ පහත දැක්වෙන පරිදි එහි පාද නම් කළේ ය.



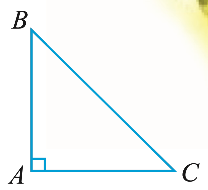

ගුරුතුමා කළු ලෑල්ල මත පහත දැක්වෙන කරුණු ද ලියා දක්වන ලදි.

- ත්‍රිකෝණයක එක් කෝණයක් $90^{\circ}$ වේ නම්, එම ත්‍රිකෝණ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ වේ.
- සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක සෘජුකෝණයට සම්මුඛව පිහිටි පාදය කර්ණය වේ.
- කර්ණය හැර සෙසු පාද සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ සෘජුකෝණය අන්තර්ගත පාද වේ.
- සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ දිගම පාදය කර්ණය වේ.
- සෘජුකෝණය හැර ඉතිරි කෝණවල එකතුව $90^{\circ}$ වේ.

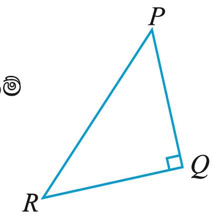
මෙලෙස ගුරුතුමා පාඩම වෙනතකට යොමුකර සිසුන්ගේ කුතුහලය තවත් වැඩි කළේ ය.

8.1 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දක්වා ඇති ත්‍රිකෝණයේ සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක හා කර්ණය නම් කරන්න.



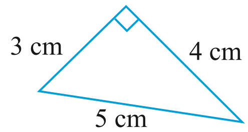

2. දී ඇති ත්‍රිකෝණයේ සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක හා කර්ණය නම් කරන්න.



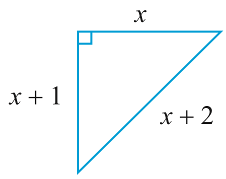

3. (i) සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එහි කර්ණය $x$ ලෙස නම් කරන්න. සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක $y$ හා $z$ ලෙස නම් කරන්න.

(ii) සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් අඳින්න. එහි කර්ණය $a$ ලෙස ද සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක $b$ හා $c$ ලෙස නම් කරන්න.

4. දී ඇති ත්‍රිකෝණය සළකන්න. හිස්තැනට ගැළපෙන අගය වරහන් තුළින් තෝරා ලියන්න.
මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයේ දිග වනුයේ ........... ය.
(3 cm, 4 cm, 5 cm)




5. දී ඇති ත්‍රිකෝණයට අනුව හිස්තැනට ගැළපෙන අගය වරහන් තුළින් තෝරා ලියන්න.
මෙම ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයේ දිග වනුයේ ........... ය.
[$x$ cm, ($x$+1) cm, ($x$+2) cm]

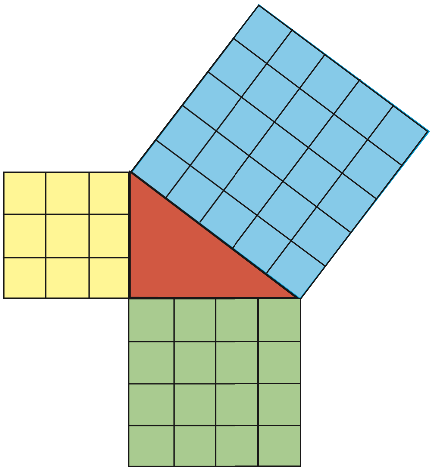



## 8.2 පයිතගරස් ප්‍රමේයය

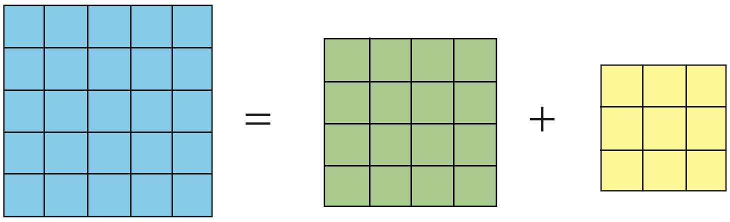
සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද අතර පවතින සම්බන්ධයක් පහත පරිදි ප්‍රමේයයක් ලෙස ඉදිරිපත් කරමු.

### ප්‍රමේයය

**සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත ඇඳ ඇති සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, සෘජුකෝණය අඩංගු ඉතිරි පාද දෙක මත ඇඳ ඇති සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන වේ.**



මෙහි රතුපාටින් පෙන්වා ඇති සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය මත ඇඳ ඇති නිල් පාට සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, සෘජුකෝණය අඩංගු ඉතිරි පාද දෙක මත ඇඳ ඇති කහ පාට හා කොළ පාට සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන වේ.



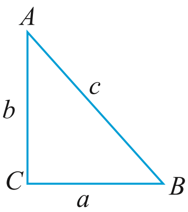

පැත්තක කොටු 5ක් ඇත.　　පැත්තක කොටු 4ක් ඇත.　　පැත්තක කොටු 3ක් ඇත.

| නිල් පාට සමචතුරස්‍රයේ කොටු 25ක් ඇත. | | කොළ පාට සමචතුරස්‍රයේ කොටු 16ක් ඇත. | | කහ පාට සමචතුරස්‍රයේ කොටු 9ක් ඇත. |
|---|---|---|---|---|
| 25 | = | 16 | + | 9 |
| $5 \times 5$ | = | $4 \times 4$ | + | $3 \times 3$ |
| $5^2$ | = | $4^2$ | + | $3^2$ |

මෙමගින් එළඹිය හැකි නිගමනය වන්නේ, ඕනෑ ම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණයේ දිගෙහි වර්ගය, ඉතිරි පාදවල දිගෙහි වර්ගවල එකතුවට සමාන වේ යන්නයි.

මෙලෙස පයිතගරස් ප්‍රමේයය මගින් පයිතගරස් සම්බන්ධය ගොඩනගා ගත හැකි ය.

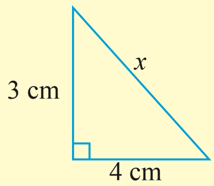
$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$



පහත නිදසුන් මගින් දැක්වෙන්නේ මෙම සම්බන්ධය භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණවල $x$ මගින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයා ඇති ආකාරයයි.

**නිදසුන 1**

දී ඇති ත්‍රිකෝණයේ $x$ මගින් දැක්වෙන පාදයේ දිග සොයන්න.




$x^2 = (3\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2$

$x^2 = 9\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2$

$x^2 = 25\text{ cm}^2$

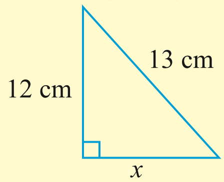
$x = \sqrt{(25\text{ cm}^2)}$

$x = 5\text{ cm}$

මේ අනුව 3, 4, 5 යනු ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද තුනකට සම්බන්ධ කළ හැකි පූර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් බව පෙනේ.

**නිදසුන 2**

දී ඇති ත්‍රිකෝණයේ $x$ මගින් දැක්වෙන පාදයේ දිග සොයන්න.




$x^2 = (13\text{cm})^2 - (12\text{ cm})^2$

$x^2 = 169\text{ cm}^2 - 144\text{cm}^2$

$x^2 = 25\text{ cm}^2$

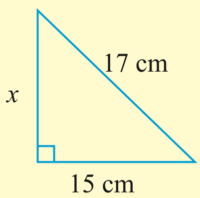
$x = \sqrt{(25\text{ cm}^2)}$

$x = 5\text{ cm}$

මේ අනුව 5, 12, 13 යනු ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද තුනකට සම්බන්ධ කළ හැකි පූර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් බව පෙනේ.

**නිදසුන 3**

$x$ මගින් දැක්වෙන පාදයේ දිග සොයන්න.




$x^2 = (17\text{cm})^2 - (15\text{cm})^2$

$x^2 = 289\text{ cm}^2 - 225\text{ cm}^2$

$x^2 = 64\text{ cm}^2$

$x = \sqrt{(64\text{ cm}^2)}$

$x = 8\text{ cm}$

මේ අනුව 8, 15, 17 යනු ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද තුනකට සම්බන්ධ කළ හැකි පූර්ණ සංඛ්‍යා තුනක් බව පෙනේ.

ඉහත නිදසුන 1, නිදසුන 2 හා නිදසුන 3 මගින් ලැබුණු,

3, 4, 5

5, 12, 13

8, 15, 17

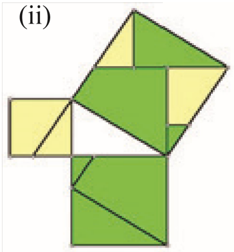
යනු පයිතගරස් ත්‍රිත්ව වේ.

මෙවැනි ත්‍රිත්ව තවත් ඇත්දැයි සොයා බලන්න.

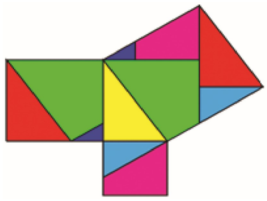
පයිතගරස් ප්‍රමේයය මගින් පෙන්වා දී ඇති සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵල ආශ්‍රිත සම්බන්ධය පහත දැක්වෙන රූප සටහන් මගින් තහවුරු කර ගත හැකි ය. මෙහි දැක්වෙන රූප කාඩ්බෝඩ් මත ඇඳ කපා බලන්න.

(i)

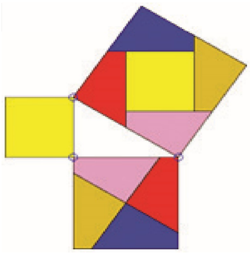
(ii)



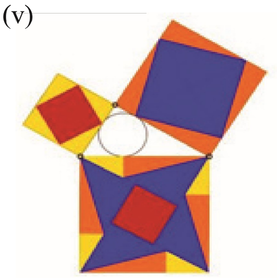
(iii)



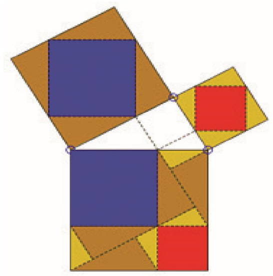
(iv)



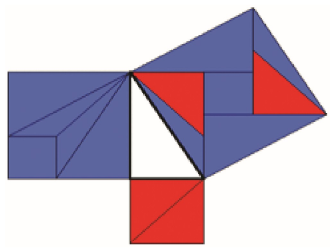
(v)



(vi)



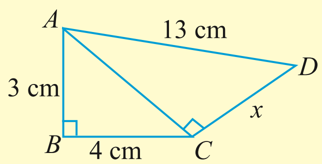
(vii)



පයිතගරස් සම්බන්ධය භාවිතයෙන් තව දුරටත් ගැටලු විසඳමු.

**නිදසුන 4**

$x$ හි අගය සොයන්න.




$ABC$ ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්,

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$AC^2 = (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$

$AC^2 = 16\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2$

$AC^2 = 25\text{ cm}^2$

$AC = \sqrt{(25\text{ cm}^2)}$

$AC = 5\text{cm}$

$ACD$ ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්,

$CD^2 = AD^2 - AC^2$

$x^2 = (13 \text{ cm})^2 - (5 \text{ cm})^2$

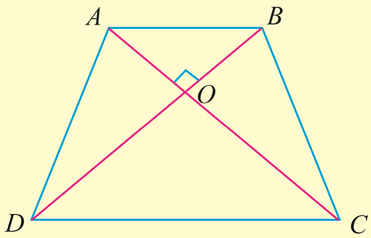
$x^2 = 169 \text{ cm}^2 - 25 \text{ cm}^2$

$x^2 = 144 \text{ cm}^2$

$x = \sqrt{(144 \text{ cm}^2)}$

$x = 12 \text{ cm}$

**නිදසුන 5**




$ABCD$ චතුරස්‍රයේ විකර්ණ සෘජුකෝණිව $O$ හි දී ඡේදනය වේ.
$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ බව පෙන්වන්න.

$ABO$ ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්, $AB^2 = AO^2 + BO^2$ —— (i)

$CDO$ ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්, $CD^2 = CO^2 + DO^2$ —— (ii)

$ADO$ ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්, $AD^2 = AO^2 + DO^2$ —— (iii)

$BCO$ ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදීමෙන්, $BC^2 = CO^2 + BO^2$ —— (iv)

(i) + (ii)
$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$

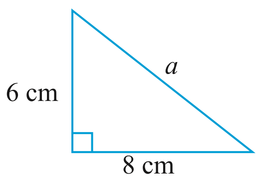
(iii) + (iv)
$AD^2 + BC^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$

$\therefore AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

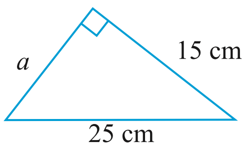
## 8.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල $a$ මගින් දැක්වෙන දිග සොයන්න.

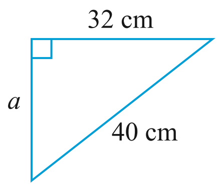
(i)



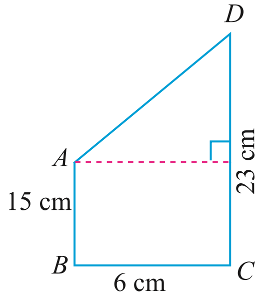

(ii)




(iii)



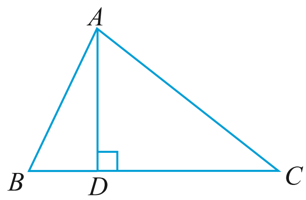
2. රූපයේ දැක්වෙන දත්ත අනුව $AD$ දිග සොයන්න.




3. වෘත්තයක කේන්ද්‍රයේ සිට 12 cm දුරින් පිහිටි ජ්‍යායක දිග 18 cm වේ. වෘත්තයේ අරය සොයන්න.

4. $ABCD$ සමචතුරස්‍රයේ $AC^2 = 2AB^2$ බව පෙන්වන්න.

5. රූපය දැක්වෙන $ABC$ ත්‍රිකෝණයේ ඇඳ ඇති උච්චය $AD$ ය. $AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2$ බව පෙන්වන්න.




## සාරාංශය

- සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත ඇඳ ඇති සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, සෘජුකෝණය අඩංගු ඉතිරි පාද දෙක මත ඇඳ ඇති සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන වේ.