

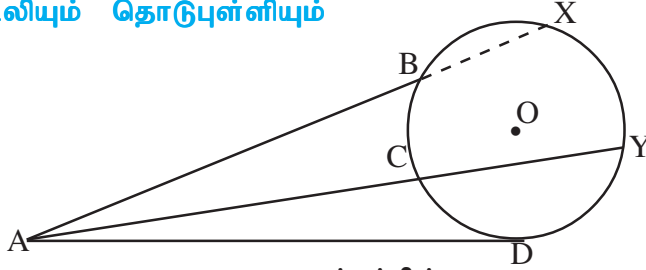
22

தொடலிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம்

- வட்டமொன்றின் தொடலிகளுடன் தொடர்பான கோணங்களின் இயல்புகளை அறிதலும் பயன்படுத்தலும்
- வெளிப்புள்ளி ஒன்றிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் இயல்புகளை அறிந்து கொள்ளல்.
- வட்டத்தின் தொடலியானது தொடுபுள்ளியிலுள்ள நாணுடன் ஆக்கும் கோணத்திற்கும் ஒன்றுவிட்ட வட்ட துண்டக்கோணத்திற்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பை அறிந்து பிரயோகித்தல்.
என்பன பற்றிய விளக்கத்தைப் பெற்றுக்கொள்வீர்கள்.

22.1 தொடலியும் தொடுபுள்ளியும்



O வை மையமாக உடைய வட்டத்தில்,

- கோடு AB ஆனது வட்டத்தை B இல் சந்திக்கின்றது. நீட்டப்பட்ட AB ஆனது மீண்டும் வட்டத்தை X இல் வெட்டுகின்றது.
- கோடு ACY ஆனது வட்டத்தை C இலும் Y இலும் வெட்டுகின்றது.
- கோடு AD ஆனது வட்டத்தை D இல் சந்திக்கின்றது. D ஆனது இக்கோட்டில் வட்டத்தை சந்திக்கும் ஒரேயொரு புள்ளியாகும். ஆகவே AD வட்டத்தின் தொடலியாகும்.

வட்டம், அதன் தொடலி தொடர்பான பின்வரும் பெறுபேறுகள் முக்கியமானவை.

- (A) வட்டமொன்றிக்கு வரையப்பட்ட தொடலியின் தொடு புள்ளியில் இருந்து வரையப்பட்ட ஆரையானது வட்ட மையத்தில் இருந்து தொடலிக்கு வரையும் கிட்டிய தூரத்திற்குச் சமனாகும்.
- (B) வட்டமொன்றின் மீதுள்ள புள்ளியொன்றில் இருந்து அப்புள்ளியினூடாகச் செல்லும் ஆரைக்கு வரையும் செங்குத்து அவ்வட்டத்தின் தொடலியாகும்.

- (C) பெறுபேறு B இன் மறுதலை பின்வருமாறு. வட்டமொன்றின் மீதுள்ள புள்ளியில் இருந்து வரையும் தொடலியானது அப்புள்ளியில் வரையப்படும் ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும்.
- (D) தொடு புள்ளியைத் தவிர்ந்த தொடலியில் கிடக்கும் புள்ளிகள் எல்லாம் வட்டத்திற்கு வெளியே இருக்கும்.

செயற்பாடு 22.1

- O ஐ மையமாகக் கொண்டு 3cm ஆரையுள்ள வட்டமொன்றை வரைக.
- வட்டத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியை A எனக் குறிக்க.
- மையம் O ஐயும் புள்ளி A ஐயும் இணைக்க.
- ஆரை OA இற்கு A இல் செங்குத்தொன்றை வரைக. அதனை PA எனக் குறிக்க PA ஐ Q வரை நீட்டுக.
- PAQ எனும் கோட்டில் X எனும் புள்ளியைக் குறிக்க. O, X ஐத் தொடுக்க.
- OX இன் நீளத்தைக் காண்க. $OX > OA$ என எழுத முடியுமா?
- இதிலிருந்து PAQ எனும் கோட்டில் புள்ளி A ஐத் தவிர வேறு புள்ளிகளிலிருந்து மையத்துக்கு வரையும் கோட்டின் நீளத்தை ஆரை OA உடன் ஒப்பிடுக.

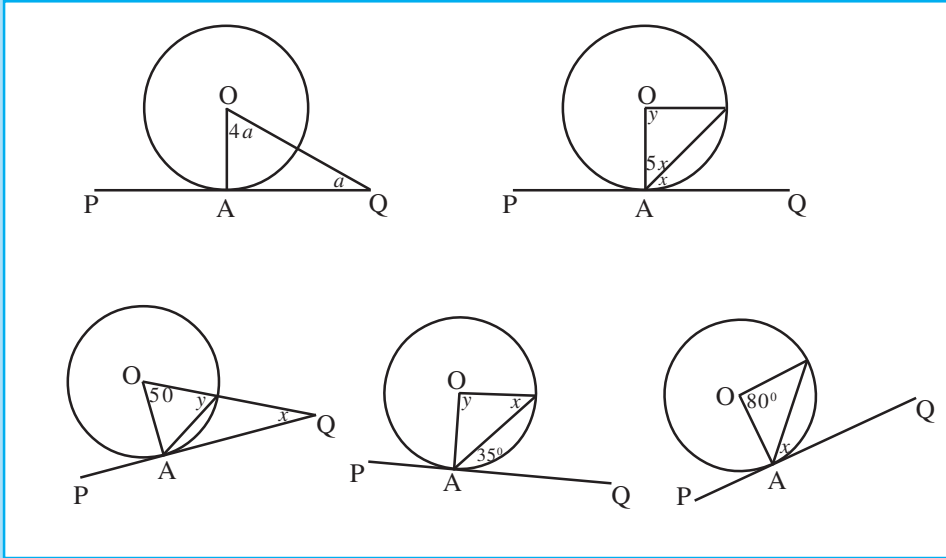
செயற்பாடு 22.2

- கடதாசி அட்டையில் (பிறிஸ்டல் போர்ட்) 5 cm ஆரையுள்ள வட்ட மொன்றை வரைக. மையத்தை O எனக் குறிக்க.
- வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளி A இல் ஊசி ஒன்றைக் குத்துக. நூல் ஒன்றை அவ்வூசியில் இணைக்க. நூலின் மறு முனையில் மற்றொரு ஊசி B ஐ இணைக்க.

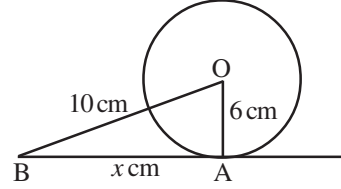
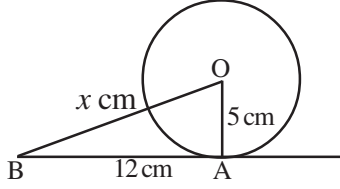
- நூல் இறுக்கமாக இருக்கக் கூடியவாறு ஊசி B ஐ அசைக்கும்போது ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் நூலானது வட்டத்தை மட்டு மட்டாகத் தொடும். அச் சந்தர்ப்பத்தில் ஊசி B ஐ நிலைப்படுத்தி மட்டுமட்டாகத் தொடும் புள்ளியை P எனக் குறிக்க.
- OP ஐ இணைத்து கோணம் OPA ஐ அளக்க.

பயிற்சி 22.1

உருக்களில் PAQ ஆனது வட்டத்தின் தொடலியாகும். உருக்களில் தரப்பட்டுள்ள ஏனைய தரவுகளையும் உபயோகித்து எழுத்திடப்பட்ட கோணங்களில் பெறுமானங்களைக் காண்க.

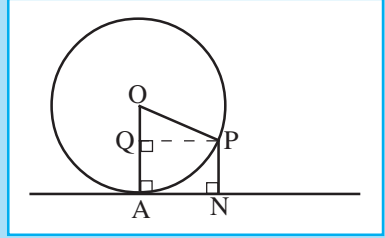


2. தரப்பட்ட உருக்களில் O ஐ மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு A இல் தொடலி வரையப்பட்டுள்ளது. எழுத்துக்களால் குறிப்பிடப்பட்ட பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.



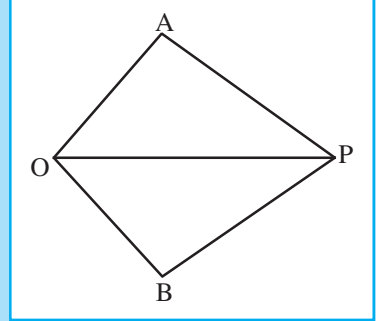
3. AN என்பது O ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் தொடலியாகும். A தொடுபுள்ளியாகும். $ANP = 90^\circ$, $AN = 15$ cm, $PN = 9$ cm எனின்,

- PQ இன் நீளம் யாது?
- AQ இன் நீளம் யாது?
- வட்டத்தின் ஆரை r எனின் OQ இன் நீளம் யாது?
- வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.



4. OAP ,BOP எனும் இரு செங்கோண முக்கோணிகள் இங்கு காட்டப்பட்டுள்ளன. அதில் $OA=OB$ ஆகும்.

- $\triangle OPA$, $\triangle BOP$ என்பன ஒருங்கிசைவன எனக் காட்டுக.
- $\hat{O}PA$ கோணத்துக்குச் சமமான ஒரு கோணத்தைக் குறிப்பிடுக.
- \hat{AOP} கோணத்துக்குச் சமமான ஒருகோணத்தைக் குறிப்பிடுக.
- நீளத்தில் AP இற்குச் சமமான ஒரு பக்கத்தைக் குறிப்பிடுக.



5. O,C என்பவற்றை மையமாகவுடைய இரு வட்டங்கள் A, B இல் இடைவெட்டுகின்றன. தரப்பட்ட இரு வட்டங்களின் மையங்களாகும். நீட்டப்பட்ட OC ஆனது C ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தை C இல் வெட்டுகிறது.

- OA, OB,TA,TB என்பவற்றை வரைக.
- $\triangle OAT$, $\triangle OBT$ என்பன ஒருங்கிசைவன எனக் காட்டுக.

(iii) \widehat{OTA} இற்குச் சமனான கோணத்தை குறிப்பிடுக.

(iv) \widehat{TOA} இற்குச் சமனான ஒரு கோணத்தைக் குறிப்பிடுக.

22.2 வெளிப்புள்ளி ஒன்றில் இருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடலி

வெளிப்புள்ளி ஒன்றிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடலியொன்று வரையப்பட்டால் அத்தொடலியுடன் தொடர்பான பின்வரும் தேற்றம் மிக முக்கியமானது.

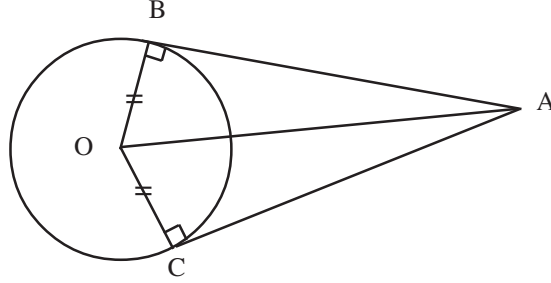
செயற்பாடு 22.3

- 3cm ஆரையுள்ள வட்டம் ஒன்றை வரைக. மையத்தை O எனப் பெயரிடுக.
- விட்டத்தில் அமையாத இரண்டு புள்ளிகள் B, C ஐ வட்டத்தில் குறித்து அப்புள்ளிகளில் வட்டத்திற்கு தொடலிகளை வரைக.
- தொடலிகள் சந்திக்கும் புள்ளியை A எனப் பெயரிடுக.
- OA ஐ இணைக்க
- இரண்டு முக்கோணிகள் AOB, AOC தோன்றும். அவற்றில் ஒன்றை வெட்டி எடுக்க.
- முக்கோணிகளை ஒன்றுடன் ஒன்று பொருத்திப் பார்க்க.
- இதிலிருந்து என்ன முடிவுகளுக்கு வரலாம் எனவும் கூறுக

தேற்றம்.

வெளிப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடலிகள் வரையப்பட்டால்,

- (i) தொடலிகள் இரண்டும் நீளத்தில் சமனாகும்.
- (ii) தொடலிகள் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணங்கள் சமனாகும்.
- (iii) வெளிப் புள்ளியையும் மையத்தையும் இணைக்கும் கோடு தொடலிகள் இரண்டிற்கும் இடையிலுள்ள கோணத்தை இரு சமகூறிடும்.



தரவு : O ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் AB, AC தொடலிகளாகும். B, C என்பன தொடுபுள்ளிகளாகும்.

நி.வே. : i. $AB = AC$
ii. $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$
iii. $\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$

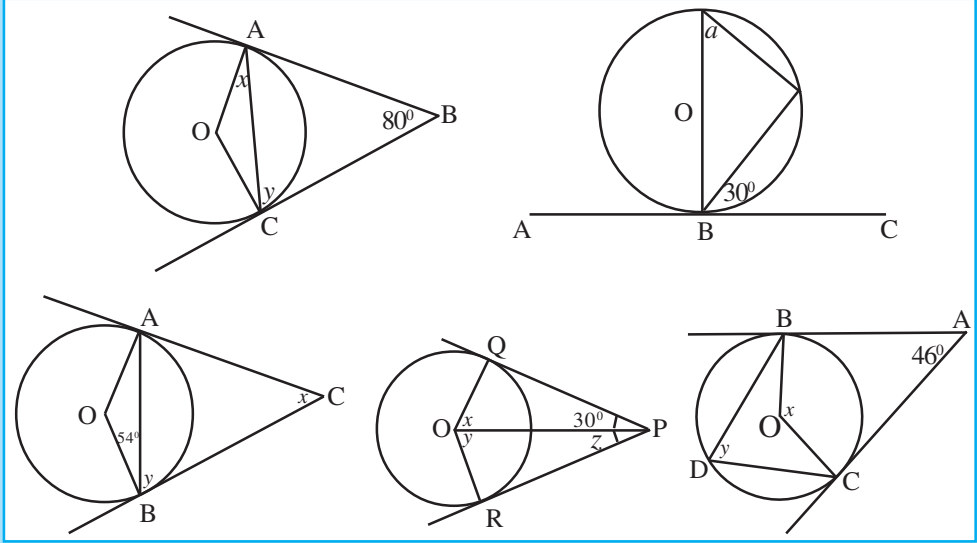
நிறுவல் : $\triangle OBA, \triangle OCA$ இல்
 $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^\circ$ (தொடலி, ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும்)
 $\triangle OBA, \triangle OCA$ எனும் செங்கோண முக்கோணிகளில்,
 $OB = OC$ (ஆரைகள்)
 $OA = OA$ (பொது)
 $\therefore \triangle OAB \cong \triangle OAC$ (செ.ப:ப)

இரண்டு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைவானவை ஆதலால், $AB = AC$

$\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$
 $\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$ ஆகும்.

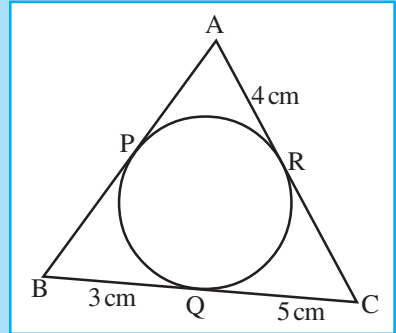
பயிற்சி 22.2

1. வட்டத்திற்கு வெளிப்புறத்திலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் தரப்பட்டுள்ளன. படத்தில் எழுத்திடப்பட்ட கோணங்களைக் காண்க.



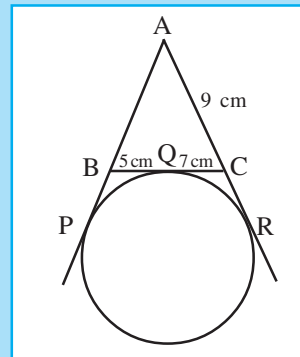
2. AB, BC, CA என்பன வட்டத்தின் தொடலிகளாகும்.

1. AP இன் நீளம் யாது?
2. BP இன் நீளம் யாது?
3. CR இன் நீளம் யாது?
4. முக்கோணி ABC இன் சுற்றளவைக் காண்க.



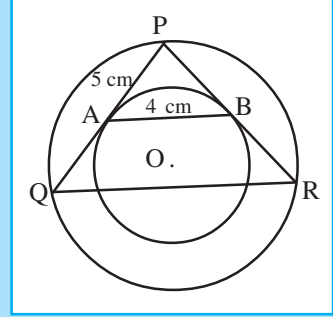
3. AP, AR, CB என்பன வட்டத்தின் தொடலிகள் ஆகும்.

1. BP இன் நீளம் யாது?
2. CR இன் நீளம் யாது?
3. AR இன் நீளம் யாது?
4. AP இன் நீளம் யாது?
5. AB இன் நீளம் யாது?



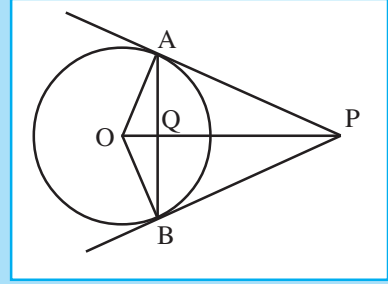
4. O என்பது இருவட்டங்களிற்கும் பொது மையம். PQ, PR என்பன சிறிய வட்டத்தின் தொடலிகளாகும். $PQ = PR = 10\text{cm}$

1. \widehat{OAP} இன் பெறுமானம் யாது?
2. \widehat{AQ} இன் நீளம் யாது?
3. \widehat{PB} இன் நீளம் யாது?
4. \widehat{QR} இன் நீளம் யாது? காரணம் தருக.
5. $\triangle PQR$ இன் சுற்றளவைக் காண்க.



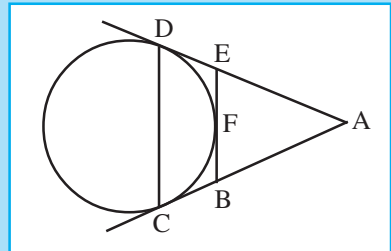
5. PA, PB என்பன O ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் இரு தொடலிகளாகும்.

- (i) $\triangle PAQ, \triangle PBQ$ என்பன ஒருங்கிசையும் எனக் காட்டுக.
- (ii) $AQ = BQ$ எனக் காட்டுக.
- (iii) $\widehat{PQA} = \widehat{PQB}$ எனக் காட்டுக.
- (iv) $\widehat{PQA}, \widehat{PQB}$ என்பவற்றின் பருமன் யாது?
- (v) OP ஆனது AB இன் செங்குத்திருகூறாக்கி எனக் காட்டுக.

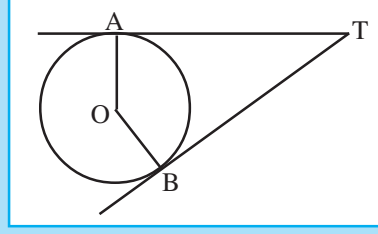


6. படத்திற் காட்டியவாறு வட்டத்திற்கு C, D, F என்பவற்றில் வரையப் பட்ட தொடலிகள் முறையே CBA, DEA, BFE ஆகும்.

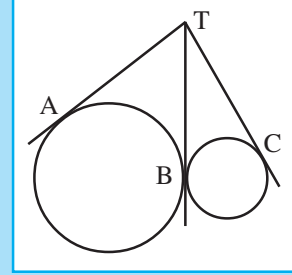
- (i) AD ஐ இரண்டு நீளங்களின் கூட்டுத்தொகையாகத் தருக.
- (ii) AC ஐ இரண்டு நீளங்களின் கூட்டுத்தொகையாகத் தருக.
- (iii) ED இற்கு சமமான நீளமொன்றை எழுதுக.
- (iv) BC இற்கு சமமான நீளமொன்றை எழுதுக.
- (v) $AD + AC = AB + BE + AE$ என்று காட்டுக.



7. O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்திற்கு T இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் TA, TB ஆகும். AOBT என்பது வட்டநாற்பக்கல் என நிறுவுக.

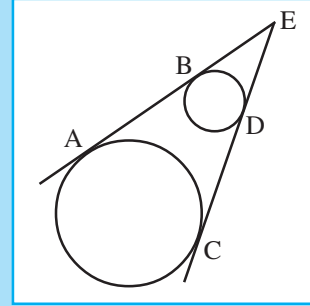


8. உருவில் காட்டப்பட்ட இரண்டு வட்டங்களுக்கும் TB என்பது பொதுத் தொடலியாகும். TA என்பது பெரிய வட்டத்திற்கும் TC என்பது சிறிய வட்டத்திற்குமான தொடலியாகும். $TA = TC$ என நிறுவுக.



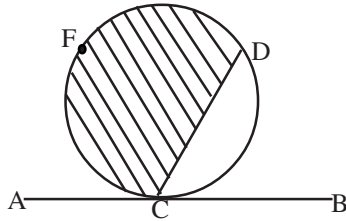
9. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு EBA , EDC என்பன இரு வட்டங்களினதும் பொதுத் தொடலிகளாகும்.

- (i) $AB = CD$
(ii) $AC \parallel BD$ என நிறுவுக.

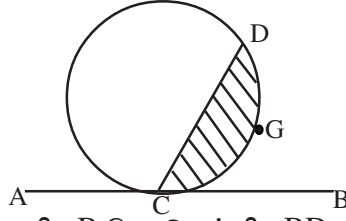


22.3 ஒன்று விட்ட வட்டத் துண்டம்

1. உருவில் \widehat{BCD} இருக்கும் பக்கத்திற்கு எதிர்ப்பக்கத்திலுள்ள CFD எனும் வட்டத்துண்டம் BCD இன் ஒன்று விட்ட வட்டத் துண்டம் (Alternate Segment) எனப்படும்.

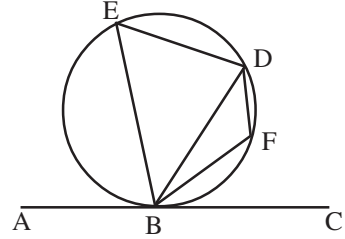


2. உருவில் \widehat{ACD} இருக்கும் பக்கத்திற்கு எதிர்ப்பக்கத்திலுள்ள CGD எனும் வட்டத்துண்டம் ACD இன் ஒன்று விட்ட வட்டத் துண்டம் எனப்படும்.



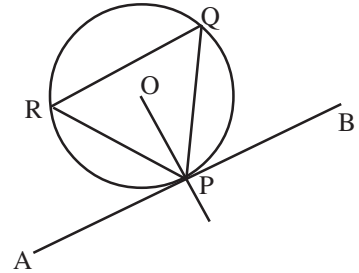
உருவில் ABC தொடலி, B தொடுபுள்ளி, BD நாண் அது வட்டத்தை இரண்டு துண்டங்களாகப் பிரிக்கின்றது.

- \widehat{DBC} இற்கு \widehat{DEB} ஒன்றுவிட்ட துண்டக்கோணமாகும்.
- \widehat{DBA} இற்கு \widehat{DFB} ஒன்று விட்ட துண்டக்கோணமாகும்.



செயற்பாடு. 22.4

- O ஐ மையமாகக் கொண்ட 5 cm ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தை பிறிஸ்ரல் அட்டையில் வரைக.
- வட்டத்தில் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி P ஐக் குறிக்க. P இல் தொடலி வரைக. தொடலிக்கு APB எனப் பெயரிடுக.
- PQ என்னும் நாணை வரைக.
- QPB இனது ஒன்று விட்ட வட்டத்துண்டத்தின் பரிதியில் R என்னும் புள்ளியைக் குறிக்க.
- முக்கோணி PQR ஐ பூர்த்தி செய்க.
- QPB ஐ வெட்டியெடுத்து ΔPQR இன் எக்கோணத்துடன் பொருந்துகின்றது எனப் பொருத்திப் பார்க்க.
- இதிலிருந்து என்ன முடிவுக்கு வரமுடியும்?



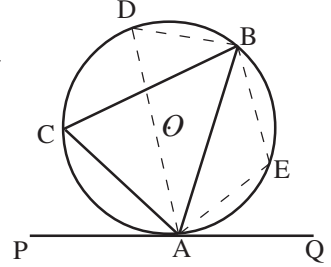
செயற்பாடு 22.5

O என்பது வட்டத்தின் மையம் தொடலி PAQ ஆனது வட்டத்தை A இல் தொடுகிறது.

$$\hat{QAB} = 60^\circ \text{ ஆகும்}$$

(படத்தை திசுதாளில் பிரதி செய்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.)

- (i) BDA இன் பெறுமானம் யாது?
- (ii) BCA இன் பெறுமானம் யாது?
- (iii) பகுதி (i) , பகுதி (ii) பெறப்பட்ட பெறுமானங்கள் பற்றி யாது கூறுவீர்?
- (iv) BAQ இன் ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணங்கள் சமனாகின்றதா?
- (v) BAP இன் பெறுமானம் யாது?
- (vi) BEA இன் பெறுமானம் யாது?
- (vii) பகுதி (v) , பகுதி (vi) பெறப்பட்ட பெறுமானங்கள் பற்றி யாது கூறுவீர்?
- (viii) BAP இன் ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணங்கள் சமனாகின்றதா?

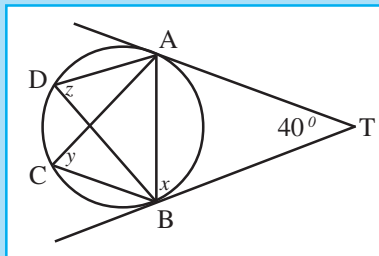


தேற்றம் :

வட்டத்தின் தொடலிக்கும் தொடுபுள்ளியில் உள்ள நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணமானது ஒன்றுவிட்டத் துண்டக் கோணத்துக்குச் சமனாகும்.

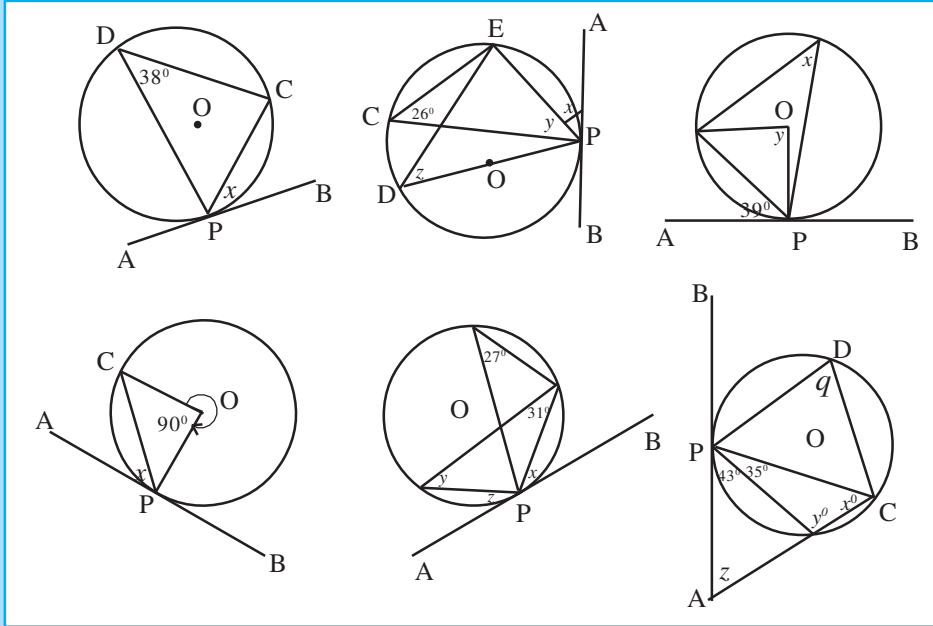
பயிற்சி 22.3

1. A, B இலுள்ள தொடலிகள் T இல் சந்திக்கின்றது.

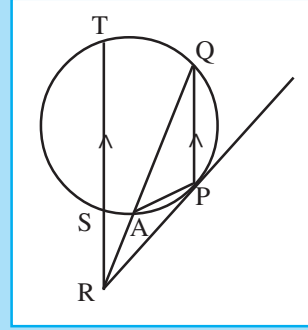


- (i) BT இற்குச் சமமான பக்கத்தைப் பெயரிடுக.
- (ii) $\triangle ATB$ எவ்வகையான முக்கோணி.
- (iii) x இன் பெறுமானம் யாது?
- (iv) \widehat{ABT} இன் ஒன்று விட்ட துண்டக் கோணங்களைப் பெயரிடுக.
- (v) y, z என்பவற்றின் பெறுமானங்களை காண்க.

2. கீழ்வரும் உருக்களில் O ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்திற்கு P என்னும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலி APB ஆகும். உருவில் உள்ள ஏனைய தரவுகளையும் பயன்படுத்தி எழுத்திடப்பட்ட கோணங்களின் பெறுமானம் காண்க.

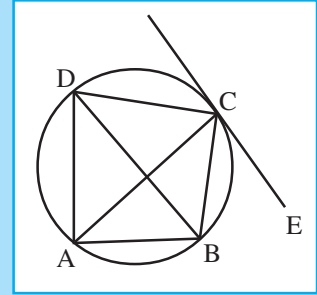


3. A, P, Q, T என்பன ஒரு வட்டத்தில் காணப்படும் புள்ளிகளாகும். உருவில் RP ஆனது வட்டத்தை P இல் தொடுகின்றது. $PQ \parallel RT$ ஆகும்.



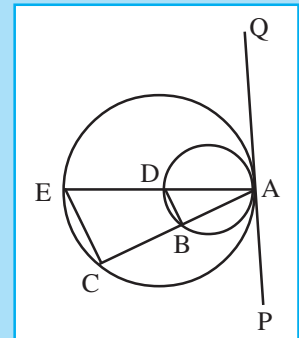
- (i) \widehat{RPA} இற்குச் சமமான கோணத்தைப் பெயரிடுக. காரணம் கூறுக.
- (ii) \widehat{PQA} இற்குச் சமமான கோணத்தைப் பெயரிடுக. காரணம் கூறுக.

4. ABCD வட்டநாற்பக்கல் \widehat{A} இன் இருகூறாக்கி AC ஆகும். CE என்பது C இல் வரையப்பட்ட தொடலியாகும்.



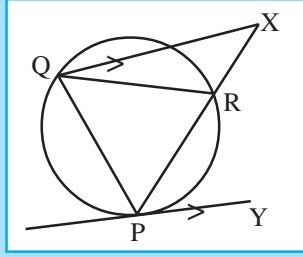
- (i) BCE இன் ஒன்றுவிட்ட துண்டக்கோணங்கள் இரண்டைப் பெயரிடுக.
- (ii) $\widehat{BCE} = x^\circ$ எனின், சமமான இரு ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணங்களையும் x எனக் குறிக்க.
- (iii) $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ இற்குச் சமமான கோணத்தைப் பெயரிட்டு காரணத்தைத் தருக.
- (iv) $BD \parallel CE$ எனக் கூறலாமா?

5. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறமாகத் தொடுகின்றன. A இலுள்ள தொடலி PAQ ஆகும்.



- (i) சிறிய வட்டத்தில் \widehat{QAD} இற்குச் சமமான கோணம் எது?
- (ii) பெரிய வட்டத்தில் \widehat{QAE} இற்குச் சமமான கோணம் எது?
- (iii) $BD \parallel CE$ எனக் கூறலாமா? விளக்குக.
- (iv) $AB = BC$ எனத் தரப்படின AE இன் நடுப்புள்ளி D எனக் காட்டுக.
- (v) $\angle QAE = 90^\circ$ எனத் தரப்படின D என்பது பெரிய வட்டத்தின் மையம் என நிறுவுக.

6. உருவில் தொடலி PY ஆனது வட்டத்தை P இல் தொடுகிறது. PY//QX எனின் $\angle PQR = \angle PXQ$ என நிறுவுக.



7. K, L, M என்பன ஒரு வட்டத்திலுள்ள மூன்று புள்ளிகளாகும். L இல் வரையப்பட்ட தொடலியானது நீட்டப்பட்ட KM ஐ P இல் சந்திக்கிறது. $\angle KLP = \angle LMP$ என நிறுவுக.

