

# 21 வட்ட நாற்பக்கங்கள்

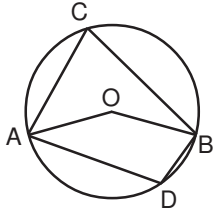
இப்பாடத்தை கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்புகின்றன என்னும் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையையும் நிறுவுதலும் அவற்றின் பயன்பாடும்.
- ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க்கோணத்திற்குச் சமம் என்னும் தேற்றத்தையும் அதன் மறுதலையும் நிறுவுதலும் அவற்றின் பயன்பாடும். என்பன பற்றிய விளக்கத்தைப் பெற்றுக்கொள்வீர்கள்.

## 21.1 வட்டத்தின் கோணங்கள்

கடந்த ஆண்டில் கற்ற வட்டத்தின் கோணங்கள் தொடர்பான தேற்றங்களின் மீட்டல்.

- (1) **தேற்றம்** : ஒரு வட்டத்தின் வில்லினால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் அதே வில்லினால் பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இரு மடங்காகும்.

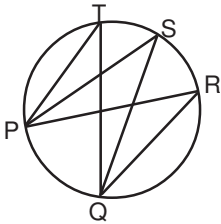


வட்டத்தின் மையம் O ஆகும்.

$$\hat{AOB} = 2\hat{ACB}$$

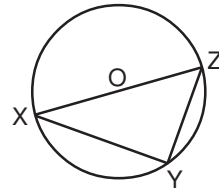
$$\text{பின்வளைகோணம் } \hat{AOB} = 2\hat{ADB}$$

- (2) **தேற்றம்** : ஒரு வட்டத்தின் ஒரே துண்டத்தின் கோணங்கள் சமமாகும்.



$$\hat{PTQ} = \hat{PSQ} = \hat{PRQ}$$

- (3) **தேற்றம்** : ஒரு அரை வட்டத்தின் கோணம் செங்கோணம்.



வட்டத்தின் மையம் O ஆகும்

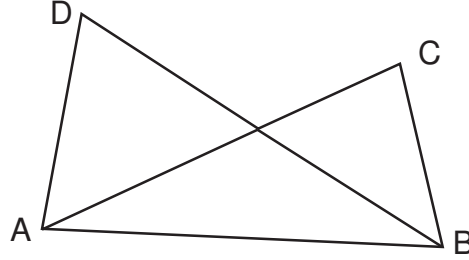
$$\hat{XYZ} = 90^\circ$$

மேற்குறித்த உருக்களில் A,B,C,D ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தின் மீதும் P,Q,R,S,T ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தின் மீதும் X, Y, Z ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தின் மீதும் உள்ளன. இவ்வாறு ஒரே வட்டத்தின் மீது பல புள்ளிகள் இருக்குமெனின், அப்புள்ளிகள் **ஒரு வட்டப்புள்ளிகள்** எனப்படும்.

மேற்குறித்த இரண்டாம் தேற்றத்தின் மறுதலையானது ஒரு வட்டப் புள்ளிகளுக்கு பொருந்தும் தேற்றமாகும்.

### தேற்றம்

ஒரு நேர்கோடு அதன் ஒரே பக்கத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளில் சம கோணங்களை எதிரமைக்குமெனின், அவ்விரு புள்ளிகளும் அந் நேர்கோட்டின் இரு முனைப் புள்ளிகளும் ஒரு வட்டப் புள்ளிகளாகும்.



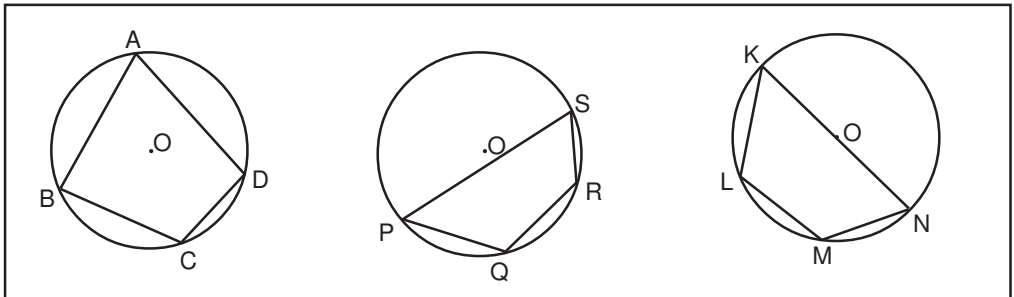
உருவில் நேர்கோடு AB இன் ஒரே பக்கத்தில் C, D என்னும் புள்ளிகள் உள்ளன. தேற்றத்திற்கேற்ப

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} \text{ எனின்,}$$

A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு வட்டப் புள்ளிகளாகும்.

## 21.2 வட்டநாற்பக்கல்

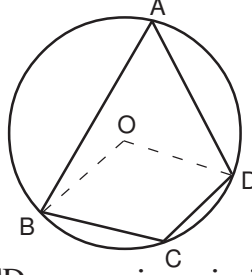
ஒரு நாற்பக்கலின் நான்கு உச்சிகளும் ஒரே வட்டத்தின் மீது இருக்குமெனின், அந்நாற்பக்கல் வட்ட நாற்பக்கலாகும்.



மேற்குறித்த உருக்களில்  $ABCD$ ,  $PQRS$ ,  $KLMN$  ஆகியன வட்டநாற்பக்கலாகும்.

**தேற்றம்** : ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகை நிரப்புகின்றன.

இப்போது இத்தேற்றத்தை நிறுவுவோம்.



தரவு :  $ABCD$  ஒரு வட்டநாற்பக்கலாகும்.

நிறுவவேண்டியது :  $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$   
 $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$

அமைப்பு : வட்டத்தின் மையத்தை O எனப் பெயரிட்டு OB ஐயும், OD ஐயும் தொடுக்க

நிறுவல் :  $\widehat{BOD} = 2\widehat{BAD}$  (மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் பரிதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இரு மடங்காகும்)  
 $\widehat{BOD}$  (பின் வளை) =  $2\widehat{BCD}$  (மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் பரிதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இரு மடங்காகும்)

$$\therefore \widehat{BOD} + \widehat{BOD} (\text{பின்வளைகோணம்}) = 2\widehat{BAD} + 2\widehat{BCD}$$

ஆனால்  $\widehat{BOD} + \widehat{BOD}$  (பின்வளைகோணம்) =  $360^\circ$  (ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி உள்ள கோணங்கள்)

$$\therefore 2\widehat{BAD} + 2\widehat{BCD} = 360^\circ$$

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$

$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} + \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 360^\circ$  (நாற்பக்கலின் கோணங்கள்)

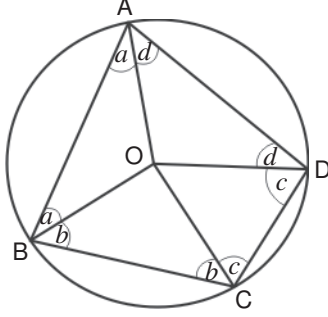
$$\therefore \widehat{ABC} + \widehat{ADC} + 180^\circ = 360^\circ$$

$$\therefore \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$$

$\therefore$  ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்புகின்றன.

இருசமபக்க முக்கோணிகள் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தியும் இத்தேற்றத்தினால் காட்டப்படும் தொடர்பை வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

ஒரு வட்டத்தின் ஆரைகள் சமனாகையால்  $AOB, BOC, COD, AOD$  ஆகிய முக்கோணிகள் இருசமபக்க முக்கோணிகளாகும்.



$$(a + b) + (b + c) + (c + d) + (d + a) = 360^\circ$$

$$\therefore 2a + 2b + 2c + 2d = 360^\circ$$

$$\therefore (a + b) + (c + d) = 180^\circ$$

$$\therefore \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$$

இவ்வாறே  $(a + d) + (b + c) = 180^\circ$

$$\therefore \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$

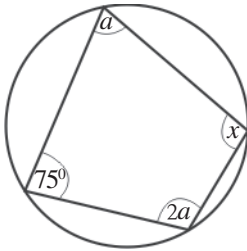
இத்தேற்றத்தின் மறுதலையையும் ஒரு தேற்றமாகப் பயன்படுத்தலாம். இம்மறுதலை பின்வருமாறாகும்.

ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்க்கோணச் சோடி மிகைநிரப்புமெனின் அந்நாற்பக்கல் வட்ட நாற்பக்கலாகும்.

### உதாரணம் 1.

இவ்வருக்களில் குறியீடுகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களை காண்க.

(i)



$$x + 75^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 75^\circ$$

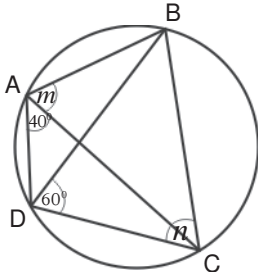
$$x = 105^\circ$$

$$a + 2a = 180^\circ$$

$$3a = 180^\circ$$

$$a = 60^\circ \Rightarrow 2a = 120^\circ$$

(ii)



$$m = 60^\circ \text{ (ஒரே துண்டக்கோணம்)}$$

$$\widehat{BAD} = 60^\circ + 40^\circ$$

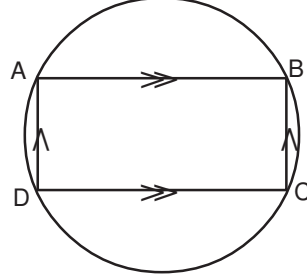
$$= 100^\circ$$

$$n = 180^\circ - 100^\circ$$

$$n = 80^\circ$$

## உதாரணம் 2.

ஒர் இணைகரம்  $ABCD$  இன் உச்சிகள் ஒரு பரிதியில் உள்ளன.  $ABCD$  ஒரு செவ்வகமென நிறுவுக.



தரவு : இணைகரம்  $ABCD$  இன் உச்சிகள் ஒரு பரிதியில் உள்ளன.

நிறுவவேண்டியது :  $ABCD$  ஒரு செவ்வகம்

நிறுவல் :  $ABCD$  ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் ஆகையால்

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \text{ (வட்ட நாற்பக்கலின் எதிரக்கோணங்கள்)}$$

ஆனால்  $\widehat{B} = \widehat{D}$  (இணைகரம்  $ABCD$  இன் எதிரக் கோணங்கள்)

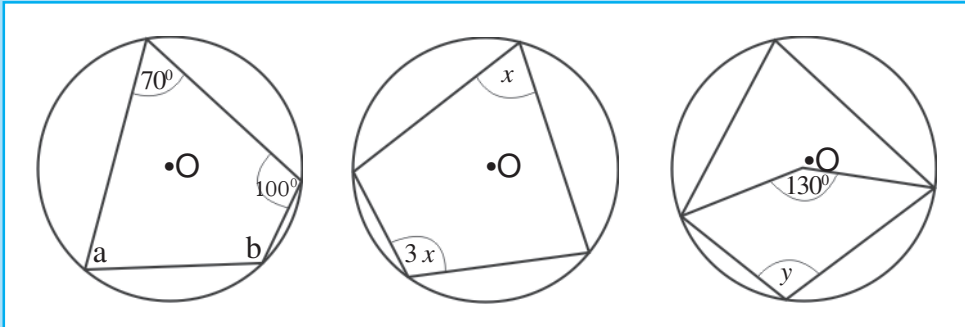
$$\therefore \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$$

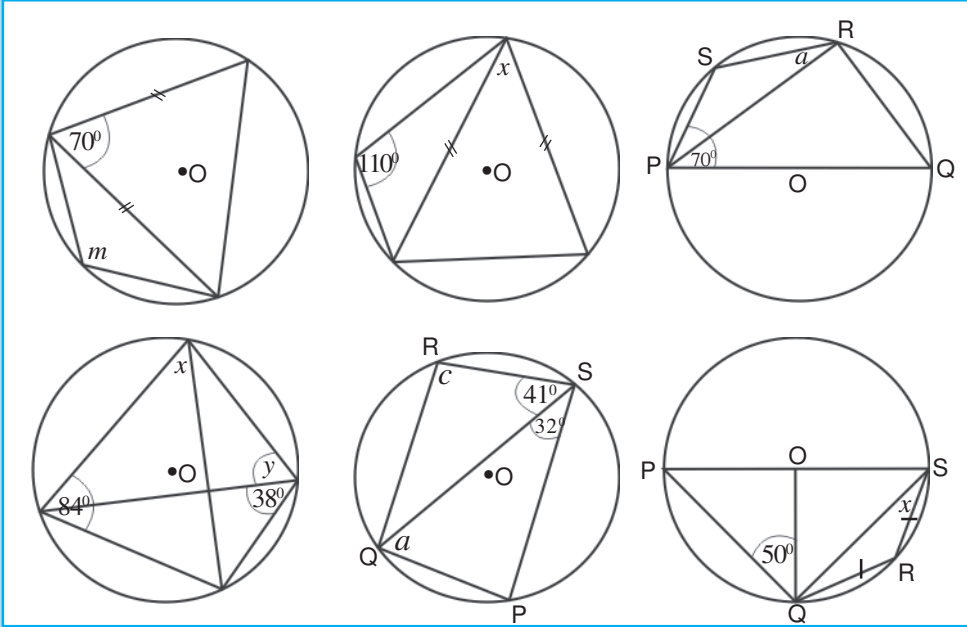
இவ்வாறே  $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$  ஆகும்.

$\therefore ABCD$  ஒரு செவ்வகமாகும்.

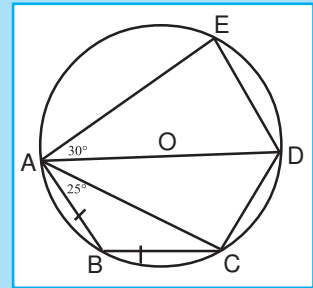
## பயிற்சி 21.1

1. பின்வரும் உருக்களில் வட்டங்களின் மையம்  $O$  ஆகும். குறியீடுகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

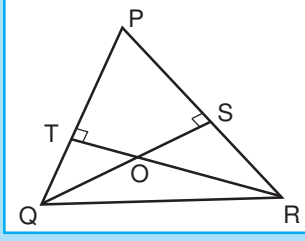




2. உருவில் காணப்படும் ஐங்கோணி  $ABCDE$  இன் உச்சிகள்  $O$  வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மீது உள்ளன.  $AD$  ஆனது வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும்.  $\widehat{DAE} = 30^\circ$  ஆயும்  $\widehat{BAC} = 25^\circ$ ,  $AB = BC$ ,  $DC = DE$  எனின், ஐங்கோணி  $ABCDE$  இன் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

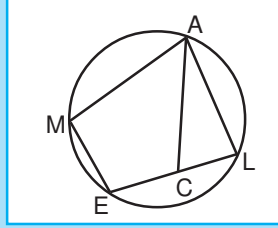


3. ஒரு வட்டநாற்பக்கல்  $ABCD$  இல்  $AB \parallel DC$  ஆகும்.  $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$  எனக் நிறுவுக.
4. ஒரு வட்ட நாற்பக்கல்  $KLMN$  இல்  $\widehat{KLM} = \widehat{KNM}$  ஆகும்.  $KM$  ஆனது வட்டத்தின் விட்டமென நிறுவுக.
5. ஒரு முக்கோணி  $PRE$  இல்  $Q$  இலிருந்து  $PR$  இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தும்  $R$  இலிருந்து  $PQ$  இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தும்  $O$  வில் இடைவெட்டுகின்றன. (உருவைப் பார்க்க)
- (i)  $PSOT$  ஒரு வட்டநாற்பக்கல் எனவும்

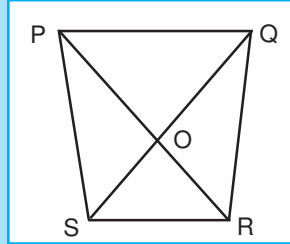


(ii) QRST ஒரு வட்டநாற்பக்கல் எனவும் நிறுவுக.

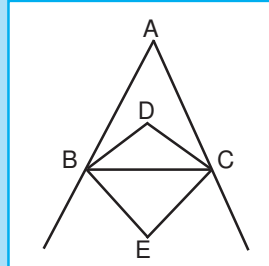
6. ஒரு வட்டநாற்பக்கல் MALE இல் பக்கம்  $EL$  மீது புள்ளி மீது  $C$  ஆனது  $AC = AL$  ஆக இருக்குமாறு உள்ளது.  $\widehat{AME} = \widehat{ACE}$  என நிறுவுக.



7. ஒரு நாற்பக்கல் PQRS இன் மூலைவிட்டங்கள் PR, QS என்பன O இல் இடைவெட்டுகின்றன.  $PQ \parallel SR$ , உம்  $SO = OR$  உம் ஆகும். P, Q, R, S ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு பரிதியில் உள்ளனவென நிறுவுக.



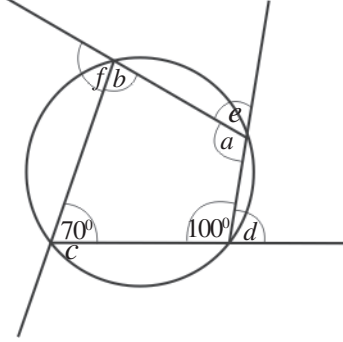
8. ஒரு முக்கோணி ABC இல் B இனதும் C இனதும் அகக்கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் D இலும் புறக்கோணங்களின் இருசம கூறாக்கிகள் E இலும் சந்திக்கின்றன. BDCE ஒரு வட்டநாற்பக்கலென நிறுவுக.



## 21.3 ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் புறக்கோணங்களுக்கும் அகக் கோணங்களுக்குமிடையே உள்ள தொடர்பு

### செயற்பாடு 21.1

இவ்வுருவில் குறியீடுகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்போம்.



$$a = 180^\circ - 70^\circ = \dots$$

$$b = 180^\circ - 100^\circ = \dots$$

$$c = 180^\circ - 70^\circ = \dots$$

$$d = 180^\circ - 100^\circ = \dots$$

$$e = 180^\circ - 110^\circ = \dots$$

$$f = \dots - \dots = \dots$$

இவ்வட்ட நாற்பக்கலின் அகக்கோணங்களினதும் புறக்கோணங்களினதும் பெறுமானங்களைத் தனித்தனியாக எழுதுவோம்.

அகக்கோணங்கள்  $\rightarrow 70^\circ, 100^\circ, 110^\circ, 80^\circ$

புறக்கோணங்கள்  $\rightarrow \dots, \dots, \dots, \dots$

உங்களுக்குக் கிடைத்துள்ள பெறுமானங்களுக்கேற்ப அகக் கோணங்களின் பருமன்களுக்கும் புறக்கோணங்களின் பருமன்களுக்கும்மிடையே தொடர்பு உள்ளதாவெனப் பார்க்க.

ஒரு நாற்பக்கலின் ஒரு புறக்கோணத்தைக் கருதும்போது அதற்கு அடுத்துள்ள அகக்கோணத்திற்கு எதிரேயுள்ள அகக்கோணமானது **அகத்தெதிர்க்கோணம்** எனப்படும்.

இவ்வட்டவணையை நிரப்புக.

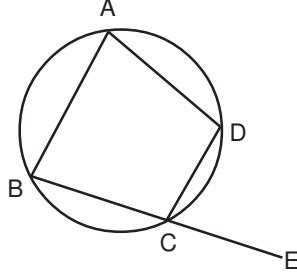
புறக் கோணத்தின் பெறுமானம்	$110^\circ$	$80^\circ$		$32^\circ$
அகத்தெதிர்க்கோணத்தின் பெறுமானம்	$110^\circ$		$50^\circ$	

அட்டவணையில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப புறக்கோணத்தின் பெறுமானமும் அகத்தெதிர்க்கோணத்தின் பெறுமானமும் சமனாகும். இத்தொடர்பைக் கேத்திர கணிதத்தின் ஒரு தேற்றமாக இனங் காண்கிறோம்.



**தேற்றம் :** ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டும் போது உண்டாகும் புறக்கோணம் அகத்தெதிர்கோணத்திற்கு சமமாகும்.

**இத்தேற்றத்தின் நிறுவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.**



தரவு :- வட்ட நாற்பக்கல் ABCD இல் பக்கம் BC ஆனது E இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது.

நிறுவவேண்டியது :-  $\widehat{DCE} = \widehat{BAD}$

நிறுவல் :-

$$\widehat{BCD} + \widehat{DCE} = 180^\circ \text{ (மிகைநிரப்பும் அடுத்துள்ள கோணங்கள்)}$$

$$\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180^\circ \text{ (வட்ட நாற்பக்கல் ABCD இன் எதிர்க்கோணங்கள்)}$$

$$\therefore \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \widehat{BCD} + \widehat{BAD}$$

$$\therefore \widehat{DCE} = \widehat{BAD}$$

முக்கோணியின் கோணங்களையும் வட்டத்தின் கோணங்களையும் பற்றிய தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தியும் இத்தேற்றத்தை வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

AC, DB யை இணைக்க

$$a = y \text{ (ஒரே துண்டக்கோணங்கள்)}$$

$$b = z \text{ (ஒரே துண்டக்கோணங்கள்)}$$

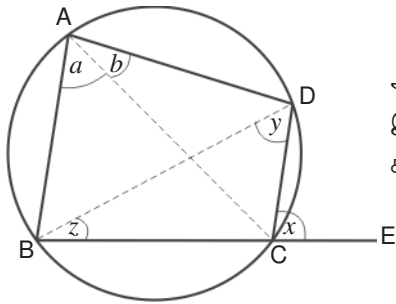
$$\therefore a + b = y + z$$

ஆனால்  $y + z = x$  முக்கோணியின் புறக்கோணம் இரு அகத்தெதிர்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் ஆகையால் )

$$\therefore a + b = x$$

$$x = a + b$$

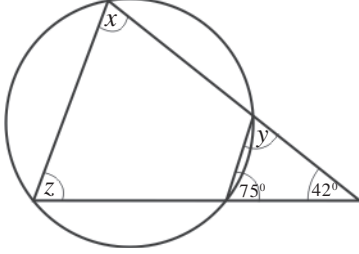
$$\therefore \widehat{DCE} = \widehat{BAD}$$



இத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் ஒரு தேற்றமாகப் பயன்படுத்தலாம். அதாவது, ஒரு நாற்பக்கலின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டும்போது உண்டாகும் புறக்கோணம் அகத்தெதிர் கோணத்துக்குச் சமமெனின், அந்நாற்பக்கல் ஒரு வட்ட நாற்பக்கலாகும்.

### உதாரணம் 3.

உருவில்  $x, y, z$  என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



$$x = 75^\circ$$

$$y = 180^\circ - (75^\circ + 42^\circ)$$

$$y = 180^\circ - 117^\circ$$

$$y = 63^\circ$$

$$z = 63^\circ$$

### உதாரணம் 4.

உருவில் காட்டப்படும் இரு வட்டங்களும் A, B ஆகிய புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றன. முக்கோணி PRR இன் பக்கம் QR ஆனது A இனூடாகச் செல்கின்றது. PSBT ஒரு வட்ட நாற்பக்கலென நிறுவுக

தரவு : வட்டங்கள் A, B இல் இடைவெட்டுகின்றன. QAR, PQ, PR என்பன நேர்கோடுகள்

நிறுவவேண்டியது: PSBT ஒரு வட்ட நாற்பக்கல்.

அமைப்பு : AB ஐ இணைக்க.

நிறுவல் : வட்டநாற்பக்கல் ABSQ இல்

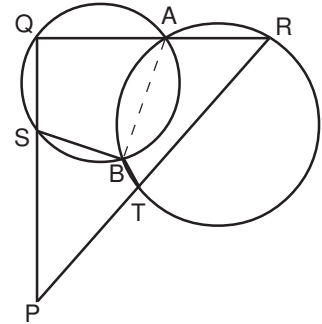
$$\widehat{RAB} = \widehat{BSQ} \text{ (புறக்கோணம் = அகத்தெதிர்க்கோணம்)}$$

வட்டநாற்பக்கல் ABTR இல்

$$\widehat{RAB} = \widehat{BTP} \text{ (புறக்கோணம் = அகத்தெதிர்க்கோணம்)}$$

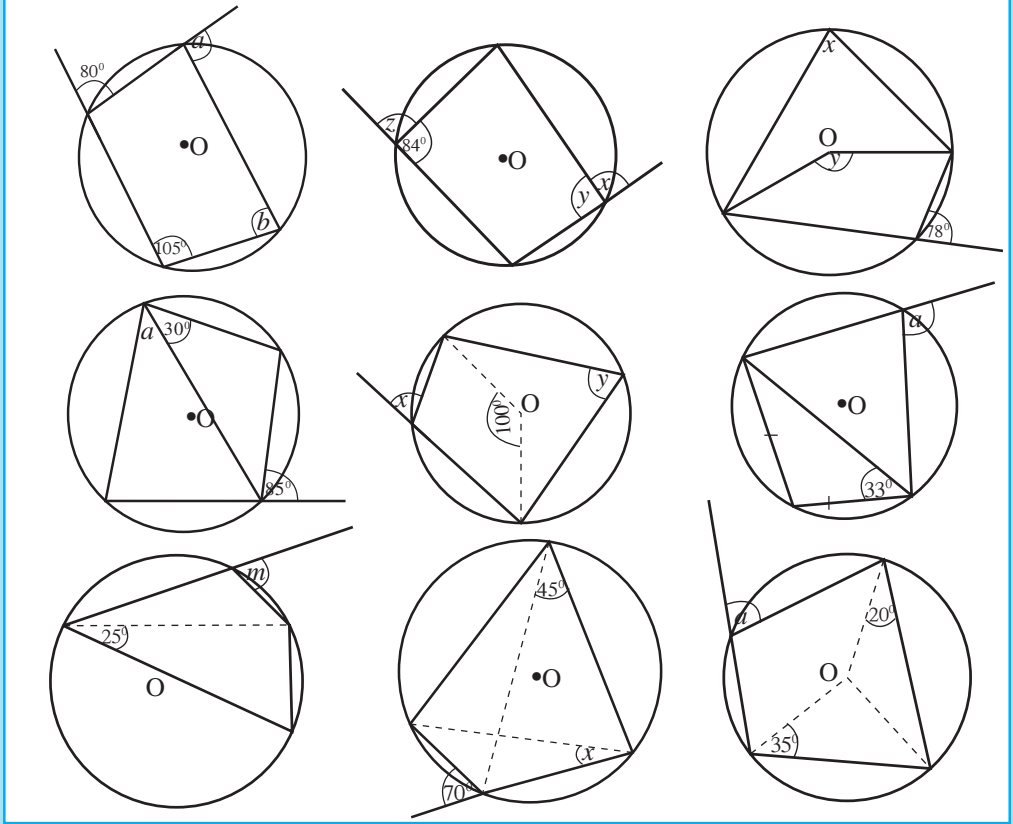
$$\widehat{BSQ} = \widehat{BTP}$$

ஆகவே PSBT ஒரு வட்ட நாற்பக்கலாகும்.



### பயிற்சி 21.3

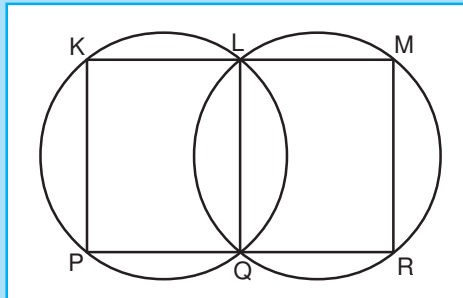
1. பின்வரும் உருக்களில்  $O$  உரிய வட்டத்தின் மையமாகும். வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள குறியீடுகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



2. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள இரு வட்டங்களும்  $L, Q$  இல் இடைவெட்டுகின்றன.

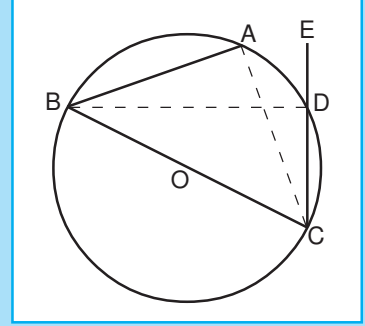
$KLM, PQR$ , என்பன இரு நேர்கோடுகள்.  $K\hat{L}Q$  இற்கு

- சமனான ஒரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.
- மிகைநிரப்பும் ஒரு கோணத்தைப் பெயரிடுக.



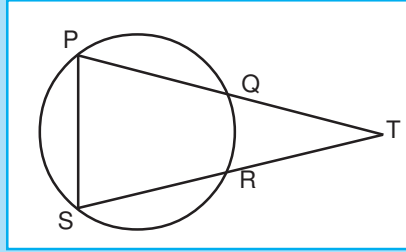
3.  $O$  ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் ஒரு விட்டம்  $BC$  ஆகும். வட்ட நாற்பக்கம்  $ABCD$  இல் பக்கம்  $CD$  ஆனது  $E$  இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. இவ்வுருவைப் பயன்படுத்தி

- செங்கோணத்தைப் பெயரிட்டுக் காரணங்களைத் தருக.
- $\widehat{ADE}$  இற்கும்  $\widehat{ABC}$  இற்குமிடையே உள்ள தொடர்பை எழுதுக. காரணம் தருக.
- $\widehat{ABE}=75^\circ, \widehat{CAD}=20^\circ$  எனின்,  $\widehat{ABD}$  இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

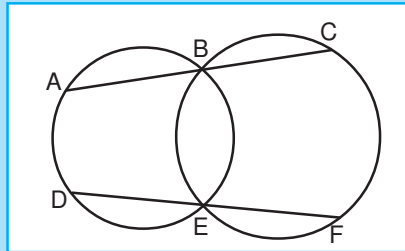


4. வட்டநாற்பக்கம்  $PQRS$  இல் பக்கங்கள்  $PQ, SR$  நீட்டப்படும் போது  $T$  இல் சந்திக்கின்றன.  $PT = ST$  ஆகும்.

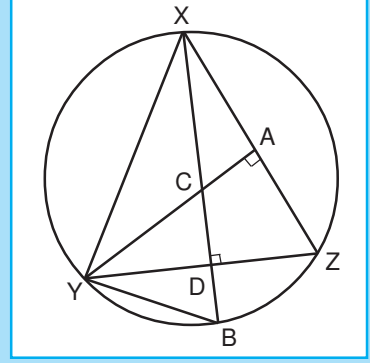
- $QRT$  ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியென நிறுவுக.
- $PS \parallel QR$  என நிறுவுக.



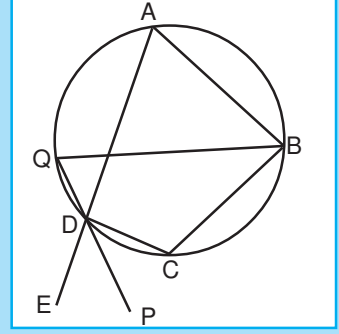
5. உருவில் உள்ள இரு வட்டங்களும்  $B$  இலும்  $E$  இலும் இடைவெட்டுகின்றன.  $ABC, DEF$  ஆகியன இரு நேர்கோடுகள்.  $AD \parallel CF$  என நிறுவுக.



6.  $XYZ$  ஆனது ஒரு வட்டத்தில் உள்வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணியாகும்.  $Y$  இலிருந்து  $XZ$  இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்து  $YA$  ஆகும்.  $X$  இலிருந்து  $YZ$  இற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ள கோடானது  $YA$  ஐ  $C$  இலும்  $YZ$  ஐ  $D$  இலும் வட்டத்தை  $B$  இலும் சந்திக்கின்றன.
- (i)  $ACDZ$  ஒரு வட்ட நாற்பக்கலென நிறுவுக.
- (ii)  $\widehat{YCB} = \widehat{YBC}$  என நிறுவுக.



7. ஒரு வட்ட நாற்பக்கல்  $ABCD$  இல் பக்கம்  $AD$  ஆனது  $E$  இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது.  $\widehat{CDE}$  இன் இருகூறாக்கிகள்  $PD$  ஐ நீட்டப்படும்போது வட்டத்தை மறுபடியும்  $Q$  இல் சந்திக்கின்றது.  $QB$  ஆனது கோணம்  $ABC$  ஐ இருகூறிடுமென நிறுவுக.



8.  $KLMN$  ஒரு வட்ட நாற்பக்கலாகும்.  $KL$  உம்  $NM$  உம் நீட்டப்படும் போது  $A$  இல் சந்திக்கின்றன.  $KN$  உம்  $LM$  உம் நீட்டப்படும்போது  $B$  இல் சந்திக்கின்றன.  $ABNL$  ஒரு வட்ட நாற்பக்கலெனின்,  $A, B, N, L$  ஆகியவற்றிற்கூடாகச் செல்கின்ற வட்டத்தின் ஒரு விட்டம்  $AB$  என நிறுவுக.

