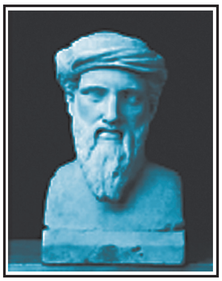
17 பைதகரசின் தேற்றம்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,
- *பைதகரசின் தொடர்பை பயன்படுத்தி பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்.*
- *பைதகரசின் தொடர்பின் உண்மையை உறுதி செய்து கொள்ளல்.*

என்பன பற்றிய விளக்கத்தைப் பெற்றுக்கொள்வீர்கள்.

பைதகரசின் தேற்றம் கணிதத்தில் பயன்படுத்தப்படும் முக்கியமான ஒரு தொடர்பாகும். இது கணிதத்தில் மாத்திரமின்றி பொது வாழ்வில் பல்வேறு துறைகளிலும் பயன்படுகின்றது.

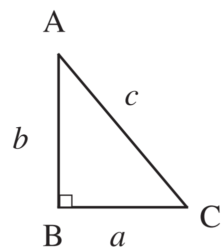


பைதகரஸ் கி.மு 580-500 காலப் பகுதியில் கிரேக்கத்தில் வசித்த கிரேக்க தத்துவஞானி ஆவார். அவர் ஒரு கணிதவியலாளராவார். வானியல் விஞ்ஞானியுமாவார். உலகிலுள்ள யாவற்றையும் எண்களினால் விளக்கிக்கூறலாம். என்ற கருத்து அவரது ஒரு எண்ணக்கருவாகும். பைதகரஸ் சங்கீதத்திலுள்ள கணிதத்தன்மை பற்றி எண்களினூடாக ஆராய முயன்றார். அவர் எண் வாதத்தை முழு உலகிலும் பரப்ப நடவடிக்கை எடுத்த கணிதவியலாளராகவும் கூறப்படுகின்றார். பைதகரஸ் முன்வைத்த தொடர்பைத் தேற்றமாக முறையாக நிறுவியவர். அவருக்கு 300 ஆண்டுகளின் பின் வாழ்ந்த யூக்லிட் எனும் கணிதவியலாலராவார். இத் தேற்றத்தை நிறுவக்கூடிய 400 க்கு அதிகமான முறைகளை உலகில் வெவ்வேறு கணிதவியலாளர்கள் முன்வைத்துள்ளனர்.

பைதகரசின் தேற்றம்

ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்தின் மீது வரையத்தக்க சதுரத்தின் பரப்பளவு செங்கோணத்தை ஆக்கும் மற்றைய இருபக்கங்களின் மீது வரையத்தக்க இரண்டு சதுரங்களினதும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமனாகும்.

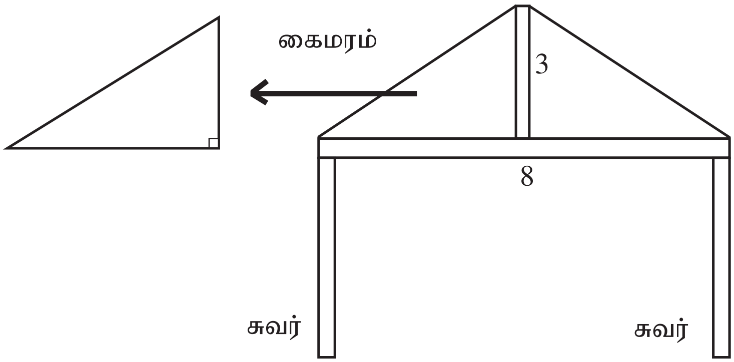
$a^2 + b^2 = c^2$ ஆகும்.



இத்தொடர்பை வீடமைப்புக் கலைஞர்களும் தொழில்நுட்பக் கலைஞர்களும் நில அளவையாளர்-களும் மற்றும் பல தொழில்சார் கலைஞர்களும் பயன்படுத்துகின்றார்கள். முன்னைய தரங்களில் இத்தொடர்பு பற்றி நீங்கள் கற்ற அறிவை உபயோகித்து பின்வரும் பிரசினத்தைத் தீர்க்க முயல்க.

8 மீற்றர் அகலமான ஒரு கட்டடத்தில் இருபக்கச் சுவர்களின் மீதும் வைக்கப்பட்டுள்ள தீராந்தியில் சரிமத்தியில் மூன்று மீற்றர் உயரமான தாங்கு கம்புடன் பொருத்த வேண்டிய ஒரு கைமரம் நீளத்தைக் காணவேண்டியுள்ளது என்க.

இலவச விநியோகத்திற்காக



இங்கு உருவாகும் செங்கோண முக்கோணியைக் கவனிப்போம். தீராந்தியின் முனையிலிருந்து சரிமத்தியில் தாங்குகம்பு பொருத்தப்பட்டுள்ள இடத்துக்கான தூரம் 04 மீற்றர் ஆகும். தீராந்திக்கு செங்குத்தாக சரிமத்தியில் பொருத்தப்பட்டுள்ள தாங்கு கம்பின் உயரம் 03 மீற்றர் ஆகும். கைமரம் அமையும் செங்கோணமுக்கோணி வடிவத்தின் செம்பக்கத்தில் அமைவதாகும். செம்பக்கத்தின் நீளம் x என்போம்.

பைதகரசின் தொடர்பின் படி

$x^2 = 4^2 + 3^2$ ஆகும்.

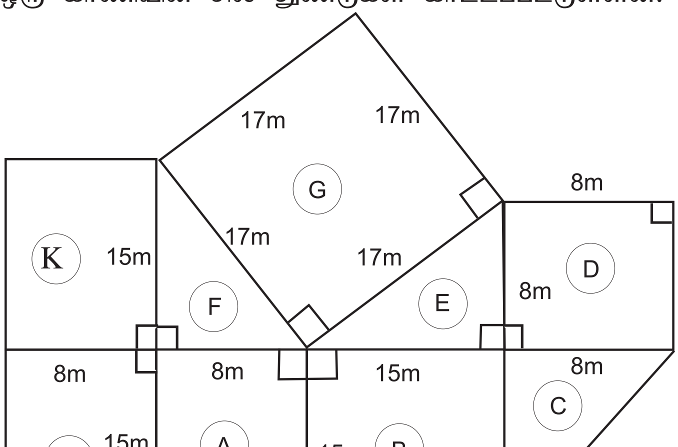
$x^2 = 16 + 9$

$x^2 = 25$

$x^2 = 5^2$

$x = 5$

கைமரத்தின் நீளம் 5 மீற்றர் ஆகும். கீழுள்ள உருவில் துண்டுகளாக்கி விற்கப்படும் ஒரு காணியின் சில துண்டுகள் காட்டப்பட்டுள்ளன.

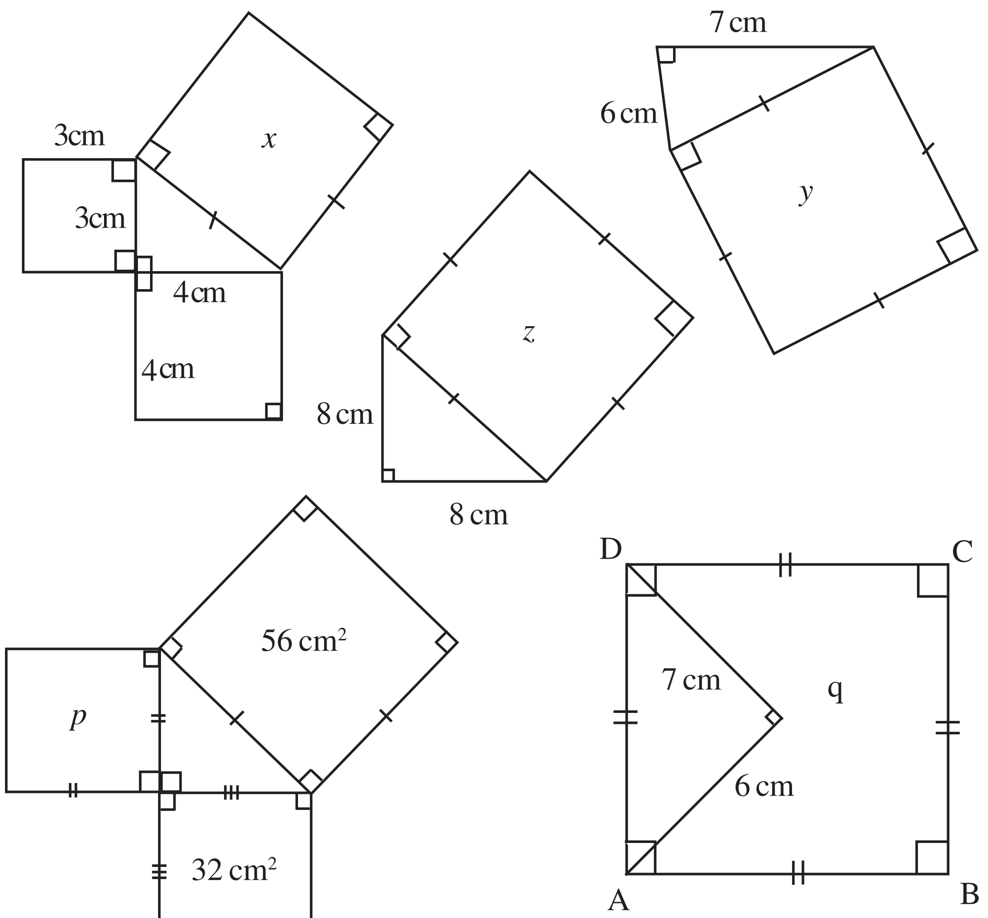


இலவச விநியோகத்திற்காக

A, B, C, D, E, F, G ஆகிய காணித்துண்டுகளின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.
துண்டு B இனதும் துண்டு D இனதும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்கும் துண்டு G இன் பரப்பளவுக்கும் இடையிலான தொடர்பை எழுதுக.
A,K ஆகியவற்றின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகை G இன் பரப்பளவுக்குச் சமனானதா? சமனற்றதா? அவ்வாறு ஏற்படுவது ஏன்?
B,D ஆகியவற்றின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகையினால் காட்டப்படுவது முழுக் காணியின் என்ன பங்கு?

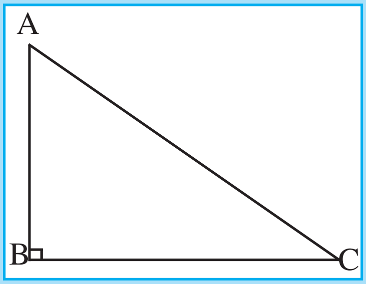
பயிற்சி 17.1

1. பின்வரும் உருவங்களில் தெரியாக்கணியமொன்றினால் பெயரிடப்பட்டுள்ள சதுரங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.



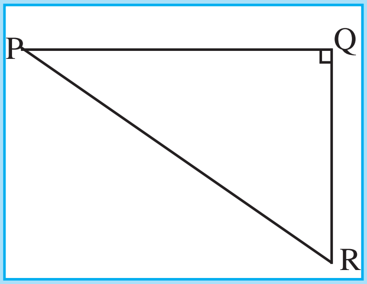
$ABCD$ இன் பரப்பளவு q

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணி தொடர்பாகவும் கீழே தரப்பட்டுள்ள கூற்றுகளின் வெற்றிடங்களை நிரப்புக.



AB இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = AB^2
BC இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = ...
AC இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = ...

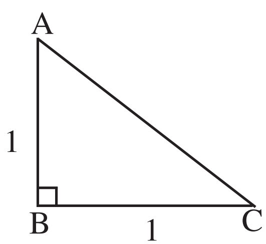
AC^2 = ... + ...



PQ இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = ...
QR இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = ...
PR இன் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு = ...
$PQ^2 + QR^2 =$ ...
(பைதகரசின் தேற்றப்படி)

செயற்பாடு 17.1

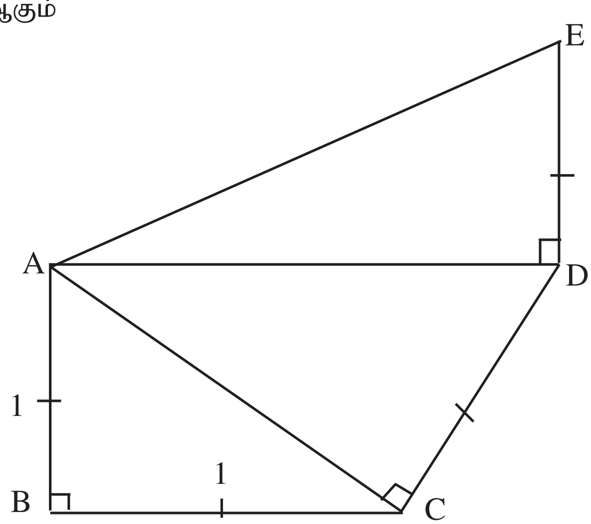
வெள்ளைத் தாளொன்றின் நடுவில் செங்கோண முக்கோணி ABC ஐ வரைக. அதில் செங்கோணத்தை ஆக்கும் இரு பக்கங்களின் நீளங்களையும் சமனாக எடுக்க.
அதன் ஒரு பக்க நீளம் 1 அலகு ஆயின் AC இன் நீளம்
$= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ அலகுகள் ஆகும்



$AB = BC = 1$

$AC = \sqrt{1^2+1^2}$

$= \sqrt{2}$



உருவின்படி புள்ளி C இல் AC இற்கு ஒரு செங்குத்து வரைந்து 1 அலகு தூரத்தில் புள்ளி D ஐ குறிக்க. இனி AD ஐக் கணிக்க.

இதன்படி $AD = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\therefore \quad AD \quad = \sqrt{3}$ அலகுகள் ஆகும்.

இவ்வாறு புள்ளி D இல் AD இற்கு ஒரு செங்குத்து வரைந்து முன்னையது போன்றே புள்ளி E ஐக் குறித்து AE இன் நீளத்தைப் பெறுக. இச்செயற்பாட்டை மேலும் இவ்வாறே தொடர்ந்து செய்து செங்கோணமுக்கோணிகள் வரைக. கிடைக்கும் ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணியிலும் செம்பக்கத்தை வரைய வெவ்வேறு நிறங்களினாலான பென்சில்களைப் உபயோகிக்கவும். இயலுமான வரை செங்கோண முக்கோணிகள் வரைந்து புள்ளி C பயணிக்கும் ஒழுக்கை அவதானிக்க.

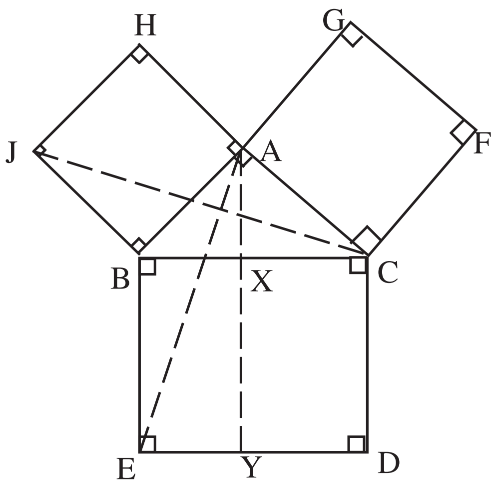
இது ஆக்கிமிடிசின் சுருளி எனப்படும்.

செம்பக்கங்களின் நீளங்களினால் கிடைப்பது 1 தொடக்கம் சகல எண்ணும் எண்களினதும் வர்க்கமூலம் என்பதைக் காண்பீர்கள். இதற்கு உபயோகித்த பைதகரசின் தொடர்பு பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ள விதத்தை அவதானிக்க.

17.1 பைதகரசின் தேற்றத்தின் நிறுவல்

பைதகரசின் தேற்றத்தின் முறையான நிறுவல் பைதகரசின் காலத்திலிருந்து 300 வருடங்களின் பின் கணிதவியலாளரான யூக்லிட்டினால் முன் வைக்கப்பட்டதென முன்னர் குறிப்பிட்டோம். அதனை நிறுவக் கூடிய சில முறைகளைப் பார்ப்போம்.

முறை i



தரவு : முக்கோணி ABC இல் $\hat{A}$ செங்கோணமாகும். BC இன் மீது சதுரம் $BCDE$ உம் AC இன் மீது சதுரம் $ACFG$ உம் AB இன் மீது சதுரம் $ABJH$ உம் அமைந்துள்ளன.

நிறுவவேண்டியது : சதுரம் $BCDE$ இன் பரப்பளவு = சதுரம் $ACFG$ இன் பரப்பளவு + சதுரம் $ABJH$ இன் பரப்பளவு

அமைப்பு : கோடு BC ஐ X இல் வெட்டுமாறும் கோடு ED ஐ Y இல் சந்திக்குமாறும் A இலிருந்து BC இற்கு செங்குத்து AXY ஐ வரைக. AE ஐயும் JC ஐயும் இணைக்க.

நிறுவல் : $J\hat{B}A = C\hat{B}E = 90^\circ$ (தரவு)

இருபக்கமும் $A\widehat{B}C$ ஐக் கூட்டினால்

$J\hat{B}C = A\hat{B}E$

முக்கோணிகள் JBC, ABE என்பவற்றில்

$BJ = AB$ (சதுரத்தின் பக்கங்கள்)

$BC = BE$ (சதுரத்தின் பக்கங்கள்)

$J\hat{B}C = A\hat{B}E$ (நிறுவியது)

$\Delta\, JCB \equiv \Delta\, ABE$ (ப.கோ.ப)

$\Delta\, JCB$ யின் பரப்பளவு $= \Delta\, ABE$ யின் பரப்பளவு

HAC ஒரு நேர்கோடு (இரண்டு சதுரங்களினதும் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்)

முக்கோணி JBC உம் சதுரம் $JBAH$ உம் JB எனும் ஒரே அடியிலும் JB, HAC ஆகிய சமாந்தர கோடுகளுக்கிடையிலும் அமைந்துள்ளன.

முக்கோணி JBC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ சதுரம் JBAH இன் பரப்பு

இவ்வாறே முக்கோணி ABE யும் செவ்வகம் $BEYX$ உம் BE எனும் ஒரே அடியிலும் BE, AXY ஆகிய சமாந்தர கோடுகளுக்கிடையிலும் அமைந்துள்ளன.

ΔABE இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ செவ்வகம் BEYX இன் பரப்பளவு

$\Delta\; JBC,\; \Delta\; ABE$ என்பன பரப்பளவில் சமனானவை

சதுரம் $JBAH$ இன் பரப்பளவு = செவ்வகம் $BEYX$ இன் பரப்பளவு

இவ்வாறே AD ஐயும் BF ஐயும் இணைப்பதால்

சதுரம் $CFGA$

இன் பரப்பளவு = செவ்வகம் $CDYX$ இன் பரப்பளவு

எனக் காட்டலாம்.

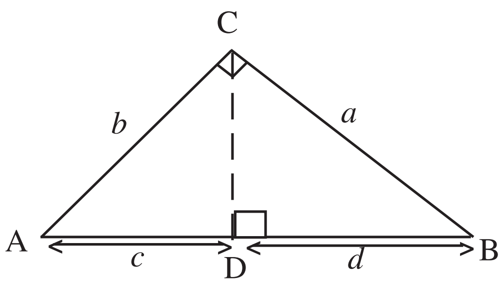
$\therefore$ செவ்வகம் $CDYX$ இன் பரப்பளவு + செவ்வகம் $BEYX$ இன் பரப்பளவு =

சதுரம் $JBAH$ இன் பரப்பளவு + சதுரம் $CFGA$ இன் பரப்பளவு

சதுரம் $BEDC$ இன் பரப்பளவு = சதுரம் $JBAH$ இன் பரப்பளவு + சதுரம் $CFGA$ இன் பரப்பளவு

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

முறை ii



தரவு : ΔABC இல் $\widehat{C}$ செங்கோணமாகும்.

நிறுவவேண்டியது : $AC^2 + BC^2 = AB^2$

அமைப்பு : C இலிருந்து AB இற்கு வரையும் செங்குத்து AB ஐ D இல் சந்திக்கின்றது என்க.

நிறுவல் : $\Delta ABC, \Delta ACD$ என்பன இயல்பொத்தவை ஆதலால் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனாகும்.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

$$AC^2 = AB.AD \text{ ---------------------- } (1)$$

ΔABC , ΔCBD என்பன இயல்பொத்தவை ஆதலால் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமனாகும்.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$BC^2 = AB.BD \text{ .... } (2)$$

(1) + (2), $AC^2 + BC^2 = AB.AD + AB.BD$

$= AB\,(AD + BD)$

$= AB.\,AB$

$= AB^2$

பயிற்சி 17.2

1. நிலையான ஒரு சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் ஏணியின் அடி சுவரிலிருந்து 3m தொலைவிலும் நுனி சுவரின் அடியிலிருந்து 4m உயரத்திலும் இருக்கிறது. ஏணியின் நீளத்தைக் காண்க.

2. பாதையோரத்திலுள்ள ஒரு மின்கம்பத்தின் உயரம் 10m ஆகும். அதன் உச்சியிலிருந்து 2m கீழே பொருத்தப்பட்டுள்ள ஆதாரக் கம்பி கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 6m தொலைவில் நிலத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் நீளம் யாது?

3. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்கள் 24cm உம் 10cm உம் ஆகும். சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

4. முக்கோணி ABC இல் AB = AC = 17 cm ஆகும். A இலிருந்து BC இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் நீளம் 15cm ஆகும். முக்கோணியின் சுற்றளவைக் காண்க.

5. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் $A\widehat{B}C = 90^0, AB = 12\text{ cm}, BC = 9\text{ cm}$, $CD = 8\text{ cm},\ AD = 17\text{ cm}$ ஆகும். $A\widehat{C}D = 90$எனக் காட்டுக.

6. முக்கோணி AOB யில் $AO = OB$, கோணம் $A\widehat{O}B = 90^0$ செம்பக்கத்தின் மீதுள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவு முக்கோணியின் பரப்பளவின் நான்கு மடங்கு எனக் காட்டுக.

7. முக்கோணி ABC இல் $AB>AC$ ஆகும். A இலிருந்து BC இற்கு செங்குத்து AX வரையப்பட்டுள்ளது. $AB^2 - AC^2 = BX^2 - CX^2$ என நிறுவுக.

8. ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் மீது வரையப்படும் சதுரத்தின் பரப்பளவு முதல் சதுரத்தின் பரப்பளவின் இரண்டு மடங்கு என நிறுவுக.

9. சமபக்க முக்கோணி XYZ இல் YZ இன் நடுப்புள்ளி O ஆகும். $3YZ^2 = 4OX^2$ எனக் காட்டுக.

10. செவ்வகம் $ABCD$ இன் உள் யாதாயினுமொரு இடத்தில் புள்ளி X அமைந்துள்ளது.
$XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$ எனக் காட்டுக.

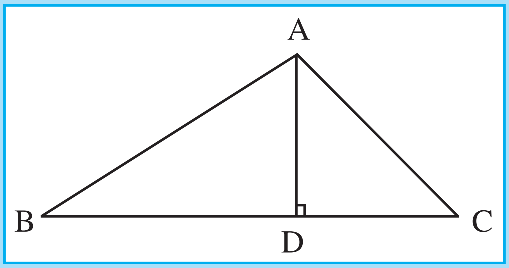
11. நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று செங்கோணத்தில் இடைவெட்டுகின்றன.
$PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$ எனக் காட்டுக.

இலவச விநியோகத்திற்காக

12. முக்கோணி PQR இல் கோணம் $P\hat{Q}R = 90^o$ ஆகும். பக்கம் QR இன் நடுப்புள்ளி X உம் பக்கம் PQ இன் நடுப்புள்ளி Y உம் ஆகும்.
$4\left(PX^2 + RY^2\right) = 5PR^2$ எனக் காட்டுக.

13. சமபக்க முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC இல் புள்ளி P ஆனது $BP = \frac{1}{3}BC$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது. $9AP^2 = 7AB^2$ என நிறுவுக.

14. உருவிலுள்ள தரவுகளின் படி $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ என நிறுவுக.



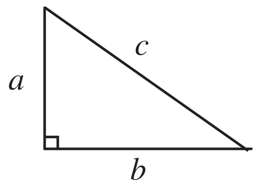
பைதகரசின் மும்மை

எந்தவொரு செங்கோண முக்கோணியிலும் செங்கோணத்தையுடைய இரண்டு பக்கங்களையும் a,b எனவும் செம்பக்கத்தை c எனவும் பெயரிட்டுள்ள போது $a^2 + b^2 = c^2$ என்பதைத் திருப்தி செய்யும் a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் பைதகரசின் மும்மை என அழைக்கப்படும்.

- முழு எண்களிலான முதலாவது பைதகரசின் மும்மை (3, 4, 5) ஆகும். இவற்றின் மடங்குகளான (6, 8, 10) (9, 12, 15) (30, 40, 50) என்பனவும் பைதகரசின் மும்மைகளாகும். (8, 15, 17) (7, 24, 25) (9, 40, 41) என்றவாறும் எழுதலாம்.

- முதலில் குறிப்பிட்ட மடங்குகளான மும்மைகளைத் தவிர மற்றைய மும்மைகளில் ஓர் எண் இரட்டையாவதோடு எஞ்சிய இரண்டு எண்களும் ஒற்றை எண்களாகும்.

இலவச விநியோகத்திற்காக



பைதகரசின் மும்மையைப் பெற்றுக்கொள்ள உபயோகிக்க கூடிய மூன்று சமன்பாடுகளை யூக்லிட் முன்வைத்துள்ளார். முதலில் குறிப்பிட்டதுபோன்று செங்கோணத்தை உள்ளடக்கும் பக்கங்கள் a,b என்பவற்றாலும் செம்பக்கம் c யினாலும் குறிக்கப்படும்போது

$a = x^2 - y^2 \qquad b = 2xy \quad c = x^2 + y^2$

சமன்பாட்டில் கீழே தரப்படும் x, y பெறுமானங்களுக்கேற்ப a, b, c என்பவற்றின் பெறும் பெறுமானங்களைக் கண்டு அவை பைதகரசின் மும்மையில் அமைகின்றனவா எனக் காண்க.

x இனதும் y இனதும் மேலும் எப்பெறுமானங்கள் பைதகரசின் மும்மையை ஆக்குகின்றன எனக் காண்க.

x	y	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	2	...	...	...
3	1	...	...	...
4	1	...	...	...
4	3	...	...	...
5	4	...	...	...
5	2	...	...	...
6	1	...	...	...
6	5	...	...	...
7	2	...	...	...