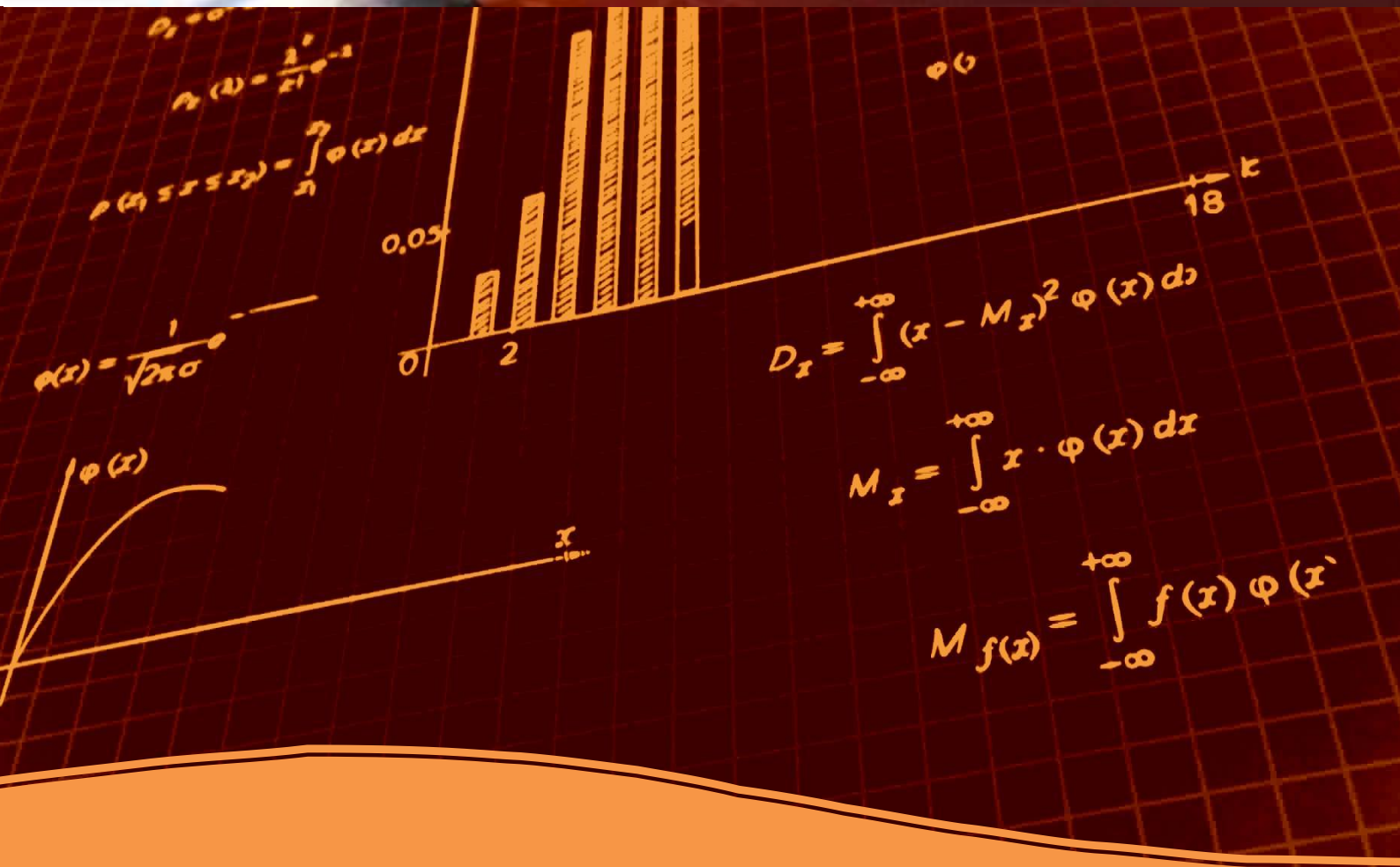


අ.පො.ස. උසස්පෙළ සංයුක්ත ගණිතය



ඒකකය 9

9.1

1) භින්න භාග සොයන්න.

$$\frac{1}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$\frac{1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x - 3)}$$

$$\frac{1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A(x - 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$1 = A(x - 3) + B(x - 2)$$

$$x = 3 \text{ විට} \quad 1 = B(3 - 2) \implies B = 1$$

$$x = 2 \text{ විට} \quad 1 = A(2 - 3) \implies A = 1$$

$$\frac{1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{1}{(x - 3)} - \frac{1}{(x - 2)}$$

2) හින්ත භාග සොයන්න.

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 10}$$

හරයේ බහු පදය ඒකජ සාධකවලට වෙන්කරමු.

$$\frac{1}{(x - 5)(x - 2)}$$

$$\frac{1}{(x - 5)(x - 2)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 2}$$

$$\frac{1}{(x - 5)(x - 2)} = \frac{A(x - 2) + B(x - 5)}{(x - 5)(x - 2)}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$1 = A(x - 2) + B(x - 5)$$

$$x = 5 \text{ විට} \quad 1 = A(5 - 2) \implies A = \frac{1}{3}$$

$$x = 2 \text{ විට} \quad 1 = B(2 - 5) \implies B = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{(x - 5)(x - 2)} = \frac{\frac{1}{3}}{(x - 5)} - \frac{\frac{1}{3}}{(x - 2)} = \frac{1}{3(x - 5)} - \frac{1}{3(x - 2)}$$

3) $\frac{3x+11}{x^2-x-6}$ හින්න භාගවලට වෙන් කරන්න.

නියම පරිමේය ශ්‍රිතයක් නිසා හින්න භාගවලට වෙන් කර හැකිය. ප්‍රථමයෙන් හරය ඒකජ සාධකවලට වෙන්කරමු.

$$\frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{(x - 3)} + \frac{B}{(x + 2)}$$

$$\frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$3x + 11 = A(x + 2) + B(x - 3)$$

$$x = 3 \text{ විට} \quad 3 \times 3 + 11 = A(3 + 2) \implies A = \frac{20}{5} = \underline{\underline{4}}$$

$$x = -2 \text{ විට} \quad 3 \times (-2) + 11 = B(-2 - 3) \implies B = \frac{5}{-5} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\frac{3x + 11}{x^2 - x - 6} = \frac{4}{(x - 3)} - \frac{1}{(x + 2)}$$

4) $\frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}$ හිත්ත භාගසොයන්න.

$$\frac{x^2 + 4}{x(3x^2 + 4x - 4)} = \frac{x^2 + 4}{x(x + 2)(3x - 2)}$$

$$\frac{x^2 + 4}{x(x + 2)(3x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x + 2)} + \frac{C}{(3x - 2)}$$

$$\frac{x^2 + 4}{x(x + 2)(3x - 2)} = \frac{A(x + 2)(3x - 2) + Bx(3x - 2) + Cx(x + 2)}{x(x + 2)(3x - 2)}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$x^2 + 4 = A(x + 2)(3x - 2) + Bx(3x - 2) + Cx(x + 3)$$

$$x = 0 \text{ විට} \quad 4 = A(2)(-2) \quad \implies A = \frac{4}{-4} = \underline{\underline{-1}}$$

$$x = -2 \text{ විට } (-2)^2 + 4 = B(-2)(-8) \quad \implies B = \frac{8}{16} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ විට } \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 = C \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3} + 2\right)$$

$$\frac{4 + 36}{9} = C \times \frac{2}{3} \times \frac{8}{3}$$

$$40 = 16C \quad \implies C = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2 + 4}{x(x + 2)(3x - 2)} &= \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{(x + 2)} + \frac{\frac{5}{2}}{(3x - 2)} \\ &= \underline{\underline{\underline{\frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x + 2)} + \frac{5}{2(3x - 2)}}}}} \end{aligned}$$

5) $\frac{1}{x(x-2)^3}$ හි නින්න භාගසොයන්න.

මෙම ශ්‍රිතය නියම පරිමේය ශ්‍රිතයක් වන අතර හරයේ ඒකජ සාධක ඇත.

$$\frac{1}{x(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

$$\frac{1}{x(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^3 + Bx(x-2)^2 + Cx(x-2) + Dx}{x(x-2)^3}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$1 = A(x-2)^3 + Bx(x-2)^2 + Cx(x-2) + Dx$$

$x = 0$ විට $1 = A(-2)^3 \implies A = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}$

$x = 2$ විට $1 = D(2) \implies D = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ 2

$x = 1$ විට $1 = A(1)^3 + B(1)(-1)^2 + C(1)(-1) + D(1)$

$1 = -A + B - C + D$

$1 = -(-\frac{1}{8}) + B - C + \frac{1}{2}$

$1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + B - C$

$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}$

$B - C = \frac{3}{8} \implies B = \frac{3}{8} + C = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ 3

9 සටහන්

$$x = 3 \text{ විට } 1 = A(1)^3 + B(3)(-1)^2 + C(3)(-1) + D(3)$$

$$1 = A + 3B + 3C + 3D$$

$$1 = -\frac{1}{8} + 3B + 3C + 3 \times \frac{1}{2}$$

$$3B + 3C = 1 + \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{8+1-12}{8} = \frac{-3}{8}$$

$$3B + 3C = -\frac{3}{8} \implies B + C = -\frac{1}{8} \quad \text{-----} \quad \textcircled{4}$$

$$2B = \frac{3-1}{8} = \frac{2}{8}$$

$$2B = \frac{2}{8} \implies B = \frac{1}{8}$$

$$2C = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{2}{8}$$

$$C = \underline{\underline{\frac{-1}{4}}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x(x-2)^3} &= \frac{-1/8}{x} + \frac{1/2}{(x-2)} + \frac{-1/4}{(x-2)^2} + \frac{1/2}{(x-2)^3} \\ &= \frac{-1}{8x} + \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{4(x-2)^2} + \frac{1}{2(x-2)^3} \end{aligned}$$

9 සටහන්

6) $\frac{1}{(x^2-1)(x^2+3)}$ ඒකාස්‍රිත භාගසොයන්න.

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+3)} = \frac{A(x^2+3)(x+1) + B(x-1)(x^2+3) + (x-1)(x+1)(Cx+D)}{(x-1)(x+1)(x^2+3)}$$

හරයේ පද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$1 = A(x^2+3)(x+1) + B(x-1)(x^2+3) + (x-1)(x+1)(Cx+D)$$

$$x = 1 \text{ විට } 1 = A(4)(2) \implies A = \frac{1}{8}$$

$$x = -1 \text{ විට } 1 = B(-2)(4) \implies B = \frac{-1}{8}$$

$$x = 0 \text{ විට } 1 = A(3)(1) + B(-1)(3) + (-1)(+1)(D)$$

$$1 = 3A - 3B - D$$

$$1 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} - D \implies D = \frac{6}{8} - 1 \implies D = \frac{-2}{8}$$

$$x = 2 \text{ විට } 1 = A(7)(3) + B(1)(7) + C(1)(3)(2C+D)$$

$$1 = 21A + 7B + 6C + 3D$$

$$1 = 21 \times \frac{1}{8} + 7 \times \left(\frac{-1}{8}\right) + 6 \times C + 3 \times \left(\frac{-2}{8}\right)$$

$$1 = \frac{21}{8} - \frac{7}{8} + 6C - \frac{6}{8}$$

$$1 = \frac{21-13}{8} + 6C$$

$$1 = \frac{8}{8} + 6C$$

$$6C = 0$$

$$C = 0$$

$$\therefore \frac{1}{(x^2-1)(x^2+3)} = \frac{1/8}{x-1} - \frac{1/8}{x+1} - \frac{2/8x}{x^2+3}$$

$$= \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+1)} - \frac{2x}{8(x^2+3)}$$

7) $\frac{x^2-x}{x^3+1}$ හි නිෂ්පාදන භාගසොයන්න.

මෙම ශ්‍රිතය නියම පරිමේය ශ්‍රිතයක් නිසා හරය ඒකජ සාධකවලට වෙන් කරමු.

$$\frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = \frac{x^2 - x}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

$$\frac{x^2 - x}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A(x^2 - x + 1) + (x + 1)[Bx + C]}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$x^2 - x = A(x^2 - x + 1) + (x + 1)(Bx + C)$$

$$x = 1 \text{ විට } (-1)^2 - (-1) = A(-1)^2 - (-1) + 1$$

$$1 + 1 = A(3) \quad \longrightarrow \quad A = \frac{2}{3}$$

$$x = 0 \text{ විට } 0 = A(+1) + (1)(C)$$

$$C = -A \rightarrow C = \frac{-2}{3}$$

$$x = 1 \text{ විට } 0 = A + 2B + 2C$$

$$0 = \frac{2}{3} + 2B + 2\left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$0 = \frac{-2}{3} + 2B$$

$$2B = \frac{2}{3} \quad B = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x^2 - x}{x^3 + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{(x + 1)} + \frac{\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{2}{3(x + 1)} + \frac{x - 2}{3(x^2 - x + 1)}$$

9 සටහන්

$$8) \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1)(x-1)^2 + [Cx+D](x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$x = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (x-1)^2[Cx+D]$$

$$x = 1 \text{ විට } 1 = B[1^2+1] \implies B = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \text{ විට } 0 = A(-1)(+1) + B(+1) + (-1)^2D$$

$$0 = -A + B + D$$

$$A - D = \frac{1}{2}$$

$$x = -1 \text{ විට } -1 = A(-2)(2) + B(2) + 4(-C + D)$$

$$-1 = -4A + 2B - 4C + 4D$$

$$-1 = -4(A - D) + 2 \times \frac{1}{2} - 4C$$

$$\textcircled{2} = -4 \times \frac{1}{2} - 4C$$

$$-2 = -2 - 4C$$

$$C = 0$$

$$x = 2 \text{ විට } 2 = A(1)(5) + B(5) + 2C + D$$

$$2 = 5A + 5B + 2C + D$$

$$2 = 5A + 5 \times \frac{1}{2} + 2C + D$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad 5A + D = 2 - \frac{5}{2} = \frac{-1}{2} \implies \textcircled{2}$$

$$6A = 0$$

$$A = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ න් } D = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1/2}{(x-1)^2} - \frac{1/2}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

9 සටහන්

9) $\frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}$ හි නිත්‍ය භාගසොයන්න.

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}$$

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{A(x^2 + 2)[Ax + B] + (x^2 + 1)[Cx + D]}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$x = A(x^2 + 2)[Ax + B] + (x^2 + 1)[Cx + D]$$

$$x = \underline{Ax^3} + \underline{Bx^2} + 2Ax + 2B + \underline{Cx^3} + \underline{Dx^2} + \underline{Cx} + D$$

$$x = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (2A + C)x + 2B + D$$

සංගුණකය සැසඳීමෙන්,

$$x^3 \cdot, \quad A + C = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \textcircled{1}$$

$$x^2 \cdot, \quad B + D = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \textcircled{2}$$

$$x \cdot, \quad 2A + C = 1 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \textcircled{3}$$

$$x^0 \cdot, \quad 2B + D = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \textcircled{4}$$

$$\underline{\underline{A = 1}}$$

$$C = -A = \underline{\underline{-1}}$$

$$\underline{\underline{B = 0}}$$

$$\underline{\underline{D = 0}}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} &= \frac{x}{(x^2 + 1)} - \frac{x}{(x^2 + 2)} \\ &= \frac{1}{8(x - 1)} - \frac{1}{8(x + 1)} - \frac{2x1}{8(x^2 + 3)} \end{aligned}$$

10) $\frac{x^3}{x^2-1}$ හිින්න භාගසොයන්න.

මෙම ශ්‍රිතය විෂම පරිමේය ශ්‍රිතයකි. ප්‍රථමයෙන් මෙම ශ්‍රිතය නියම පරිමේය ශ්‍රිතයක් කිරීමට ලවයේ බහුපදය හරයේ බහු පදයෙන් බෙදීමෙන්

$$(x^2 - 1) \overline{) \begin{array}{r} x \\ x^3 \\ \hline \end{array}} \qquad \frac{x^3 - x}{x}$$

$$\frac{x^3}{(x^2 - 1)} = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

දැන් නැවත $\frac{x}{(x^2-1)}$ නියම පරිමේය ශ්‍රිතය හින්න භාගවලට වෙන් කරමු.

$$\frac{x^2}{(x^2 - 1)} = \frac{x}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 1)}$$

$$\frac{x}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$x = A(x + 1) + B(x - 1)$$

$$x = 1 \text{ විට } 1 = A(2) \rightarrow A = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$x = -1 \text{ විට } -1 = B(-2) \rightarrow B = \underline{\underline{\frac{-1}{2}}}$$

$$\frac{x}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1/2}{(x - 1)} - \frac{1/2}{(x + 1)}$$

$$\therefore \frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{2(x + 1)}$$

11) $\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 3x - 10}$ හි නිෂ්පාදන භාගවලට පෙරලන්න.

මෙම ශ්‍රිතය විෂම පරිමේය ශ්‍රිතයකි. ප්‍රථමයෙන් මෙම ශ්‍රිතය නියම පරිමේය ශ්‍රිතයක් කිරීමට ලවයේ බහුපදය හරයේ බහු පදයෙන් බෙදීමෙන්

$$(x^2 - 3x - 10) \overline{) x^3 - x^2}$$

$$\underline{x^3 - 3x^2 - 10x}$$

$$10x$$

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 3x - 10} = x + \frac{10x}{x^2 - 3x - 10}$$

$$\frac{10x}{x^2 - 3x - 10} = \frac{10x}{(x - 5)(x + 2)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 2}$$

$$\frac{10x}{(x - 5)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 2)}$$

හරයේ පාද සමාන බැවින් ලවයේ පද සමාන කිරීමෙන්

$$10x = A(x + 2) + B(x - 5)$$

$$x = -2 \text{ විට } -20 = B(-7) \implies B = \underline{\underline{\frac{20}{7}}}$$

$$x = 5 \text{ විට } 50 = A(7) \implies A = \underline{\underline{\frac{50}{7}}}$$

$$\frac{10x}{(x - 5)(x + 2)} = \frac{50/7}{x - 5} + \frac{20/7}{x + 2}$$

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 3x - 10} = x + \frac{50}{7(x - 5)} + \frac{20}{7(x + 2)}$$