සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022(2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022(2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022(2023)

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න **1 - 10**) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න **11 - 17**).
* **A කොටස**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(11) උසස් ගණිතය I		
කොටස	**ප්‍රශ්න අංකය**	**ලකුණු**
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

A කොටස

1. සාධකවලට වෙන් කරන්න: $(bc + ca + ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$.

2. සියලු පූර්ණ සංඛ්‍යා කුලකය වූ $\mathbb{Z}$ මත R සම්බන්ධයක් $5a - 9b$ යන්න 4 න් බෙදෙයි නම්, aRb මගින් අර්ථ දැක්වේ යැයි ගනිමු. R යනු තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව පෙන්වා, 0 හි තුල්‍යතා පන්තිය ලියා දක්වන්න.

0142

3. $x \geq 1$ සඳහා $f(x) = x^2 - 2x - 3$ යැයි ගනිමු. f යන්න එකට-එක හා $[-4, \infty)$ මතට වන බව පෙන්වන්න.
$x > -4$ සඳහා $g(x) = \sqrt{4+x}$ යැයි ගනිමු. $f \circ g$ සංයුක්ත ශ්‍රිතයෙහි පරාසය සොයන්න.

4. a, b හා c යනු නිශ්ශූන්‍ය තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

$$\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$$ බව පෙන්වන්න.

5. සියලු $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = t^2$ හා $y = t^2 - 3t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් අර්ථ දැක්වේ. $(4, 0)$ ලක්ෂ්‍යයහිදී C ට ස්පර්ශක දෙකක් ඇති බව පෙන්වා එම ස්පර්ශක දෙක අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. $a, b \in \mathbb{R}$ හා $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ යනු $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} & ; \quad x<0 \text{ නම්} \\ a\cos\pi x + b & ; \quad x=0 \text{ නම්} \\ x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+a-1 & ; \quad x>0 \text{ නම්} \end{cases}$

මගින් අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතය යැයි ගනිමු.

f යන්න සන්තතික ශ්‍රිතයක් නම් a හා b හි අගයන් සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. $a, b \in \mathbb{R}$ හා $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x < 0 \text{ නම්,} \\ x^{\frac{3}{2}} & ; \quad 0 \le x \le 1 \text{ නම්,} \\ ax + b & ; \quad 1 < x \text{ නම්,} \end{cases}$

යැයි ගනිමු.

$x = 0$ හි දී $f(x)$ අවකලය බව පෙන්වන්න.

$x = 1$ හි දී $f(x)$ අවකලය වන පරිදි a හා b හි අගයන් සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. $x > 0$ සඳහා $x\dfrac{dy}{dx} + y - x\sin x = 0$ අවකල සමීකරණයෙහි $y(\pi) = 1$ යන තත්ත්වයට යටත්ව වූ විසඳුම සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. f යනු $f''(x)$ යන්න $[0, 1]$ මත සන්තතික වූ තාත්ත්වික අගයැති ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. $f(1) = 0$, $f'(1) = -3$ හා $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ නම්, $\int_0^1 x^2 f''(x)\mathrm{d}x = 1$ බව පෙන්වන්න.

10. $r = 6(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ හා $\theta = \frac{\pi}{3}$ යන ධ්‍රැවක සමීකරණ ඇති වක්‍රවල දළ සටහන් අඳින්න. මෙම වක්‍ර තුන මගින් පර්යන්තගත වූ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022(2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022(2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022(2023)

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) A, B හා C යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උපකුලක යැයි ගනිමු. කුලක වීජයෙහි ඔබ භාවිත කරන නියම පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරමින්,

(i) $A\cap(B\cap C)' = (A'\cup B)'\cup(A'\cup C)'$,

(ii) $A\cap\big((B\cap C')\cup(C\cap B')\big) = A\cap(B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$,

බව පෙන්වන්න; මෙහි $A\setminus B$ යන්න $A\cap B'$ මගින් අර්ථ දැක්වෙයි.

(*b*) ජාතික ක්‍රීඩා උළෙලක දිස්ත්‍රික්කයක් නියෝජනය කරමින් හෙල්ල විසි කිරීම, කවපෙත්ත විසි කිරීම හා උස පැනීම යන තරග ඉසව් තුන සඳහා සහභාගී වූ ක්‍රීඩකයන් සමූහයක් අතුරෙන්

(i) ක්‍රීඩකයන් 8 දෙනෙකු තරග ඉසව් තුනම සඳහා ද,

(ii) ක්‍රීඩකයන් 27 දෙනෙකු හෙල්ල විසි කිරීම හෝ කවපෙත්ත විසි කිරීම සඳහා ද,

(iii) ක්‍රීඩකයන් 28 දෙනෙකු හෙල්ල විසි කිරීම හෝ උස පැනීම සඳහා ද,

(iv) ක්‍රීඩකයන් 25 දෙනෙකු කවපෙත්ත විසි කිරීම හෝ උස පැනීම සඳහා ද,

(v) ක්‍රීඩකයන් 10 දෙනෙකු එක් තරග ඉසව්වක් සඳහා පමණක්ම ද,

සහභාගී වූ බව දී ඇත. හරියටම තරග ඉසව් දෙකක් සඳහා පමණක් සහභාගී වූ ක්‍රීඩකයන් ගණන සොයන්න.

12. (*a*) $a, b, c > 0$ යැයි ගනිමු.

(i) $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ බව පෙන්වා, $a^2+b^2+c^2 \ge bc+ca+ab$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(ii) $a+b+c=1$ නම් $(1-a)(1-b)(1-c) \le \frac{8}{27}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ පරිණාමනය xy-තලයෙහි වූ ලක්ෂ්‍ය, $x'y'$-තලයෙහි වූ ලක්ෂ්‍යවලට අනුරූපණය කරයි. මෙම පරිණාමනය යටතේ ඒවා මතටම අනුරූපණය වනු ලබන සියලු රේඛාවන්ගේ සමීකරණ සොයන්න. $y = 3x + 1$ රේඛාවෙහි $x'y'$-තලයේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.

13. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා **ද මුවාවර් ප්‍රමේයය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ සඳහා $Z_k = \cos(6k+1)\frac{\pi}{15} + i\sin(6k+1)\frac{\pi}{15}$ යැයි ගනිමු.

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ සඳහා $Z_k^5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $Z^5 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ සමීකරණය විසඳන්න.

$Z^5 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ සමීකරණයේ විසඳුම් 5 ලියා දක්වන්න.

පහත එක් එක් සමීකරණය විසඳන්න:

(i) $Z^{10} + Z^5 + 1 = 0$,

(ii) $2(z+i)^5 = (1+i\sqrt{3})(z-i)^5$.

14.(*a*) C_1 හා C_2 යනු පිළිවෙළින් $x = \sqrt{y-1}$ හා $x = y-1$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍ර දෙක යැයි ගනිමු. C_1 හා C_2 වක්‍ර මගින් ආවෘත වන S පෙදෙසෙහි දළ සටහනක් ඇඳ S පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

$y = -1$ රේඛාව වටා රේඩියන 2π මගින් S පෙදෙස භ්‍රමණය කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුවෙහි පරිමාව ද සොයන්න.

(*b*) $9\frac{dy}{dx} = (x+y)^2(x+y+3)^2 - 1$ අවකල සමීකරණය සලකන්න. $v = x+y$ ආදේශය භාවිතයෙන් $9\frac{dy}{dx} = v^2(v+3)^2$ බව පෙන්වා,

ඒ නයින්, දී ඇති අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

15.(*a*) $n = 0, 1, 2, \ldots$ සඳහා $I_n = \int_0^1 (x^2+1)^n \, dx$ යැයි ගනිමු.

$I_n - I_{n-1}$ සැලකීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$(2n+1)I_n - 2n\, I_{n-1} = 2^n$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, I_4 හි අගය සොයන්න.

(*b*) f යනු $f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = x^2 \sin 5x$ සමීකරණය තෘප්ත කරන ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු.

$f(0) = 1$ හා $f'(0) = 3$ බව දී ඇත.

$f(x)$ හි මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණිය, x^3 පදය දක්වා, එයත් ඇතුළත්ව සොයන්න.

මෙය භාවිතයෙන් $f(0.1)$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලබාගන්න.

16. (*a*) $a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha = p^2$ නම් $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ සරල රේඛාව $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ බහුවලයට ස්පර්ශකයක් වන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$x^2 + y^2 = 9$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන $9x^2 - 16y^2 = 144$ බහුවලයට වූ ස්පර්ශකවල සමීකරණ ලබාගන්න.

(*b*) $(2t^2, t)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $y^2 = \frac{1}{2}x$ පරාවලයට වූ ස්පර්ශකයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

ඒ නයින්, හෝ අන් අයුරකින් හෝ $y^2 = \frac{1}{2}x$ පරාවලයට හා $5x^2 + 20y^2 = 4$ ඉලිප්සයට වූ පොදු ස්පර්ශකවල සමීකරණ සොයන්න.

17. (*a*) $f(x) = \dfrac{3\cos^2 x + \sin^2 x}{6\sin x\cos x + 2\cos^2 x + 5}$ යැයි ගනිමු.

(i) f හි වසම $\mathbb{R}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $0 \le f(x) \le 1$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $f(x) = 0$ හා $f(x) = 1$ සමීකරණ විසඳා, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) කෝටික පහක් සමග **සිම්සන් නීතිය** යෙදීමෙන් ලබාගත් $\int_0^4 \ln(1+x^2)\,dx$ හි ආසන්න අගය k යැයි ගනිමු.

$k = \frac{1}{n}\ln\left(m \times 10^5\right)$ බව පෙන්වන්න; මෙහි m හා n යනු නිර්ණය කළ යුතු ධන පූර්ණ සංඛ්‍යා වේ.

k ඇසුරෙන්, $\int_0^4 \ln\left\{(1+x^2)^3(x^2-8x+17)^4\right\}dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

* * *