

5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left\{ \frac{12 - 12 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{(6x - \pi)^2} \right\}$ இனைக் காண்க.

6. $y = \sqrt{\ln|x|}$, $(x > 1, x \in \mathbb{R})$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம், x அச்சைப்பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படும்போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவு $6\pi \ln(2) - 2\pi$ கன அலகு எனக் காட்டுக.

7. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ இனால் தரப்படும் அதிபரவளைவின் மீது θ பரமானமாகவுள்ள புள்ளி $P(3 \sec \theta, 6 \tan \theta)$ வடிவில் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

பரமானம் $\theta = \frac{\pi}{6}$ ஆகும் புள்ளியில் அப் பரவளையிக்கு வரையப்பட்ட செவ்வனின் சமன்பாடு $x + 4y = 10\sqrt{3}$ என நிறுவுக.

08. படித்திறன் m ஆகவுள்ள $l = 0$ நேர்கோட்டிற்கு உற்பத்தி O விலிருந்தான செங்குத்துத் தூரம் 1 அலகு ஆகும். l இற்கு அவ்வாறான இரு நிலைகள் உண்டு எனக் காட்டி, அவ் ஒவ்வொரு நிலைக்குமான l இன் சமன்பாட்டைத் தருக.

அவ் இரு கோடுகளையும் எதிர்ப்பக்கங்களாகவும் ஆள்கூற்று அச்சுக்கள் மூலைவிட்டங்களாகவும் அமையுமாறான சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு $\left| \frac{2(m^2+1)}{m} \right|$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக

Part - B

Answer Only 5 Questions,

11' (a) $f(x) = x^2 + (2a - 1)x + (a + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ உம் a என்பது மெய் ஒருமையும் என்க. என்க. $(x + 2a - 1)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனின் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. a இன் இப் பெறுமானத்துக்கு $f(x)$ ஐ எழுதி $f(x) = 0$ இன் மூலங்களைப் பெறுக. அதிலிருந்து p மெய் ஒருமையாக இருக்க $F(x) = f(p - 2x), p \in \mathbb{R}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிக்கோவை $F(x)$ இனை எழுதுக. எல்லா $p \in \mathbb{R}$ இற்கும் $F(x) = 0$ இருபடிச்சமன்பாட்டிற்கு மெய்யான, வேறுவேறான மூலங்கள் உண்டு என நிறுவுக. $p \neq 0, p \neq 3$ ஆகவிருக்க, $F(x) = 0$ இன் மூலங்களின் நிகர்மாற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு $G(x) = 0$ இனைக்காண்க. $F(x) = 0, G(x) = 0$ என்பனவற்றின்தன்மைகாட்டிகள் ஒன்றே என மேலும் காட்டுக.

(b) $P(x) = x^4 - (1 - \lambda)x^3 + \mu x + 2$ என்பதன் மூலம் தரப்படும் பல்லுறுப்பி $P(x)$ இனை $(x^2 - x - 2)$ இனால் வகுக்கும் போது மீதி $10(x + 1)$ என நிறுவுக. அத்துடன் λ, μ ஐக் காண்க. அவ் λ, μ இன் பெறுமானங்களுக்கு $(x + 1)$ என்பது $P(x)$ இன் ஒரு காரணி எனக் காட்டி, $P(x)$ இனை $P(x) \equiv (x - \alpha)(x^3 - \beta)$ வடிவில் காட்டுக. இங்கு α, β துணியப்படவேண்டிய மாறிலிகள்.

12' (a). கீழே உள்ள அட்டவணையில் மூன்று தொழில்களுக்கு உரியதாகத் தெரிவு செய்த தொழில் வாண்மையாளர்களைக் கொண்ட குழுவொன்று தரப்பட்டுள்ளது.

தொழில்	ஆண்	பெண்
வைத்தியர்	3	1
தாதி	7	4
உதவியாளர்	5	5

இக் குழுவிலிருந்து 5 அங்கத்தவர் கொண்ட செயற்குழுவொன்றைத் தெரிவு செய்ய வேண்டியுள்ளது. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வகையின் கீழ் நியமிக்கப்பட கூடிய வேறான செயற்குழுக்களின் எண்ணிக்கைகளைக் காண்க.

i. எவ்வித வரையறையும் இல்லாத போது

- ii. வைத்தியர், தாதி, உதவியாளர் ஆகிய மூன்று துறையினரும் பிரதிநிதித்துவம் செய்வதோடு வைத்தியர் துறையில் மட்டும் ஆண், பெண் இரு பிரிவினரின் பிரதிநிதித்துவம் தேவையாக உள்ளபோது
- iii. வைத்தியர்கள் அனைவரதும் பிரதிநிதித்துவம் தேவையான போது

(b). $f(r) = \frac{2}{(2r-1)^2}$, $r \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம்.

$$f(r) - f(r+1) = \frac{16r}{(2r-1)^2(2r+1)^2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{3}{5^2 \cdot 7^2} + \frac{4}{7^2 \cdot 9^2} + \dots \dots \dots$ முடிவில் தொடரில் r ஆவது உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக.

$V_n = \sum_{r=1}^n (U_r)$, $W_{2n} = \sum_{r=1}^{2n} (U_r)$ என வரையறுக்கப்படும் எனின் V_n, W_{2n} என்பவற்றைக் காண்க.

$W_{2n} - V_n$ என்பது ஒருங்குமா? உமது விடையை உறுதி செய்க.

13'(a). $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2p & p \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$A^T B = 8C$ எனின், p இன் பெறுமானத்தை காண்க. இங்கு p என்பது ஒருமையாகும்.

p இன் அப் பெறுமானத்துக்கு $B^T A$ ஐக் காண்க.

அதிலிருந்து $A^T B + B^T A$ என்பது ஓர் சமச்சீர்த் தாயம் என நிறுவுக.

$(A^T B)P = I$ ஆகுமாறு $P_{(2 \times 2)}$ என்ற ஒரு தாயம் உளதாக இருக்குமா?

இங்கு I என்பது வரிசை 2 ஆன சர்வசமன்பாட்டுத் தாயம். உமது விடையை உறுதி செய்க.

(b). Z என்பது ஒரு சிக்கல் எண்ணாக இருக்க $2 < |Z| \leq 6$ என்ற நிபந்தனையைத் திருப்திசெய்யும் பிரதேசம் R இனை ஆகண் தளத்தில் காட்டுக.

இப்போது Z_R என்பது பிரதேசம் R இல் அடங்கும் $Z_R = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ என்ற சிக்கல் எண் என்க.

(i) $Z_0 = Z_R + \bar{Z}_R$ மூலம் தரப்படும் Z_0 ஐக் காண்க.

(ii) Z_R, Z_0 என்ற இரண்டு சிக்கல் எண்களும் பிரதேசம் R இல் அடங்குமாறு Z_R காணப்படமுடியுமான R' பிரதேசத்தை R பிரதேசத்தினுள் வேறாக்கிக் காட்டுக.

(iii) ω என்பது மேற்படி R' பிரதேசத்தில் அடங்குமாறும் $|\omega|$ என்பது உயர்வாக இருக்குமாறும் $Arg(\omega)$ என்பது இழிவாக இருக்குமாறும் முதலாம் கால்வட்டத்தில் அமைந்த சிக்கல் எண்ணாகும். ω இனை $x + iy$ வடிவில் எழுதுக.

(iv) இதிலிருந்து $\omega + \bar{\omega}$, $\omega - \bar{\omega}$ என்பவற்றைத் துணிந்து. த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\left(\left| \omega + \bar{\omega} \right| + i \left| \omega - \bar{\omega} \right| \right)^{12} = 12^{12} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

14'(a) $y = f(x) \equiv \frac{3x+p}{(x+q)^2}, x \in \mathbb{R}, p, q$ என்பன மெய் ஒருமைகளாகும்.

$x = 2$ என்பது $y = f(x)$ எனும் வளையியின் அணுகுகோடாகும். $y = f(x)$ இற்கு $x = \frac{4}{3}$ இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியும் உண்டு. p, q ஒருமைகளைத் துணிக.

$y = f(x)$ சார்பின் x குறித்த முதலாம் பெறுதியான $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \frac{4-3x}{(x-2)^2}, x \neq 2$

என்பதன் மூலம் தரப்படும் என நிறுவுக.

x - அச்சின் மீதுள்ள வெட்டுத் துண்டு, y - அச்சின் மீதுள்ள வெட்டுத்துண்டு, திரும்பல் புள்ளிகள், அணுகுகோடுகள் என்பவற்றைத் தெளிவாகக் காட்டி $y = f(x)$ சார்பின் பரும்படியான வரைபை வரைக.

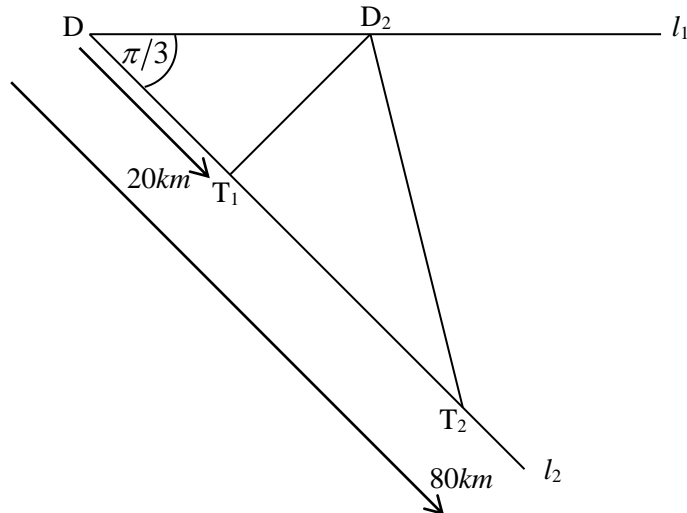
x குறித்து $y = f(x)$ இன் இரண்டாம் பெறுதியான $f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x-2)^3}, x \neq 2$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

அதிலிருந்து வளையி $y = f(x)$ மீதுள்ள விபத்திப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைத் துணிக.

(b). l_1, l_2 என்பன ஒன்றுடன் ஒன்று $\frac{\pi}{3}$ கோணத்தை ஆக்குமாறு, மட்டமான தரையில் நேர்கோட்டில் அமைக்கப்பட்டுள்ள உயர்வலு மின் கடத்தும் இரண்டு பாதைகளாகும். D_1 விநியோக நிலையத்திலிருந்து ஆரம்பிக்கும் இவ் இரண்டு பாதைகளில் l_2 மின் கடத்து பாதையில் இடையில் D_1 இலிருந்து முறையே 20km, 80km தூரத்தில் T_1, T_2 எனும் விநியோக மின் மாற்றிகள் (*Distribution Transformers*) அமைந்துள்ளன. l_1 மின் கடத்தும் பாதையில் D_1 இலிருந்து x km தூரத்தில் வேறொரு D_2 உப விநியோக நிலையமொன்று அமைக்கப்பட்டு D_2T_1, D_2T_2 என்ற இரண்டு நேர்கோட்டு மின் கம்பிகள் மூலம் T_1, T_2 உடன் D_2 உப விநியோக நிலையம் இணைக்கப்படவேண்டியுள்ளது.

$D_2T_1 = \sqrt{x^2 - 20x + 400}$ km $D_2T_2 = \sqrt{x^2 - 80x + 6400}$ km எனப் பெறுக. இங்கு x இன் வீச்சையும் குறிப்பிடுக.

D_2T_1, D_1T_2 மின் கம்பிகளின் மொத்த நீளம் இழிவாகும் வகையில் D_2 உப விநியோக நிலையத்தை l_2 இன் மீது அமைக்கக் கூடிய இடத்திற்கு D_1 இலிருந்து உள்ள தூரம் எவ்வளவு?



15' (a). $a > 0$ ஆகவுள்ள $a \in \mathbb{R}$ இற்கு $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ என நிறுவுக.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)} \quad \text{என எடுக்க.}$$

$I = -J$ எனக் காட்டுக.

அதிலிருந்து $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)}$ இனை மதிப்பிடுக.

(b). $x^2 = (Ax+B)(1+x)^2 + C(1+x^2)(1+x) + D(1+x^2)$ ஆகுமாறு A,B,C ஒருமைகளைத் துணிந்து,

$$x^2 = \frac{1}{2}x(1+x)^2 - \frac{1}{2}(1+x^2)(1+x) + \frac{1}{2}(1+x^2) \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

அதிலிருந்து $\int \frac{x^2}{(1+x^2)(1+x)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{\lambda \sqrt{1+x^2}}{(1+x)} \right| - \frac{1}{(1+x)} \right]$ என காட்டலாம் என நிறுவுக.

இங்கு λ மெய் ஒருமையாகும்.

(c). பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\int_1^{\frac{1}{3^4}} \left(\frac{1}{x^3} \right) \tan^{-1} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx \quad \text{இனைத் தொகையீட்டுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.}$$

16' $A \equiv (2,1)$ புள்ளியினூடாகச் செல்லும் m படித்திறன் உள்ள $l = 0$ நேர்கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் புள்ளி P ஆனது $P \equiv [(2+t), (1+mt)]$ எனும் பரமான வடிவத்தில் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக.

இங்கு t என்பது பரமானம் $t \in \mathbb{R}$.

பக்கமொன்றின் நீளம் 4 அலகுகளும் $A \equiv (2,1)$ ஆகவும் ABCD இடஞ்சுழியாகவும் எடுக்கப்பட்ட சாய்சதுரம் முழுவதும் முதலாம் கால்வட்டத்தினுள் அமைந்திருப்பதோடு பக்கம் AB ஆனது OX அச்சுக்குச் சமாந்தரமாகவும் உள்ளது. மேலும் $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ஆகும்.

(i) மேலுள்ள கேத்திரகணித வகைக்குறிப்பைப் பயன்படுத்தி சாய்சதுரம் ABCD இன் B,D உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. C உச்சியின் ஆள்கூறுகளையும் பெறுக.

(ii) மேலுள்ள அதே கேத்திரகணிதப் பேறைப் பயன்படுத்தி AC முலைவிட்டத்தின் படித்திறனைக் கண்டு AC, BD முலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(iii) முறையே AB, BC பக்கங்களை விட்டங்களாகக் கொண்ட $S_1 = 0, S_2 = 0$ என்ற இரண்டு வட்டங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

S_1, S_2 வட்டங்கள் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகின்றனவா? உமது விடைக்கான காரணத்தை எழுதுக.

(iv) சாய்சதுரத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்வதும் AB பக்கத்துக்குச் சமாந்தரமான கோட்டின் மீது மையத்தைக் கொண்டதுமான S_0 வட்டம் S_1 வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகிறது.

$S_0 \equiv x^2 + y^2 + 2\lambda x - 2(1 + \sqrt{3})y + (2\sqrt{3} - 11 - 8\lambda) = 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) என எழுதமுடியும் எனக் காட்டுக.

S_0 இன் ஆரை $\sqrt{35}$ அலகுகள் எனின் S_0 இற்கு இரண்டு நிலைகள் உண்டு எனக் காட்டி அவற்றின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

17' (a). $\sin A, \sin B, \cos A, \cos B$ ஆகிய உறுப்புக்களில் $\cos(A + B)$ இனை எழுதுக. A, B என்பவற்றைப் பொருத்தமானவாறு தெரிவு செய்து $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$ எனப் பெறுக. அதிலிருந்து $\sin 110^\circ = -\cos 200^\circ$ எனவும் $\cos 110^\circ = -\sin 20^\circ$ எனவும் காட்டி $\tan 110^\circ + \cot 20^\circ = 0$ என்பதை உய்த்தறிக.

(b). $\cos 4\theta - \cos 2\theta = 8\cos^4 \theta - 10\cos^2 \theta + 2$ எனக் காட்டுக.

அதிலிருந்து $\cos 4\theta = \cos 2\theta$ சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யுமாறு $\cos \theta$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(c). ABC முக்கோணியில் A, B உச்சிகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்ட இடையங்கள் முறையே AD, BE ஆகும் AD, BE கோடுகள் G இல் செங்குத்தாகச் சந்திக்கின்றன. மேலும் வழக்கமான குறிப்பீடுகளில் $a = 4\text{cm}, b = 3\text{cm}$ ஆகும். பொருத்தமானவாறு தெரிவு செய்யப்பட்ட முக்கோணிகளுக்கு கோசைன் விதியைப் பயன்படுத்தி $\hat{A}CB = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ எனக் காட்டுக.

(d) $\tan^{-1}(x + 1) + \tan^{-1}(x - 2) = \tan^{-1}(2)$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக. இதிலிருந்து ஓ ஐத் திருப்தி செய்யும் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

இதிலிருந்து, மேற்படி சமன்பாட்டுக்குப் பொருத்தமான தீர்வுகளை எழுதுக.
