අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2022

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	**ප්‍රශ්න අංකය**	**ලකුණු**
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} 6r(r-1) = 2n(n^2-1)$ බව පෙන්වන්න.

2. $y = |2x-2| - x$ හා $y = 2|x-2| - 2x$ හි ප්‍රස්තාර එකම oxy තලයක දළ ලෙස සටහන් කරන්න. එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $|2x-4| - |2x-2| > x$ අසමානතාව සපුරාලන සියලු තාත්ත්වික x හි අගය කුලකය ලබාගන්න.

3. ආර්ගන්ඩ් තලය මත, $|z-2-2i| \leq 1$ හා $Arg(z-4i) \geq -\frac{\pi}{4}$ මගින් දෙනු ලබන අවශ්‍යතා සපුරාලන R පෙදෙස අඳුරු කර දක්වන්න.

එනයින් එම R පෙදෙස තුළ $Im(Z)$ හි අවම අගය සොයන්න.

4. $\left(\sqrt{3}+11^{\frac{1}{5}}\right)^{10}$ ප්‍රසාරණයේ $r+1$ වන පදය $T_{(r+1)}$ ලියා දක්වන්න. එනයින් එම ප්‍රසාරණයේ පරිමේය පද සියල්ලේ වෛක්‍යය සොයන්න.

5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left(\frac{12 - 12\,Cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{(6x - \pi)^2} \right)$ සීමාව අගයන්න.

6. $y = \sqrt{ln|x|}$, $(x > 1,\ x \in \mathbb{R})$, $y = 0$, $x = 2$ හා $x = 4$ යන වක්‍ර වලින් ආවෘත පෙදෙස $x -$ අක්ෂය වටා රේඩියන 2π කෝණයකින් භ්‍රමණයෙන් ජනිත පරිමාව, ඝණ ඒකක $\boldsymbol{6\pi\, ln(2) - 2\,\pi}$ බව පෙන්වන්න.

7. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ බහුවලය මත, පරාමිතිය θ වන P ලක්ෂ්‍යය $(3\,Sec\ \theta,\, 6\,tan\ \theta)$ ආකාරයෙන් දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න. පරාමිතිය $\theta = \frac{\pi}{6}$ වන ලක්ෂ්‍යයේදී එම බහුවලයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය $x + 4y = 10\sqrt{3}$ බව සාධනය කරන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. අනුක්‍රමණය m වූ $l = 0$ සරළ රේඛාවකට, O මූලයේ සිට ඇති ලම්බ දුර ඒකක 1 කි. l සඳහා පිහිටීම් දෙකක් ඇති බව පෙන්වා එම එක් එක් අවස්ථාව සඳහා l හි සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

එම රේඛා දෙක සම්මුඛ පාද වශයෙන් හා ඛණ්ඩාංක අක්ෂ විකර්ණ වශයෙන් පවතින රොම්බසයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\left|\frac{2(m^2+1)}{m}\right|$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9. $y = mx + c$ රේඛාව මත කේන්ද්‍රය පිහිටි $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + p = 0$ වෘත්තය $y -$ අක්ෂය ස්පර්ශ කරන අතර, $x -$ අක්ෂයෙන් ඒකක 08 ක් දිග ජ්‍යායක් කපයි.

$g^2(1 - m^2) + 2gmc = 16 + c^2$ බව පෙන්වන්න.

10. $Sin^2\,\theta + Cos^2\,\theta = 1$ යොදාගනිමින්, $n \in \mathbb{Z}$ විට $\theta \neq n\pi$ සඳහා, $Cos\,e\,c^2\,\theta = 1 + Cot^2\,\theta$ බව ලබාගන්න. $Cot\,\theta - Cos\,e\,c\,\theta = \frac{5}{4}$ නම් එවිට $Cot\,\theta + Cos\,e\,c\,\theta = -\frac{4}{5}$ බව පෙන්වා, $Sin\,\theta = -\frac{40}{41}$ බව අපෝහනය කරන්න.

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2022

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $f(x) \equiv x^2 + (2a-1)x + (a+1),\ x \in \mathbb{R}$ යැයි ද a යනු තාත්ත්වික නියතයක් යැයි ද ගනිමු.
$(x + 2a - 1)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් නම් a හි අගය සොයන්න.
එම a අගය සඳහා $f(x)$ ලියා දක්වා $f(x) = 0$ හි මූල ලබාගන්න.
එනයින්, p තාත්ත්වික නියතයක් වූ $F(x) = f(p - 2x)$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති $F(x)$ වර්ග ප්‍රකාශනය ලියා දක්වන්න.
සියලු $p \in \mathbb{R}$ සඳහා $F(x) = 0$ වර්ග සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල පවතින බව සාධනය කරන්න.
$p \neq 0, p \neq 3$ විට, $F(x) = 0$ හි මූලයන්හි පරස්පරයයන් මූල වශයෙන් ඇති $G(x) = 0$ වර්ග සමීකරණය සොයන්න.
$F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ හි විවේචකයයන් එකම වන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(b) $P(x) \equiv x^4 - (1-\lambda)x^3 + \mu x + 2$ මගින් දෙනු ලබන $P(x)$ බහුපදය $x^2 - x - 2$ මගින් බෙදූවිට ශේෂය $10(x+1)$ කි. λ සහ μ සොයන්න.

එම λ සහ μ අගයයන් සඳහා $(x+1)$ යනු $P(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වා එවිට $P(x)$ යන්න $P(x) \equiv (x-\alpha)(x^3-\beta)$ ආකාරයෙන් දක්වන්න.
මෙහි α සහ β යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

12. (a) පහත වගුවේ දී ඇත්තේ වෘත්තීන් තුනකට අදාළව තෝරාගත් වෘත්තිකයන්ගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමකි.

වෘත්තිය	පිරිමි	ගැහැනු
වෛද්‍ය	3	1
හෙද	7	4
සාත්තුසේවා	5	5

මෙම කණ්ඩායමෙන් සාමාජික සංඛ්‍යාව 5 ක් වන කමිටුවක් තෝරා පත් කර ගත යුතුව ඇත. පහත දී ඇති එක් එක් අවස්ථාව යටතේ පත්කළ හැකි වෙනස් කමිටු සංඛ්‍යා සොයන්න.

(i) කිසිදු සීමාකිරීමක් නැතිවිට,

(ii) වෛද්‍ය, හෙද හා සාත්තු සේවා හා ක්ෂේත්‍ර තුනම නියෝජනය විය යුතු අතර, වෛද්‍ය ක්ෂේත්‍රය සඳහාම පමණක් ස්ත්‍රී - පුරුෂ දෙපක්ෂයම නියෝජනය වීම අනිවාර්ය විට,

(iii) වෛද්‍ය ක්ෂේත්‍රයේ සියලුදෙනාම නියෝජනය විය යුතු විට,

(b) $f(r) = \frac{2}{(2r-1)^2}, \ r \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු.

$f(r) - f(r+1) = \frac{16r}{(2r-1)^2(2r+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\frac{1}{1^2.3^2} + \frac{2}{3^2.5^2} + \frac{3}{5^2.7^2} + \frac{4}{7^2.9^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ අපරිමිත ශ්‍රේණියේ r වන පොදු පදය, U_r ලියා දක්වන්න.

$V_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$ හා $W_{2n} = \sum_{r=1}^{2n} u_r$ ලෙස අර්ථදැක්වෙන V_n හා W_{2n} සොයන්න.

$W_{2n} - V_n$ යන්න අභිසාරී වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$A^T B = 8C$ නම් α හි අගය ලබාගන්න. මෙහි α යනු තාත්ත්වික නියතයකි. එම α අගය සඳහා $B^T A$ සොයන්න. එනයින් $A^T B + B^T A$ යනු සමමිතික න්‍යාසයක් බව සාධනය කරන්න.

$(A^T B)P = I$ වන පරිදි $P_{(2\times2)}$ න්‍යාසයක් පවතීද? ඔබේ පිළිතුර සත්‍යාපනය කරන්න.මෙහි I යනු දෙවන ගණයේ තත්සාම්‍ය න්‍යාසය වේ.

(b) Z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් විට, $2 < |Z| \leq 6$ අවශ්‍යතාව සපුරාලන R පෙදෙස ආගන්ඩ් තලයක දක්වන්න. දැන් Z_R යනු ඉහත R පෙදෙසට අයත්වූ $Z_R = x + iy \ x, y \in \mathbb{R}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව යැයි ගනිමු.

(i) $Z_0 = Z_R + \overline{Z_R}$ මගින් දැක්වෙන Z_0 සොයන්න. මෙහි $\overline{Z_R}$යනු Z_R හි ප්‍රතිබද්ධය වේ.

(ii) Z_R හා Z_0 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකම R පෙදෙසට අයත්ව පවතින අයුරින් Z_R ට පැවතිය හැකි R' පෙදෙස ඉහත R පෙදෙස තුළම වෙන්කර දක්වන්න.

(iii) w යනු ඉහත R' පෙදෙසට අයත් වූ ද $|w|$ යන්න උපරිම වන අයුරින් වූද $Arg(w)$ යන්න අවම වන අයුරින් වූ ද, පළමුව වෘත්ත පාදයේ පිහිටි සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවයි. $x + iy$ ආකාරයෙන් w ලියා දක්වන්න.

එනයින් $w + \overline{w}$ සහ $w - \overline{w}$ ලබාගෙන, **ද මුවාවර් ප්‍රමේයය** යොදාගනිමින්,

$(|w + \overline{w}| + i|w - \overline{w}|)^{12} = 12^{12}$ බව පෙන්වන්න.

14. (a) $p,\ q$ යනු තාත්ත්වික නියත හා $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -q$ වන $y = f(x) \equiv \frac{3x+p}{(x+q)^2}$ සලකන්න.

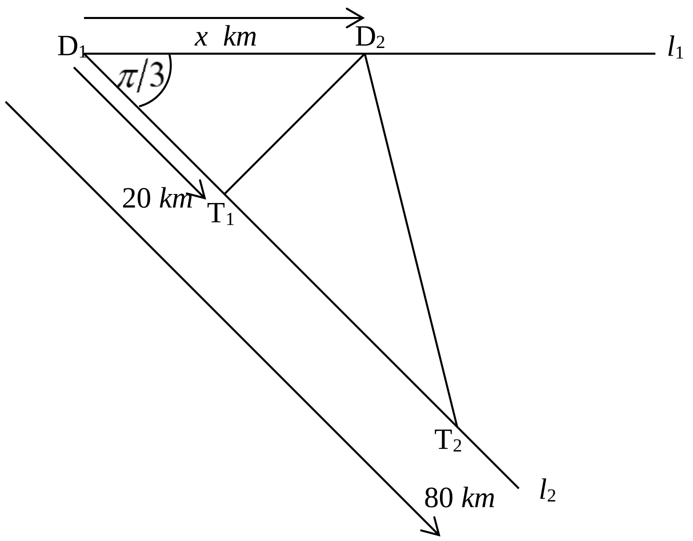
$y = f(x)$ වක්‍රයට $x = 2$ යනු ස්පර්ශෝන්මුඛ රේඛාවක් ද $x = \frac{4}{3}$ දී ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් ද ඇත. p හා q නියත නිර්ණය කරන්න.

$y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ x විෂයයෙන් ප්‍රථම ව්‍යුත්පන්නය වන $f'(x)$, $f'(x) = \frac{4-3x}{(x-2)^3}$, $x \neq 2$ මගින් දෙනු ලබන බව සාධනය කරන්න.

$x-$ අක්ෂය මත අන්තඃඛණ්ඩ, $y-$ අක්ෂය මත අන්තඃඛණ්ඩය, හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ පැහැදිලි ලෙස දක්වමින් $y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

x විෂයයන් $y = f(x)$ හි දෙවන ව්‍යුත්පන්නය වන $f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x-2)^4}, x \neq 2$ **බව දී ඇත**. එනයින් $y = f(x)$ වක්‍රයෙහි නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක සහ ඒවායේ සවභාවය නිර්ණය කරන්න.

(b) රූපයේ l_1 හා l_2 යනු එකිනෙකට $\frac{\pi}{3}$ ආනතව, සමබිමෙහි සරල රේඛීයව ඉදිකර ඇති අධිබලැති විදුලි රැහන් සම්ප්‍රේෂණ මාර්ග 2 කි. D_1 බෙදුම්පලෙන් ඇරඹෙන මෙම මාර්ග දෙකෙන් l_2 මාර්ගය අතරමග D_1 සිට පිළිවෙලින් $20\ km$ හා $80\ km$ දුරින් T_1 හා T_2 බෙදුම් පරිණාමක (Distribution Transformers) පිහිටා ඇත. l_1 සම්ප්‍රේෂණ මාර්ගයේ, D_1 සිට $x\ km$ දුරින් වෙනත් D_2 උප බෙදුම් පොලක් ඉදිකර D_2T_1 හා D_2T_2 ලෙස සරල රේඛීය විදුලි රැහැන් මාර්ග 2 ක් මගින් T_1 හා T_2 වෙත D_2 උප බෙදුම්පොළ සම්බන්ධ කල යුතුව ඇත.



$D_2T_1 = \sqrt{x^2 - 20x + 400}\ km$ හා $D_2T_2 = \sqrt{x^2 - 80x + 6400}\ km$ බව ලබා ගන්න. මෙහි x හි පරාසය සඳහන් කරන්න.

D_2T_1 හා D_2T_2 මුළු විදුලි රැහන්වල දිග අවමයක් වන පරිදි D_2 උපබෙදුම්පල l_1 මත ඉදිකළයුතු ස්ථානයට D_1 සිට දුර කොපමණද?

15. (a) $a > 0$ වූ $a \in \mathbb{R}$ සඳහා, $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ බව සාධනය කරන්න.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{Sin\,\theta(Sin^2\theta - Cos^2\theta)}$ හා $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{Cos\,\theta(Sin^2\theta - Cos^2\theta)}$ යැයි ගනිමු.

$I = -J$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{Sin\,\theta\,Cos\,\theta(Sin\,\theta - Cos\,\theta)}$ අනුකලය අගයන්න.

(b) $x^2 = (Ax+B)(1+x)^2 + C(1+x^2)(1+x) + D(1+x^2)$ වන පරිදි A, B සහ C නියත නිර්ණය කර, $x^2 = \frac{1}{2}x(1+x)^2 - \frac{1}{2}(1+x^2)(1+x) + \frac{1}{2}(1+x^2)$ බව ලබාගන්න.

එනයින්, $x \neq -1$ සඳහා $\int \frac{x^2}{(1+x^2)(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[ln\left|\frac{\lambda\sqrt{1+x^2}}{(1+x)}\right| - \frac{1}{(1+x)}\right]$ ලෙසින් දැක්විය හැකි බව සාධනය කරන්න. මෙහි λ යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

(c) සුදුසු ආදේශයක් යොදා ගනිමින්, $\int_1^{3^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{1}{x^3}\right) tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ අනුකලය අගයන්න.

16. $A \equiv (2,1)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන, අනුක්‍රමණය m වූ $l = 0$ සරල රේඛාව මත ඕනෑම P ලක්ෂ්‍යයක් $P \equiv [2+t, 1+mt]$ ලෙස පරාමිතිකව දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

පාදයක දිග ඒකක 4 ක් හා $A \equiv (2,1)$ වූ $ABCD$ වාමාවර්ත ලෙස ගත් රොම්බසය මුළුමනින්ම පළමු වෘත්ත පාදය තුළම පිහිටා ඇති අතර AB පාදය ox අක්ෂයට සමාන්තර වේ. තවද $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ වේ.

(i) ඉහත පරාමිතික නිරූපණයම යොදා ගනිමින් රොම්බසයේ B හා D ශීර්ෂවල ඛණ්ඩාංක සොයන්න. එනයින් C ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක ද ලබාගන්න.

(ii) තවදුරටත් එම පරාමිතික ප්‍රතිඵලයම යොදාගනිමින් AC විකර්ණයේ අනුක්‍රමණය සොයා AC හා BD විකර්ණවල සමීකරණ සොයන්න.

(iii) පිළිවෙලින් AB හා BC පාද, විෂ්කම්භයන් ලෙස පවතින $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න. S_1 හා S_2 වෘත්ත ප්‍රලම්භ ලෙස ඡේදනය වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(iv) රොම්බසයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන AB පාදයට සමාන්තර රේඛාව මත කේන්ද්‍රය පිහිටි S_0 වෘත්තයක් S_1 වෘත්තය ප්‍රලම්භව කපයි.

$S_0 \equiv x^2 + y^2 + 2\lambda x - 2(1+\sqrt{3})y + (2\sqrt{3} - 11 - 8\lambda) = 0$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ ලෙස දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න.

S_0 හි අරය ඒකක $\sqrt{35}$ ක් නම් S_0 සඳහා පිහිටීම් 2 ක් පවතින බව පෙන්වා ඒවායේ සමීකරණ ලබාගන්න.

17. (a) $Sin\,A$, $Sin\,B$, $Cos\,A$ හා $Cos\,B$ පද ඇසුරින් $Cos(A+B)$ ලියා දක්වන්න.

A හා B සුදුසු පරිදි තෝරාගනිමින්, $Cos(90° + \theta) = -Sin\ \theta$ බව ලබාගන්න.

එමගින්, $Sin\ 110^0 = -Cos\ 200^0$ බව හා $Cos\ 110^0 = -Sin\ 20^0$ බව පෙන්වා $tan\ 110^0 + Cot\ 20^0 = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $Cos\ 4\theta - Cos\ 2\theta = 8\,Cos^4\theta - 10\,Cos^2\theta + 2$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $Cos\,4\theta = Cos\,2\theta$ සමීකරණය සපුරාලන පරිදි වූ $Cos\,\theta$ හි අගයයන් සොයන්න.

(c) ABC ත්‍රිකෝණයක A හා B ශීර්ෂ වල සිට සම්මුඛ පාද වලට ඇඳි මධ්‍යස්ථයන් පිළිවෙලින් AD හා BE වන අතර ඒවා එකිනෙකට ලම්භකව G හිදී හමුවේ. තවද සුපුරුදු අංකනයෙන් $a = 4\,cm$ සහ $b = 3\,cm$ වේ. සුදුසු පරිදි තෝරා ගත් ත්‍රිකෝණ සඳහා **කෝසයින් නීතිය** යෙදීමෙන්, $A\hat{C}B = Cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(d) $tan^{-1}(x+1) + tan^{-1}(x-2) = tan^{-1}(2)$ සමීකරණය සලකන්න. මෙහි x තෘප්ත කරන සමීකරණයක් ලබාගන්න. එනයින් ඉහත ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණයට ගැලපෙන විසඳුම් ලියන්න.

***