



மாகாணக் கல்வித் திணைக்களம் - வடமாகாணம்
முன்னோடிப் பரீட்சை - 2021



தரம் : 13(2021)

இணைந்த கணிதம் - II

10 T II

மூன்று மணித்தியாலம்

மேலதிக வாசிப்பு நேரம் 10 நிமிடங்கள்

சுட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

(10) இணைந்தகணிதம்-II		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
மொத்தம்		

இணைந்தகணிதம்-I

இணைந்தகணிதம்-II

இறுதிப் புள்ளிகள்

9. A, B என்பன யாதாயினும் இரு நிகழ்ச்சிகள் $P(A \cap B^c) = 0.20$ $P(A^c \cap B) = 0.15$, $P(A \cap B) = 0.10$ எனத்தரப்பட்டுள்ளன. இங்கு A', B' என்பன முறையே A, B என்பவற்றின் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன. $P(A \cup B) = 0.45$ எனவும் $P(B/A) = \frac{1}{3}$ எனவும் காட்டுக.

10. பொலித்தீன் பைகளில் சீனி பொதி செய்யப்படும் அதே வேளை உற்பத்தியாளர் ஒவ்வொன்றிலும் $50kg$ இருப்பதாக உரிமை கோருகின்றார். உள்ளபடியான நிறைகள் அறியப்படாத அத்தகைய 100 பைகளுக்குப் பின்வரும் தகவல்கள் தரப்பட்டுள்ளன. $\sum_{i=1}^{100} (x_i - 50) = 57.2$ உம் $\sum_{i=1}^{100} (x_i - 50)^2 = 95.1$ உம் ஆகும்; இங்கு $x_i (i = 1, 2, \dots, 100)$ இனால் i ஆவது பையின் உள்ளபடியான நிறை குறிப்பிடப்படுகின்றது. பொருத்தமான ஏகபரிமாண உருமாற்றத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக, 100 பைகளின் உள்ளபடியான நிறைகளின் இடையையும் மாற்றற்றனையும் காண்க.

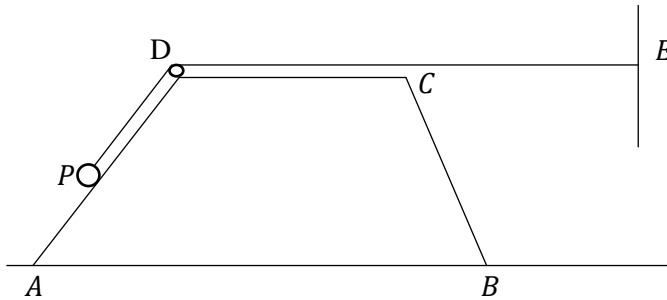
பகுதி B

ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) இரு கார்கள் A, B என்பன ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரே திசையில் ஓய்விலிருந்து புறப்படுகின்றன. கார் A ஆனது சீரான ஆர்முடுகல் f உடன் இயங்கி t நேரத்தில் அதன் உயர் கதியை அடைந்து பின்னர் அக்கதியுடன் தொடர்ந்து இயங்குகின்றது. கார் B ஆனது A இயங்கத் தொடங்கி $\frac{t}{2}$ நேரத்தின் பின் $\frac{2f}{3}$ எனும் மாறா ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகிறது. A, B என்பவற்றின் இயக்கங்களிற்குரிய வேக-நேர வரைபை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து, அதிலிருந்து B ஆனது A ஐக் கடக்கும் வரைக்கும் A இயங்கிய நேரம் $\frac{7t}{2}$ எனவும் காட்டி மேலும் அது இயங்கிய தூரம் $3ft^2$ எனவும் காட்டுக.

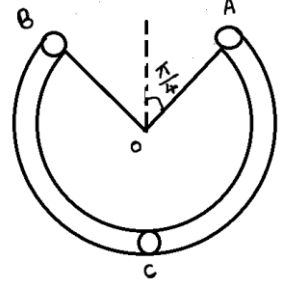
(b) ஒரு போர்க்கப்பல் சீரான கதியுடன் நேர்கோட்டுப் பாதையில் செல்கின்றது. குறித்த ஒரு கணத்தில் படகொன்று கப்பலில் இருந்து கிழக்குத் திசையில் $d \text{ km}$ தூரத்தில் உள்ளது. படகானது வடக்கு நோக்கி சீரான கதி w உடன் செல்கின்றது. போர்க் கப்பல் அடையக்கூடிய உயர் கதி $u (< w)$ ஆகவும் அதிலுள்ள சுடுகலனின் அதிகூடிய வீச்சு $R \text{ km}$ உம் ஆகும். $R < \frac{d}{w}\sqrt{w^2 - u^2}$ எனின் படகானது பாதுகாப்பாக செல்லும் எனவும், போர்க்கப்பலானது உயர்கதியில் செல்லும்போது $R > \frac{d}{w}\sqrt{w^2 - u^2}$ எனின் படகானது தாக்கப்படக்கூடிய நேரம் $\frac{2\sqrt{R^2w^2 - d^2w^2 + d^2u^2}}{w\sqrt{w^2 - u^2}}$ எனவும் காட்டுக

12. (a)



திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சீரான ஒப்பமான ஆப்பின் திணிவு மையத்தினூடான குறுக்குவெட்டு $ABCD$ ஆனது $AB \parallel DC$, $\hat{DAB} = \alpha$ ஆகவும் உள்ள ஒரு சரிவகம் ஆகும். ஆப்பு ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் முகம் AB தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. $2m$ திணிவுடைய துணிக்கை P , ஓர் இலேசான நீளா இழை PDE இன் ஒரு நுனியில் கட்டப்பட்டு அது முகம் AD இல் வைக்கப்பட்டு, இழை D இல் உள்ள ஓர் ஒப்பமான சிறிய இலேசான கப்பிக்கு மேலாகச் சென்று மறுமுனை DE கிடையாக இருக்க E இல் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இழை இறுக்கமாக இருக்க தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் துணிக்கை ஆப்புடன் தொடுகையில் உள்ளதெனக்கொண்டு ஆப்பிற்கும் துணிக்கைக்கும் இடையிலான மறுதாக்கத்தைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக. ஆப்பிற்கும் துணிக்கைக்கும் இடையிலான மறுதாக்கம் $\frac{2mg(2 \cos \alpha - 1)(2 - \cos \alpha)}{5 - 4 \cos \alpha}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\alpha < \frac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

(b) படத்தில் காட்டியவாறு சிறிய குறுக்கு வெட்டுப்பரப்புடைய வட்டவில் வடிவ a ஆரையுடைய மையத்தில் $\frac{3\pi}{2}$ கோணம் அமைக்கின்ற குழாயானது நிலைக்குத்தாகவும் திறந்த முனைகள் மேலாகவும் ஒரே கிடை மட்டத்திலும் இருக்க வைக்கப்பட்டுள்ளது. குழாயின் உட்புறத்தில் அதிதாழ் புள்ளியில் m திணிவுள்ள துணிக்கை P வைக்கப்பட்டு கிடைவேகம் u கொடுக்கப்படுகிறது. P ஆனது A இனூடாக வெளியேறி முனை B இனூடாகக் குழாயினுள்ளே விழுகின்றது. நிலைக்குத்து நேர்கோடு OC வில்லின் சமச்சீர் அச்சாகும்.



(i) $u^2 = 2ag(1 + \sqrt{2})$ எனக் காட்டுக.

(ii) துணிக்கை அடைந்த அதியுயர் உயரம் குழாயின் பூரணவட்டத்தின் அதியுயர் புள்ளிக்குமேல் $\frac{(3\sqrt{2}-4)a}{4}$ ஆக இருக்குமெனக் காட்டுக.

13. ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றின் மீது $AB = 8l$ ஆகுமாறுள்ள இரு புள்ளிகள் A, B ஆகும். திணிவு m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான துணிக்கை P ஆனது A யிற்கும் B யிற்கும் இடையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இயற்கை நீளம் $\frac{12l}{5}$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg ஐயும் கொண்ட ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு முனை புள்ளி A யுடனும் மறு முனை துணிக்கை P யுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இயற்கை நீளம் $4l$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $4mg$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு முனை புள்ளி B யுடனும் மறு முனை துணிக்கை P யுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது A யிலிருந்து $\frac{60l}{17}$ தூரத்தில் சமநிலையில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஆனது $AP = \frac{12l}{5}$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளி C இல் வைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. நேரம் t இல் துணிக்கை P ஆனது AB வழியே $AP = x$ ($\frac{12l}{5} \leq x \leq 4l$) ஆகும்போது இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{17g}{12l}(x - \frac{60l}{17}) = 0$. இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

இச்சமன்பாட்டை வடிவம் $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ இல் மீண்டும் எழுதுக; இங்கு $X = x - \frac{60l}{17}$ உம் $\omega^2 = \frac{17g}{12l}$ உம் ஆகும்.

அலைவுமையம், வீச்சம் என்பவற்றைக் காண்க. துணிக்கை P ஆனது C இல் இருந்து $x = 4l$ இல் உள்ள புள்ளி D ஐ அடைய எடுத்த நேரம் $\sqrt{\frac{12l}{17g}} \left\{ \pi - \cos^{-1} \frac{5}{12} \right\}$ எனக் காட்டுக.

$x = 4l$ இல் துணிக்கையின் வேகத்தைக் காண்க. $x = x_0$ என்னும் புள்ளியில் ($x_0 > 4l$) துணிக்கையின் கதி பூச்சியம் எனின் சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $x_0 = \frac{12l}{5} + \frac{16\sqrt{3}l}{5\sqrt{5}}$ எனக் காட்டுக. $4l \leq x \leq x_0$ இற்கு துணிக்கை P இன் இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{5g}{12l}(x - \frac{12l}{5}) = 0$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக. இதன் மையத்தையும் வீச்சத்தையும் காண்க.

14. (a) O பற்றி $\overrightarrow{OP} = \underline{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{q}$ ஆகும். R ஆனது OP இன் நடுப்புள்ளி ஆகும். $OX:XQ = 3:1$ ஆகும். OQ மீது X என்ற புள்ளியும் $PY:YX = 4:1$ ஆகும். PX இன் மீது Y என்ற புள்ளி உள்ளது.

(i) \overrightarrow{OR} , \overrightarrow{OX} , \overrightarrow{OY} ஆகியவற்றை \underline{p} , \underline{q} இன் சார்பில் காண்க.

(ii) $\overrightarrow{QY} = \frac{1}{5}(\underline{p} - 2\underline{q})$ எனக் காட்டுக.

(iii) Q, Y, R ஆகியன ஒரே நேர்கோட்டுப் புள்ளிகள் எனக்காட்டி $QY:YR$ ஐயும் காண்க.

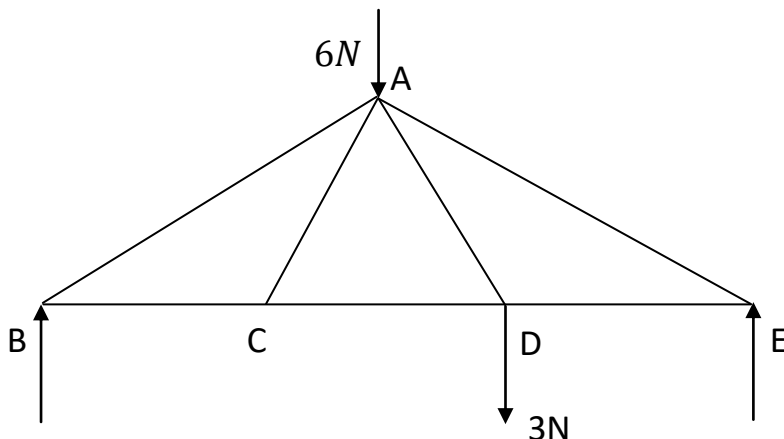
(b) $ABCDEF$ ஆனது $2a$ மீற்றர் பக்க நீளமுள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். 1, 2, 3, 4, 5, 6 நியூற்றன் விசைகள் முறையே \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DE} , \overrightarrow{EF} , \overrightarrow{FA} ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படும் திசைகளின் வழியே தாக்குகின்றன. இவ் விசைத் தொகுதி

(i) அறுகோணியின் மையம் O இல் தாக்கும் ஒரு விசையாகவும் ஒரு இணையாகவும் ஒடுங்குமாயின் விசையையும் இணையையும் காண்க.

(ii) தனிவிசையாக ஒடுங்குமாயின் விசையின் பருமனையும் திசையையும் தாக்கக் கோட்டையும் காண்க.

15. (a) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ ஆகவும் நிறை W ஆகவும் உள்ள AB, BC, CD என்னும் மூன்று சீரானகோல்கள் B, C யில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை கோல் BC கிடையாக இருக்குமாறு A, D எனும் முனைகள் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் பொறுத்திருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநீளமுள்ள இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இரு இழைகளால் AB, CD ஆகிய கோல்களின் நடுப்புள்ளிகள் இணைக்கப்பட்டு மறு முனைகள் கோல் BC இன் நடுப்புள்ளிக்குக் கட்டப்பட்டுள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாகவும் $ABCD$ நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் இருக்க $\hat{ABC} = 120^\circ$ ஆகவுள்ளது. இழைகளில் உள்ள இழுவைகள் $2W$ எனக் காட்டி, மூட்டு B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனைக் கண்டு, அது கிடையுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ கோணத்தில் உள்ளதெனக் காட்டுக.

(b)

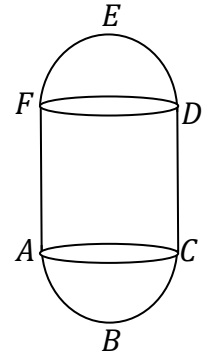


சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட 7 இலேசான கோல்களைக் கொண்ட நிலைக்குத்தான சட்டப்படல் மேலே உள்ள உருவிலே காட்டப்பட்டுள்ளது. BC, CD, DE ஆகியவை கிடையாக உள்ளன. இது A இலும் D இலும் முறையே $6N$, $3N$ சமையகளைக் கொண்டும் B இலும் E இலும் நிலைக்குத்தாக தாங்கப்படும் உள்ளது. $BC=CD=DE=AC=AD$ ஆகும். B இலும் E இலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தித் தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, **இதிலிருந்து**, எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு இவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் கூறுக.

16. (i) r ஆரையுடைய அரைவட்டவில் வடிவிலான சீரான கம்பி ஒன்றின் திணிவுமையத்தைத் தொகையிடல் மூலம் காண்க

(ii) r ஆரையுடைய சீரான திண்ம அரைக் கோளத்தின் திணிவு மையத்தைத் தொகையிடல் மூலம் காண்க.

படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு $2a$ ஆரையுடைய சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ABC , இன் மேல் $2a$ ஆரையையும் உயரம் h ஐயும் உடைய பொள் உருளை $ACDF$ ஆனது அவற்றின் வட்ட முகங்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்துமாறு பொருத்தப்பட்டு உருளையின் மேல் வட்ட விளிம்பில் உள்ள புள்ளிகள் F, D உடன் $2a$ ஆரையுடைய அரைவட்ட வில் வடிவிலான கம்பி உருளையின் விட்டம் வழியே ஆன நிலைக்குத்து தளத்தில் படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டு ஓர் அலங்கார விளக்கு ஆக்கப்பட்டுள்ளது. அரைக் கோளத்தின் அடர்த்தி ρ உம் உருளையின் பரப்படர்த்தி $a\rho$ உம் கம்பியின் நீள அடர்த்தி $a^2\rho$ உம் ஆகும். சேர்த்திப் பொருளின் திணிவுமையத்தை அரைக் கோளத்தின் வட்டவிளிம்பில் இருந்து காண்க.



இக் கூட்டுலானது ஒரு கிடைத்தரையின்மீது அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பின் எப்புள்ளியும் தொடுகையிலுள்ளவாறு சமநிலையில் இருக்குமெனின் h இனை a சார்பாகக் காண்க.

17. (a) வெளிநாட்டு நிறுவனம் ஒன்றின் விருந்துபசார விழாவில் கலந்து கொண்ட அனைவருக்கும் தவறுதலாக பறவைக் காய்ச்சல் நோயினால் பாதிக்கப்பட்ட இறைச்சிக் கோழிகளின் சமைத்த இறைச்சி வழங்கப்பட்டது. அதனால் அவர்களுக்கு கடும் நோய் ஒன்றின் அறிகுறிகள் ஏற்படுகின்றது. இவ் அறிகுறிகள் ஏற்படினும் அவர்களுக்கு அக்கடும் நோய் ஏற்படாமல் இருக்கலாம். இவ் அறிகுறிகளாவன கடும் தலைவலி அல்லது கடும் காய்ச்சல் அல்லது வயிற்றோட்டம் ஆகும். இவ் அறிகுறிகளில் ஒன்று மட்டுமே ஒருவருக்கு ஏற்படும். இதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.2, 0.5 ஆகும். இவ் அறிகுறிகள் ஏற்படும்போது கடும் நோய் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.1, 0.4, 0.5 ஆகும். எழுமாற்றாக தெரிந்தெடுக்கப்படும் ஒருவர் கடும் நோயினால் பாதிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது? கடும் நோய் ஏற்பட்ட ஒருவருக்கு கடும் தலைவலி இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(b) இடை \bar{x} ஐயும் நியமவிலகல் S_x ஐயும் உடைய $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ என்னும் n எண்களின் தொடை $i = 1, 2, \dots, n$ இற்கு $y_i = ax_i + b$ என்னும் சூத்திரத்தின் மூலம் $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ என்னும் n எண்களின் தொடையாக உருமாற்றப்படுகிறது. இங்கு a, b ஆகியன மாறிலிகள் $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ என்னும் n எண்களின் தொடையின் இடையுமே நியம விலகலும் முறையே \bar{y}, S_y எனக் கொள்வோம். $\bar{y} = a\bar{x} + b, S_y = |a|S_x$ எனக் காட்டுக.

ஒரு குறித்த பரீட்சையில் இணைந்த கணிதம் பௌதிகவியல் என்னும் பாடங்களிற்குத் தோற்றிய பரீட்சார்த்திகளின் புள்ளிகளின் இடைகளும் நியமவிலகல்களும் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றன.

	இடை	நியமவிலகல்
இணைந்த கணிதம்	m	15
பௌதிகவியல்	45	p

அப்பாடங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் பெற்ற புள்ளிகளின் இடை 50 ஆகவும் நியமவிலகல் 20 ஆகவும் இருக்குமாறு ஏகபரிமாண முறையாக அளவிடையாக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்வோம். ஒரு குறித்த பரீட்சார்த்தியின் தொடக்கப்புள்ளிகளும் அளவிடையாக்கப்பட்ட புள்ளிகளும் கீழே காணப்படுகின்றன.

	தொடக்கப்புள்ளி	அளவிடையாக்கப்பட்ட புள்ளி
இணைந்த கணிதம்	40	40
பௌதிகவியல்	61	65

m இன் பெறுமானங்களையும், p இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

பரீட்சார்த்திகள் தமது விடைத்தாள்களை மீளாய்வு செய்வதற்கு விண்ணப்பிக்க அனுமதிக்கப்பட்டனர் மீளாய்விற்குப் பின்னர் பரீட்சைக்குத் தோற்றிய பரீட்சார்த்திகளின் மொத்த எண்ணிக்கையில் 1% ஆனோரின் இணைந்த கணித பாடப் புள்ளிகள் மாற்றப்பட்டன பரீட்சார்த்திகளின் இணைந்த கணித பாடத்தில் புள்ளிமாற்றம் பெற்ற மாணவர்களின் புள்ளிகளின் இடை 60 இலிருந்து 64 இற்கு அதிகரித்தது. இணைந்த கணித பாடத்திற்கு தோற்றிய எல்லாப் பரீட்சார்த்திகளினதும் மீளாய்வின் பின்னர் உள்ள புள்ளிகளின் இடையைக் காண்க.