



மாகாணக் கல்வித் திணைக்களம் - வடமாகாணம்
முன்னோடிப் பரீட்சை - 2021



தரம் : 13(2021)

இணைந்த கணிதம் - I

10 T I

மூன்று மணித்தியாலம்

மேலதிக வாசிப்பு நேரம் 10 நிமிடங்கள்

சுட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

(10) இணைந்தகணிதம்-I		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
மொத்தம்		

இணைந்தகணிதம்-I

இணைந்தகணிதம்-II

இறுதிப் புள்ளிகள்

3. $|Z - 2 - i| = |Z + 4 - 9i|$ ஆகுமாறு Z இன் ஒழுக்கை ஆகன் வரிப்படத்தில் வரைந்து $|Z|$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது.

4. $(x^3 - \frac{1}{x^2})^n$ இன் விரியில் உள்ள x^t இன் குணகம் இருப்பின் $3n - t$ ஆனது 5 இன் மடங்கு எனக்காட்டுக. இங்கு $t \leq 3n$ ஆகும்.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \frac{3}{2}$ எனக் காட்டுக

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. $y = \sin x$ என்ற வளையியை $0 \leq x \leq \pi$ என்ற எல்லைகளுக்கு இடையில் x அச்சப்பற்றி 2π ஆரையன்களின் ஊடாக சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{\pi^2}{2}$ என காட்டுக

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. $a, b \in \mathbb{R}^+$ இற்கு நீள்வளையம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ மீதுள்ள புள்ளி $p \equiv (a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ இல் வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} \cos \alpha + \frac{y}{b} \sin \alpha = 1$ எனக் காட்டுக. $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ இன் தொடலியானது $(2a, 0)$ என்னும் புள்ளியினூடு செல்லும் எனின் α இன் பெறுமானத்தை காண்க?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. $A = (1, -1), B = (5, -3)$ எனக் கொள்வோம். AB இன் செங்குத்து இருகூறாக்கி மீது $C = (2t, t), t \in R$ உள்ளது. t இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, $ACBD$ ஒரு சாய்சதுரமாக இருக்குமாறு புள்ளி D இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. $x - y = 0$, $y = 0$ என்னும் இரு நேர்க்கோடுகளையும் தொடுமாறு முற்றாக முதற் கால் வட்டத்தில் இருக்கும் 1 அலகு ஆரையுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $\tan 2\alpha$ வை $\tan \alpha$ சார்பில் தருக. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ எனக்காட்டுக

இதிலிருந்து $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{5}{12}\right) = \frac{120}{119}$ எனக்காட்டுக

பகுதி B

ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $f(x) = (x - a)(x - b) - 1$ என்க இங்கு $b > a$
- I. $f(x)$ இழிவைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக
 - II. $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க
 - III. $f(x)$ இன் பரும்படி வரைபை வரைக
 - IV. $f(x)$ இன் மூலங்கள் $(-\infty, a), (b, \infty)$ எனும் ஆயிடுையில் அமைந்திருக்கும் எனக் காட்டுக
- (b) $ac \neq bc, \alpha, \beta$ ஆனது $x^2 + ax + bc = 0$ இன் மூலங்கள் β, γ ஆனது $x^2 + bx + ca = 0$ இன் மூலங்கள் ஆகும். α, γ மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 + cx + ab = 0$ எனக் காட்டுக. இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$
- (c) $p(x)$ ஆனது மூன்றுப்பு பல்லுறுப்பியாகும். இதன் முந்துறுகுணகம் 1 ஆகும் $p(x)$ இனை $(x - 1), (x - 3)$ என்பவற்றால் வகுக்கும் போது மீதிகள் முறையே 7, 13 ஆகும். $p(x)$ இனை $(x - 1)(x - 3)$ இனால் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்க. $p(2) = 6$ எனில் $p(x)$ இனை $(x - 1)(x - 3)$ இனால் வகுக்கும் போது ஈவைக் கண்டு $p(x)$ இனைக் காண்க
12. (a) பன்னிரண்டு உறுப்பினர்களைக்கொண்ட நடமாடும் கொரோனா தடுப்பூசி செலுத்தும் குழு ஒன்று ஏழு நாட்கள் வேலைத்திட்டம் ஒன்றை செயன்முறைப்படுத்தியது. அக்குழுவில் 2 வாகன ஓட்டிகளும், 4 வைத்தியர்கள் 6 தாதியர்களும் காணப்பட்டனர். குறித்த ஒரு நாளில் ஒரு வாகன ஓட்டியும் 2 வைத்தியர்களும் 4 தாதியர்களும் வேலை செய்யவேண்டும்.
- I. அமைக்கக்கூடிய மொத்த குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
 - II. தாதியர்களில் குறித்த இருவர் இணைந்து பணிபுரிவார்கள் எனின் அமைக்கக்கூடிய குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
 - III. வைத்தியர்களில் குறித்த இருவர் இணைந்து பணிபுரிய மறுப்பின் அமைக்கக்கூடிய குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
 - IV. குறித்த ஒரு நாள் வேலைப்பழு அதிகமாக காணப்படும் எனக்கருதி 1 தாதியும் 1 வைத்தியரும் உள்வாங்கப்படுவார்களெனின் அமைக்கக்கூடிய குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
- (b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$ எனக் காட்டுக. $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $u_r - u_{r-1} = 2r$ எனத் தரப்படின் $u_n = n^2 + n - 1$ எனக்காட்டுக.
- இங்கு $u_1 = 1$ ஆகும். $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $v_r = \frac{u_r}{(r+2)!}$ எனக் கொள்வோம்.
- $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^n v_r = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{(n+2)!}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} v_r$ ஒருங்குகின்றது. எனக் காட்டி அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

13. (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ஆனது 2×2 வரிசையுடைய தாயமாகும். $M^2 - 3M + 8I = 0$

எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து M^{-1} ஐக் காண்க. இங்கு I ஆனது 2×2 வரிசையுடைய அலகுத்தாயமாகும்.

$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ எனக்கொள்வோம். $A^2 - 2A + 2I$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) Z, ω என்பன சிக்கல் இரு சிக்கல் எண்கள் எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

i. $\overline{Z + \omega} = \bar{Z} + \bar{\omega}$

ii. $|Z|^2 = Z \cdot \bar{Z}$

iii. $Z + \bar{Z} = 2\text{Re}(Z)$

இதிலிருந்து $|Z - \omega|^2 = |Z|^2 + |\omega|^2 - 2\text{Re}(Z\bar{\omega})$ எனக் காட்டுக..

(c) ஒரு நேர் முழுவெண் சுட்டிக்காண தமோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $z = \cos \theta + i \sin \theta$

எனின், $z^{-n} = \cos n \theta - i \sin n \theta$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\theta \in \mathbb{R}$ உம் $n \in \mathbb{Z}^+$ உம் ஆகும்.

$-1 + i\sqrt{3}, \sqrt{3} + i$ என்னும் சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் வடிவம் $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ இல் எடுத்துரைக்க. இங்கு $r > 0$ உம் $-\pi < \theta \leq \pi$ உம் ஆகும். $m, n \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம்.

$\frac{(-1+i\sqrt{3})^n}{(\sqrt{3}+i)^m} = 8$ எனின், $n = m + 3$ எனவும் $n = 4k - 1$ எனவும் காட்டுக. இங்கு $k \in \mathbb{Z}$.

14. (a) $x \neq 0$ இற்கு $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$ எனக் கொள்வோம். $x \neq 0$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது

$f'(x) = \frac{1-x}{x^3}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக? இதிலிருந்து $f(x)$ அதிகரிக்கின்ற

ஆயிடையையும், $f(x)$ குறைகின்ற ஆயிடையையும் காண்க? மேலும் $f(x)$ இன் திரும்பல்புள்ளியின்

ஆள்கூறுகளையும் காண்க? $x \neq 3$ இற்கு $f''(x) = \frac{-2(x-3)}{x^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $y = f(x)$ இன்

வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க? $y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள்,

திரும்பல்புள்ளி, விபத்திப்புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி பரும்படியாக வரைக

(b) ஒரு தாங்கியின் கனவளவு 45π கன அலகுகள் ஆக இருக்கவேண்டும் எனவும் அது வட்ட அடியை

உடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளையும் அதன் திறந்த முனையில் வெளியே நீட்டியிருக்கும் ஓர் அரைக்கோள

முடியையும் கொண்டிருக்க வேண்டும் எனவும், தாங்கியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு குறைந்தபட்சமாக

இருக்கவேண்டும் எனவும் தீர்மானிக்கப்பட்டது. உருளையின் ஆரை, உயரம் என்பன முறையே x, y

அலகுகள் எனவும் கொண்டு தாங்கியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $A = 3\pi x^2 + 2\pi xy$ சதுர அலகுகள் என

காட்டுக. $y = \frac{45}{x^2} - \frac{2x}{3}$ எனவும் காட்டுக மேலும் A குறைந்த பட்சமாக இருக்கும் y இன் பெறுமானத்தை

காண்க

15. (a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும்

$x^2 = A(x-1)(x^2+4) + B(x^2+4) - \frac{4}{35}(2x-1)(x-1)^2$ ஆகுமாறு A,B ஆகிய மாறிலிகள் உள்ளன வெனதரப்பட்டுள்ளது. A,B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க? இதில் இருந்து $\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}$ ஐ பகுதிப்பின்னங்களில் எழுதி $\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx$ ஐ காண்க ?

(b). பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int e^{3x} \cos 4x dx$ காண்க?

(c). a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$

ஐப் பயன்படுத்தி $\int_0^\pi \frac{x^2 \sin x}{(2x-\pi)(1+\cos^2 x)} dx = \frac{\pi^2}{4}$ எனகாட்டுக

16. சாய்சதுரம் OABC இல் பக்கம் OA இன் சமன்பாடு $4x - 3y = 0$ ஆகும். இங்கு O உற்பத்தி ஆகும். மூலைவிட்டம் OB இன் சமன்பாடு $y - x = 0$ ஆகும். $B \equiv (5, 5)$ ஆயின் AB, AC, BC, OCயின் சமன்பாட்டினைகாண்க.

சாய்சதுரம் OABC யில் பக்கங்கள் OC, OA இனை தொட்டுச்செல்லும் ஆரை 1 அலகு ஆகவுடையதும் முழுவதும் முதலாம் கால்வட்டத்தில் அமைந்துள்ள வட்டத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறுகளையும், அதன் சமன்பாட்டையும் காண்க. O இலிருந்து வட்டத்திற்கான தொடுநாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. (a) வழமையான குறியீடுகளுடன் sin நெறியைக் கூறுக.

முக்கோணி ABC இல் கோணம் \hat{A} இன் இருசமகூறாக்கி BC ஐ D இல் சந்திக்கின்றது $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$ எனக் காட்டுக. இதே முக்கோணியில் $2BC = AB = a$, $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$ எனின் $CD = \frac{\sqrt{3}a}{2+\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக. $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(b) $\alpha = \tan^{-1} \frac{5}{12}$, $\beta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$ எனத் தரப்படும்போது

$\cos(\alpha - \beta) = \frac{63}{65}$ எனக் காட்டுக

$\sin(\alpha - \beta)$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(c) தீர்க்க $\cos 2x - \sin 2x + 2(\cos x - \sin x) + 1 = 0$