தவணைப் பரீட்சை, மார்ச் - 2016
Term Examination, March - 2016

தரம் :- 13 (2016) **இணைந்த கணிதம் – I**

பகுதி - B

11) (a) $p(x) = ax^3 + bx^2 - 16x - 12$ எனக் கொள்வோம். $p(x)$ இன் ஒரு காரணி $x + 2$ எனவும் $p(x)$ ஐ $x - 2$ இனால் வகுக்க வரும் மீதி -48 எனவும் தரப்பட்டுள்ளன.

(i) a, b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $p(x)$ஐ ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதுக.

(b) $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ என்ற கோவையானது 5 இற்கும் 9 இற்கும் இடையே இருக்காது எனக் காட்டுக.

(c) $x^2 - bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β ஆகும்.

(i) $\frac{\alpha^2}{\beta}, \frac{\beta^2}{\alpha}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b, c இன் உறுப்புகளில் காண்க.

(ii) $\alpha^2 = \beta$ எனின் $b^3 = c(3b + c + 1)$ எனக் காட்டுக.

12) (a) ஒரு பரீட்சைக்குத் தோற்றும் பரீட்சார்த்தி ஒருவர் A, B, C என்னும் மூன்று பகுதிகளின் கீழ் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் முறையே 5, 4, 3 வினாக்கள் வீதம் தரப்பட்டுள்ள இப்பன்னிரண்டு வினாக்களில் ஆறு வினாக்களிற்கு விடை எழுத வேண்டும்.

(i) ஒவ்வொரு பகுதியிலும் முதலாம் வினா கட்டாயமானது,

(ii) அவர் எந்த ஒரு பகுதியிலும் மூன்று வினாக்களிற்கு மேற்பட விடை எழுதவியலாது,

எனின் மேலே தரப்பட்ட ஒவ்வொரு வகையிலும் அப்பரீட்சார்த்தி ஆறு வினாக்களைத் தெரிந்தெடுக்கத்தக்க வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) n ஒரு இரட்டை எண் ஆகும் போது $1^3 + 3.2^2 + 3^3 + 3.4^2 + 5^3 + 3.6^2 +$ .... எனும் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $\frac{n}{8}[n^3 + 4n^2 + 10n + 8]$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து n ஒற்றையாகும் போது n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$\frac{1}{8}(n+1)[n^3 + 7n^2 - 3n - 1]$ என்பதை உய்த்தறிக.

13) (i) $z_1 = 5 + i$ எனவும் $z_2 = -2 + 3i$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளன.

(a) $|z_1|^2 = 2|z_2|^2$ எனக் காட்டுக.

(b) $\arg(z_1, z_2)$ இனைக் காண்க.

(ii) $16 - 30i$ இன் வர்க்க மூலங்களை $a + ib$ வடிவில் தருக. இங்கு a, b என்பன மெய்யெண்கள்.

(iii) P, Q, R ஆகியன ஆகண் வரிப்படத்தில் முறையே z_o, z_1, z_2 என்னும் சிக்கலெண்களை வகைக்குறிக்கும் மூன்று வேறு வேறான புள்ளிகளாகும். $PQ = PR$ ஆகவும் θ ஆனது PQ இலிருந்து PR இற்கு இடஞ்சுழிப் போக்கில் அளக்கப்பட்ட கோணமாகவும் இருப்பின் $(z_2 - z_o) = (z_1 - z_o)(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனக் காட்டுக.

ஆகண் வரிப்படத்தில் $|z - 1| = \sqrt{2}$ எனும் வட்டத்தைச் சுற்றி வரையப்படும் சதுரத்தின் ஓர் உச்சி $2 + \sqrt{3}\,i$ எனின் சதுரத்தின் மற்றைய உச்சிகளைக் காண்க.

14) (a) $y = e^{\tan^{-1}x} + e^{-\tan^{-1}}$ எனின் $(1+x^2)^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\,\frac{dy}{dx} = y$ எனக் காட்டுக.

(b) $x \neq 1,\ 4$ இற்கு $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$ எனக் கொள்வோம். $f'(x) = \frac{4-x^2}{(x-1)^2(x-4)^2}$ எனக் காட்டுக. திரும்பற் புள்ளிகளையும் அணுகுகோடுகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபை பரும்படியாக வரைக.
$-1 < k < -\frac{1}{9}$ இற்கு $k(x-1)(x-4) - x = 0$ எனும் சமன்பாடு மெய்த்தீர்வுகளைக் கொண்டிராது என்பதை உய்த்தறிக.

(c) சதுர அடியைக் கொண்டதும் மூடி இல்லாததும் மொத்த வெளிமேற்பரப்பளவு a^2 ஆகவும் அமையுமாறு பெட்டி ஒன்றை அமைக்க வேண்டியுள்ளது. பெட்டியின் உயர்கொள்ளளவு $\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

15) (a) $\int_o^a f(x)dx = \int_o^a f(a-x)dx$ எனக் காட்டுக. இதனைப் பயன்படுத்தி $\int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x\ dx = \frac{\pi}{32}$ எனக் காட்டுக.

(b) ஓர் உகந்த பிரதியீட்டையும் பகுதிகளாகத் தொகையிடும் முறையையும் பயன்படுத்தி $\int x^5 \cos x^2\ dx$ ஐக் காண்க.

(c) பகுதிப் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தி $\int \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)\ (x^2+4)}$ ஐக் காண்க.

16) (a) $\ell_1 = a_1\,x + b_1 y + c_1 = 0$, $\ell_2 = a_2\,x + b_2 y + c_2 = 0$ என்னும் இரு சமாந்தரமல்லாத நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் $AB,\ BC,\ CA$ இன் சமன்பாடுகள் முறையே $4x - 3y + 2k = 0,\ \ 3x + 4y + k = 0,\ \ 7x + y + k = 0$ ஆகும்; இங்கு $k \in \mathbb{R}$.
(i) AB ஆனது BC இற்குச் செங்குத்து எனக் காட்டுக.
(ii) $A\hat{B}C$ இன் இருகூறாக்கியின் சமன்பாட்டை k இன் சார்பில் காண்க.
(iii) $A\hat{B}C$ இன் இருகூறாக்கியானது AC ஐ $E(-4, 3)$ இல் சந்திப்பின் $k = 25$ எனக் காட்டுக.
(iv) $k = 25$ எனின் $ABCD$ ஒரு சதுரம் ஆகுமாறு D இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(b) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4,\ (x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ ஆகிய வட்டங்கள் இரு புள்ளிகளில் இடைவெட்டும் எனக் காட்டி இருவட்டங்களுக்குமான பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17) (a) $\tan 3A$ இனை $\tan A$ சார்பில் தருக.
$\frac{\tan 3A}{\tan A} = k$ எனின் $\frac{\sin 3A}{\sin A}$ இனை k சார்பில் காண்க.

(b) $\sin^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ எனின் $2x^2 + 1 = \sqrt{5}$ எனக் காட்டுக.

(c) கோசைன் நெறியைக் கூறுக.
வழக்கமான குறிப்பீட்டில் யாதுமொரு முக்கோணியின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\ bc \sin A$ என நிறுவுக.
ஒரு வட்ட நாற்பக்கலின் அடுத்துள்ள இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே $5cm,\ 2cm$ ஆகும். அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணம் 60° ஆகும். அத்துடன் வட்ட நாற்பக்கலின் பரப்பளவு $4\sqrt{3}\ cm^2$ எனின் எஞ்சிய இரு பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.