



FWC

யாழ். வலயக் கல்வித் திணைக்களத்தின் அனுசரணையுடன்
தொண்டைமானாறு வெளிக்கள நிலையம் நடாத்தும்

Field Work Centre

தவணைப் பரீட்சை, யூன்- 2015
Term Examination, June - 2015

தரம் :- 13 (2015)

இணைந்த கணிதம் - I

மூன்று மணித்தியாலங்கள்

சுட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

இணைந்தகணிதம் I

பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
வினாத்தாள் I இன் மொத்தம்		

இணைந்தகணிதம் I

இணைந்தகணிதம் II

இறுதிப் புள்ளி

1. $n = 0, 1, 2, \dots$ இற்கு $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ எனவும் $a_0 = 1$ எனவும் கொள்வோம். கணிதத்தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $a_n = \frac{1}{n+1}$ எனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. சமனிலி $2|x| + x < 3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களையும் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ஒரே ஆகண் வரிப்படத்தில் $Re(z - 3) = 1$, $Arg(z - 1) = \frac{\pi}{3}$ என்பவற்றைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z இனால் வகைக்குறிக்கப்படும் புள்ளிகளின் ஒழுக்குகளைப் பரும்படியாக வரைந்து, அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியினால் வகைக்குறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணைக் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம். $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ இன் விரியில் உள்ள முதலாம், இரண்டாம், மூன்றாம் உறுப்புகளின் குணகங்களின் கூட்டுத்தொகை 46 ஆகும். n இன் பெறுமானத்தையும் விரியின் 4 ஆம் உறுப்பையும் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. $\alpha \in \mathbf{R}$ இற்கு $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x \sin \alpha - \alpha \sin x}{x - \alpha} = \sin \alpha - \alpha \cos \alpha$ எனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. நேர்கோடு $y = 4$ இனாலும் y அச்சினாலும் வளையி $y = x^2$ இனாலும் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசத்தை நிழற்றிக் காட்டுக. நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{16}{3}$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. $(2a, 0)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும் $2x + a = 0$ எனும் நேர்கோட்டைத் தொடுவதுமான வட்டத்தின் மையத்தின் ஒழுக்கு $4y^2 + 20ax + 15a^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 = 4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ என்பதை உய்த்தறிக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

பகுதி B

11. (a) $(x + k)(x + 2k)$ என்பது $f(x) \equiv 2x^3 + 5x^2 + x - 2k$ இன் ஒரு காரணி எனின் $k = 0$ அல்லது $k = 1$ எனக் காட்டுக. $k = 1$ எனின் $f(x)$ ஐ $x^2 - 1$ இனால் வகுக்க வரும் மீதியைக் காண்க.

(b) $f(x) = (a - b - c)x^2 + ax + b + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ உம் $a - b - c \neq 0$ உம் ஆகும்.

(i) $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவை எனக் காட்டுக.

(ii) $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் மற்றையதன் இருமடங்காயின் $b + c = \frac{a}{3}$ அல்லது $b + c = \frac{2a}{3}$ எனக் காட்டுக.

12. (a) மாணவர் சபை ஒன்று 6 விஞ்ஞானப் பிரிவு மாணவர்களையும் 5 கலைப்பிரிவு மாணவர்களையும் 4 வர்த்தகப் பிரிவு மாணவர்களையும் கொண்டுள்ளது. இம்மாணவர் சபையிலிருந்து 5 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும்.

(i) எவரேனும் 5 பேர்களைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டுமெனின்,

(ii) குறைந்தபட்சம் 2 விஞ்ஞானப்பிரிவு மாணவர்களையேனும் தெரிந்தெடுக்க வேண்டுமெனின்,

(iii) எல்லாப் பிரிவு மாணவர்களும் இருக்கவேண்டுமெனின்,

(iv) இரு குறித்த கலைப்பிரிவு மாணவர்களை ஒரே குழுவிற்கு தெரிந்தெடுக்க முடியாது எனின்,

இக் குழு ஆக்கப்படத்தக்க வெவ்வேறு விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r = 1, 2, 3, \dots$ இற்கு $U_r = \frac{2r^2 + 5r + 1}{(r+2)!}$ எனக் கொள்வோம்.

$U_r = \frac{A}{r!} + \frac{B}{(r+1)!} + \frac{C}{(r+2)!}$ ஆகுமாறு மாறிலிகள் A, B, C ஆகியவற்றைக் காண்க.

இதிலிருந்து, U_r ஐ $D\{V_r - V_{r+1}\} + E\{V_{r+1} - V_{r+2}\}$ எனும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க. இங்கு D, E என்பன மாறிலிகளும் V_r என்பது r இல் உள்ள ஒரு சார்புமாகும்.

$\sum_{r=1}^n U_r = \frac{5}{2} - \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$ ஐ உய்த்தறிக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குமா? காரணம் தருக.

13. (a) $x = a$

$3x - y = b$

$2x + y + z = c$

என்னும் சமன்பாடுகளை $AX = B$ வடிவில் எழுதும்போது கிடைக்கும் தாயம் A யைக் காண்க; இங்கு $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ உம் $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ உம் ஆகும்.

x, y, z இற்கு a, b, c இன் சார்பில் தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் A^{-1} ஐக் காண்க. $A^2X = B$ இன் தீர்வுகளை a, b, c இன் சார்பில் காண்க.

(b) z ஒரு சிக்கலெண் எனக் கொள்வோம்.

(i) $|z + i|^2 = 1 + 2 \operatorname{Im}(z) + |z|^2$ எனவும்

(ii) $z \neq -i$ இற்கு $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z+i}\right) = -\frac{1+\operatorname{Im}(z)}{|z+i|^2}$ எனவும்

காட்டுக.

$z \neq -i$ இற்கு $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z+i}\right) = -\frac{1}{2}$ ஆக இருந்தால்-இருந்தால் மாத்திரம் $|z| = 1$ ஆகும் என்பதை உய்த்தறிக.

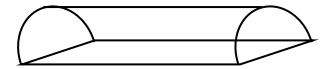
$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z+i}\right) = -\frac{1}{2}$ ஐ திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ கொண்டுள்ள தொடை S எனக் கொள்வோம். S இல் உள்ள சிக்கலெண்களை வகைக்குறிக்கும் புள்ளிகளை ஆகண் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

z ஆனது S மீது மாறும்போது $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$ இன் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

14. (a) (i) $y = x^x$ எனின் $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x} = 0$ எனக் காட்டுக.

(ii) $x = \sec^3\theta$, $y = \tan^3\theta$ எனின் $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\theta=\frac{\pi}{4}}$ ஐக் காண்க.

(b) ஆரை r ஐயும் நீளம் h ஐயும் கனவளவு 100π ஐயும் உடைய திண்ம செவ்வட்ட உருளையொன்று உருவில் காணப்படுகின்றவாறு பாதியாக வெட்டப்பட்டுள்ளது.



பாதி உருளையின் மொத்த மேற்பரப்பளவு S எனின்

$S = \pi r^2 + \frac{100\pi}{r} + \frac{200}{r}$ எனக் காட்டுக.

S இழிவாக இருப்பதற்கு உருளையின் நீளத்திற்கும் அரைவட்ட முகத்தின் விட்டத்திற்கும் இடையிலான விகிதம் $\pi : (\pi + 2)$ எனக் காட்டுக.

15. (a) $\int \frac{x+5}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ ஐக் காண்க.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^4 \frac{x^2+x}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{58}{5} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(c) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ ஐ நிறுவுக; இங்கு $a < b$ ஆகும்.

$$I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\ln(1+\tan x)}{(4x+\pi)(2x-\pi)} dx \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

மேற்குறித்த பேறைப் பயன்படுத்தி $I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)}{(4x+\pi)(2x-\pi)} dx$ எனக் காட்டுக.

I யிற்குரிய மேற்குறித்த இரு தொகையீடுகளையும் பயன்படுத்தி,

$$I = \frac{\ln 2}{2} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(4x+\pi)(2x-\pi)} dx \text{ ஐ உய்த்தறிக.}$$

இதிலிருந்து, $I = \frac{\ln 2}{6\pi} \ln\left(\frac{4}{5}\right)$ எனக் காட்டுக.

16. (a) $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$, என்னும் நேர்கோடுகளுக்கிடையிலான

கூர்ங்கோணம் θ எனின் $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ எனக் காட்டுக.

ABCD என்பது ஒரு சாய்சதுரம் $A \equiv \left(-\frac{r}{p+q}, -\frac{r}{p+q}\right)$

$C \equiv \left(-\frac{s}{p+q}, -\frac{s}{p+q}\right)$ எனவும் ABCD இன் பரப்பளவு $\frac{(r-s)^2}{|p^2 - q^2|}$ எனவும்

$|p| \neq |q|$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ எனவும் தரப்படின்

(i) AC இன் நீளம்

(ii) BD இன் நீளம்

(iii) AC இன் சமன்பாடு

(iv) AB, AD என்பவற்றின் படித்திறன்கள்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

(b) $A(4, 1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும் $(3, 4)$ என்பதை மையமாகவும் கொண்ட வட்டம் $S=0$ இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

A இல் $S=0$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலி $P(-2, -1)$ இனூடு செல்கின்றதெனக் காட்டுக. P இலிருந்து $S=0$ வரையப்பட்ட வேறோர் தொடலியின் தொடுகைப் புள்ளி Q ஆகும். PQ இன் சமன்பாட்டையும் Q இன் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

17. (a) $f(x) = 11 \cos^2 x + 16 \cos x \sin x - \sin^2 x$ என்பதை $a + b \cos(2x - \alpha)$ எனம் வடிவில் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b, α என்பன மாறிலிகள்.

(i) $f(x) = 0$ ஐத் திருப்திப்படுத்துவதற்கு

(ii) $f(x)$ இழிவாக இருப்பதற்கு

(iii) $f(x)$ உயர்வாக இருப்பதற்கு

x இன் பெறுமானங்களை 0 இற்கும் π இற்கும் இடையில் காண்க.

(b) வழமையான குறியீடுகளுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இல் கோசைன் நெறியைக் கூறி நிறுவுக.

வழமையான குறியீடுகளுடன் முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் a, b, c என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமைந்துள்ளதோடு a என்பது மிகச் சிறிய பக்கமாகவும் உள்ளது. $\cos A = \frac{4c-3b}{2c}$ எனக் காட்டுக.