

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උ/පෙළ) විභාගය

සංයුක්ත ගණිතය - I

13 ශ්‍රේණිය

කාලය පැය 03 යි.

A කොටස

- ප්‍රශ්න සියල්ලටම පිළිතුරු සපයන්න.

(01) $x^8 + 2x^7 + 3x^3 + px + q$ ශ්‍රිතය $x^3 + x - 2$ න් හරියටම බෙදේ නම් p, q සොයන්න.

(02) $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(03) $x^2 - ax + b = 0$ හා $ax^2 + x - c = 0$ යන සමීකරණවලට පොදු මූලයක් පැවතීම සඳහා අතර a, b, c අතර තිබිය යුතු සම්බන්ධය සොයන්න.

(04) λ යනු තාත්වික නියතයකි. $\frac{5-x}{\lambda} = \frac{\lambda}{x+7}$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික වන්නා වූ λ වල පරාසය සොයන්න.

(05) ගණිත අභිප්‍රභනය මූලධර්මය භාවිතයෙන් $\sum_{r=1}^n r \cdot 2^{r-1} = 1 + (n-1)2^n$ බව ඔප්පු කරන්න.

(06) m නියතයක් වී, $y = \text{Sin} \{m \text{Sin}^{-1}x\}$

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} x + m^2y = 0$$

නම් බව පෙන්වන්න.

(07) $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ වේ. A, B, C ඒක රේඛීය නොවන විට ABC ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(08) $2 \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ නම් $(x+y)^2 = 1+y^2$ බව පෙන්වන්න.

(09) $\frac{4a+b}{2a-b} = 7$ නම් පහත ඒවායේ අගය සොයන්න.

(1) $\frac{5a+b}{5a-b}$

(2) $\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$

(10) එකිනෙකට වෙනස් ගොඩනැගිලි තුනක් මුර කිරීමට හමුදා හටයන් 8 දෙනෙකු යෙදවිය යුතුය. එක ගොඩනැගිල්ලක් මුර කිරීමට අවම වශයෙන් හටයින් දෙදෙනෙකුත් යෙදවිය යුතුය. හමුදා හටයින් අටදෙනාම සේවයේ යෙදවීමට හැකි වෙනස් ක්‍රම ගණන 2940 ක් බව පෙන්වන්න.

B කොටස

11. (a) $7-x \geq 2|x^2-4|$ තෘප්ත කරන්නාවූ x හි අගයන් කුලකය සොයන්න.

(b) $U_r = r(r+1)$ සහ $V_r = Ar^2 + Br + C$ යැයි ගනිමු. මෙහි r යනු සෘණ නොවන නිඛිලයකි. ධන නිඛිල r සඳහා $U_r = V_r - 3V_{r-1}$ වන පරිදි A, B, C තාත්වික නියත සොයන්න. එමඟින්

$$\frac{1.2}{3} + \frac{2.3}{3^2} + \frac{3.4}{3^3} + \frac{4.5}{3^4} + \dots + \frac{n(n+1)}{3^n}$$

ශ්‍රේණියේ ඓක්‍ය සොයන්න.

12. (a) $y = \sqrt{\tan x} + \sqrt{\tan x} + \sqrt{\tan x} + \dots$ නම් x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න.

(b) $x^p y^q = (x+y)^{p+q}$ හි අවකලන සංගුණකය සොයන්න.

(c) වතුර ටැංකියක් අරය මීටර 6ක් ද උස මීටර 5 ක් ද වූ සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ආකාර ගනී. එහි අක්ෂය සිරස්වද ශීර්ෂය යටි අතට පිහිටන පරිදි ටැංකිය සවිකර ඇත. කාලය $t = 0$ දී $36\text{m}^2\text{h}^{-1}$ නියත සීඝ්‍රතාවයකින් හිස් ටැංකියකට ජලය පිරෙන්නට පටන් ගනී. ටැංකිය තුළ ජලයේ ගැඹුර 3m වන විට ජල පෘෂ්ඨය නගින සීඝ්‍රතාවය සොයන්න.

13. (a) $L_1 = 2x - y + 2 = 0$ සරල රේඛාව තුළින් $P(3, \lambda)$ ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය හා $L_2 = x + 3y + \mu = 0$ සරල රේඛාව තුළින් $Q(-2, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය සමපාත වේ. λ හා μ සොයන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයේ A ශීර්ෂය $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන අතර R පරිකේන්ද්‍රය $(2/3, 10/3)$ ලක්ෂ්‍යයේ වෙයි. AB තුළින් R හි ප්‍රතිබිම්බය $S(-2/3, 8/3)$ ලක්ෂ්‍යය වෙයි. BC තුළින් R හි ප්‍රතිබිම්බය $T(4/3, 14/3)$ වෙයි. ABC ත්‍රිකෝණයේ පාදවල සමීකරණ ද, AC තුළින් R හි ප්‍රතිබිම්බයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

14. (a) $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 6y - 2 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + \lambda = 0$ මඟින් දැක්වෙන වෘත්ත ප්‍රලම්භ නම් λ හි අගය සොයන්න.

(b) $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x = 0$ වෘත්තය බාහිරව ස්පර්ශ කරමින් $S_2 \equiv x_2 + y_2 + 4x - 8y + 8 = 0$ ප්‍රලම්භව ඡේදනය කරන කේන්ද්‍රය OX අක්ෂය මත ඇති S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

15. f යනු $[-a, a]$ අනුකලය ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. $[-a, a]$ හි සියලුම x සඳහා $f(-x) = f(x)$ යැයි ගනිමු.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2} dx \text{ හි අනුකලනය } x = \sin 4t \text{ ආදේශය භාවිතයෙන් පමණක්,}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2 \cos 4t}{\cos^2 t} dt \text{ බව පෙන්වන්න. එනයිත්}$$

$$I = 4\sqrt{2} - \pi - 2 \text{ බව පෙන්වන්න. } \left[\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \right]$$

16. (a) (i) $\sin 2x + 2 \sin x - \cos x - 1 = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

$$(ii) 3 \tan^2 \theta - 2 \sin \theta = 0 \text{ සාධාරණ විසඳුම් දෙන්න.}$$

(b) ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා \cos ප්‍රමේයය භාවිතා කිරීමෙන්,

$$\frac{(a-b) \cos A + c}{a-b + c \cos A} = \frac{a+b}{c} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

(c) $A+B+C=\pi$ නම් $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ බව පෙන්වන්න.

17. $x^2 + ax + b = 0$ සමීකරණයේ හා $x^2 + cx + d = 0$ සමීකරණයේ මූල පිළිවෙලින් α, β හා α^2, β වේ. මෙහි b හා d ප්‍රතිත්ත නිශුන්‍ය තාත්වික සංඛ්‍යා වේ.

$$d^2 + abd + b^3 = 0 \text{ හා } d^2 - bd + b^2(c-a) = 0 \text{ බව පෙන්වන්න. එනයිත් හෝ අන් අයුරකින් හෝ}$$

$$b(a-c)^2 + a(a-c)(d-b) + (d-b)^2 = 0 \text{ බවද පෙන්වන්න.}$$

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උ/පෙළ) විභාගය

සංයුක්ත ගණිතය - II

13 ශ්‍රේණිය

කාලය පැය 03 යි.

- සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

A කොටස

01. එකම සරල රේඛාවේ එකිනෙකට ලඟාවන මෝටර් රථ දෙකක් v හා u ඒකාකාර වේගවලින් ගමන් කරයි. මෝටර් රථ අතර පරතරය d වූ විට මෝටර් රථ දෙක ගැටෙන බව වැටහීමෙන් රථ දෙකම එකම අවස්ථාවේදී තිරිංග තද කිරීම හේතුවෙන් පිළිවෙලින් f_1 හා f_2 මන්දනයන් රථ දෙකට ලැබේ. ගැටුම යාන්ත්‍රමයින් වළක්වා ගනී. චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. $v^2 f_2 + u^2 f_1 = 2f_1 f_2 d$ බව පෙන්වන්න.

02. පොළව මත P නම් ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසර α කෝණයක ආතතියක් සහිතව $V (> \sqrt{gd})$ ප්‍රවේගයෙන් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේපනය කෙරේ. P සිට d දුරින් පිහිටි d උසැති කණුවක් මුදුනෙහි ගැටී නොගැටී අංශුව ගමන් කරයි. $v^2 = \frac{gd(1 + \tan^2 \alpha)}{2(\tan - 1)}$ බව පෙන්වන්න.

03. $20N$ බරැති අංශුවක් රළ තිරස් මේසයක් මත තබා තිරසර 60° කින් ආතන අවිනතය තන්තුවක් මගින් අදිනු ලැබේ. සමතුලිත පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය $6\sqrt{3}N$ වේ නම්, ලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවද, සර්ෂණ බලයද සොයන්න.

04. සුමට තිරස් මේසයක් මත තිබෙන ස්කන්ධය $2m \text{ kg}$ වන A අංශුවක් මේ ගැටිටෙ පිහිටි සුමට කප්පියක් මතින් යවා ඇති සැහැල්ලු අවිනතය තන්තුවක් මගින් ස්කන්ධය $m \text{ kg}$ වන B අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. B අංශුව නිදලේල් එල්ලෙමින් පවතී. අංශුවල පොදු ත්වරණය, තන්තුවේ ආතතිය, තන්තුව මගින් කප්පිය මත ඇති කරන බලය සොයන්න.

05. පාදයක දිග a වන සමචතුරස්‍රයක AB, BC, CD, DA පාද හා BD විකර්ණ දිගේ පිළිවෙලින් $1, 3, 5, 7, 8\sqrt{2}$ බල ක්‍රියා කරයි. AB හා AD පිළිවෙලින් x හා y අක්ෂ ලෙස ගෙන සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය ද, එහි ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය ද සොයන්න.

06. A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික \mathbf{a}, \mathbf{b} වේ. AB රේඛාව $3:2$ අනුපාතයට අභ්‍යන්තරව R හි දී බෙදේ. \vec{OR} අනුපාත සූත්‍රය ආසුරින් සොයන්න. $\vec{OS} = 3\mathbf{a}$ ද $\vec{OT} = \frac{9\mathbf{b} - 24\mathbf{a}}{5}$ බව දී ඇත. S, R, T ඒකරේඛීය නම් ST රේඛාව R වලින් බෙදෙන අනුපාතය සොයන්න.

07. වෘත්තාකාර තැටියක අරය a හා බර w වේ. සිහින් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් වෘත්තාකාර තැටියේ පරිධියෙන් කොටසක් ස්පර්ශ වනසේ රඳවා තන්තුවේ බිත්තියක වූ O ලක්ෂ්‍යය එල්ලා ඇත. AB තන්තු කොටස සිරස් වේ. තැටියේ තලය බිත්තියට ලම්භක වේ. තැටිය හා ස්පර්ශ නොවන තන්තු කොටසේ දිග $2b$ නම් තන්තුවේ ආතතිය $\frac{w}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} \right)$ බව පෙන්වන්න.

08. 8 ms^{-1} වේගයෙන් උතුරු දෙසට යන බයිසිකල්කරුවකුට 4 ms^{-1} වේගයෙන් උතුරින් 60° ක් නැගෙනහිරින් වූ දිශාවෙන් සුළං හමන්නාසේ දූනේ. සුළගේ සත්‍ය ප්‍රවේගය සොයන්න.

09. 4 ms^{-1} ප්‍රවේගයෙන් පටන්ගන්නා ස්කන්ධය 2 kg වන අංශුවක් තත්පර 5 ක් තුළ 2 ms^{-2} ඒකාකාර ත්වරණයෙන් වලනය වෙයි. අංශුවේ වැඩිවන වාලක ශක්තිය සොයන්න.

10. ස්කන්ධය 5 kg වන තුවක්කුවකින් ස්කන්ධය 60 g වන උණ්ඩයක් විදිනු ලැබේ. උණ්ඩයේ වේගය 500 ms^{-1} නම් තුවක්කුව වාංගුවන වේගය සොයන්න.

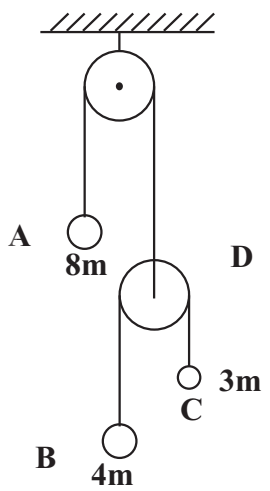
B කොටස

- ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

(01) දුම්‍රියක් සහ මෝටර් රථයක් සමාන්තර සරල රේඛීය මාර්ග ඔස්සේ එකම දිශාවට චලනය වේ. ආරම්භයේ දී මෝටර් රථය නිසලව පවතින අතර දුම්‍රියේ ප්‍රවේගය u වෙයි. ආරම්භයේ දී මෝටර් රථයේ සහ දුම්‍රියේ පසු පස කෙළවරවල් එක එල්ලේ පිහිටයි.

- (i) මෝටර් රථයේ සහ දුම්‍රියේ ත්වරණ පිළිවෙලින් $9f$ හා $3f$ වේ. මෝටර් රථයේ සහ දුම්‍රියේ උපරිම ප්‍රවේග පිළිවෙලින් $4u$ සහ $2u$ වේ. ඒවා උපරිම වේග ලබාගත් පසු එම වේලවලින්ම ඒකාකාරව චලිත වේ. චලිත නිරූපණය වන සේ ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරයක් එකම සටහනේ ඇඳ දුම්‍රියේ උපරිම වේගය ලබාගන්නා මොහොතේදී ද ආරම්භය හා සමාන පිහිටුමක මෝටර් රථය හා දුම්‍රිය පවතින බව පෙන්වන්න.
- (ii) මෝටර් රථය උපරිම වේගය ලබාගන්නා මොහොතේදී දුම්‍රියේ සහ මෝටර් රථයේ ඉදිරිපස කෙළවරවල් එකඑල්ලේ පිහිටයි. දුම්‍රියේ දිග මෝටර් රථයේ දිග මෙන් දස ගුණයක් වේ නම් මෝටර් රථයේ දිග $\frac{u^2}{54f}$ බව පෙන්වන්න.

(02) සැහැල්ලු තන්තුවක් මගින් සැහැල්ලු සුමට කප්පියක් සිවිලිමක එල්ලා තිබෙයි. මෙම කප්පිය උඩින් යැවූ සැහැල්ලු අප්‍රාසේඵ තන්තුවක එක් කෙළවරක් $8m$ ස්කන්ධ **A** අංශුවක් ඇඳා ඇත. එහි අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ **D** සුමට කප්පියකට අමුණා ඇත. දෙවැනි කප්පිය උඩින් යැවූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් කෙළවරකට $4m$ ස්කන්ධ **B** අංශුවක් ද අනෙක් කෙළවරට $3m$ ස්කන්ධ **C** අංශුවක් ද අමුණා ඇත. ආරම්භයේ දී රූපයේ ආකාරයට පද්ධතිය සිරුවෙන් මුදා හරී.

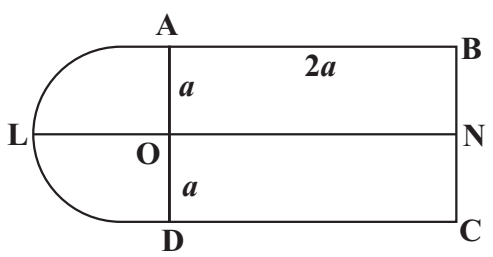


- (i) **A** අංශුවේ ත්වරණය සොයන්න.
- (ii) **B**, **C** යා කරන තන්තුවේ ආතතිය $\left(\frac{384}{11}\right) mg$ බව පෙන්වන්න.

(03) ඒකාකාර දිගක් හා බර w වූ **AB**, **BC** ඒකාකාර දඬු දෙකක් **B** හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කොට ඇත. $AB = 6a$, $BC = 8a$ වේ. දිග $5a$ වූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් **AB** හා **BC** මධ්‍යලක්ෂ්‍ය ඇඳා ඇත. **A** හා **C** සුමට තිරස් තලයක් **B** මත පවතිමින්, සමතුලිතතාවේ වේ. තන්තුවේ ආතතිය හා **B** හි ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(04) ඒකාකාර **ALD** අර්ධ වෘත්ත ආස්තරය සහ **ABCD** සමචතුරස්‍ර ආස්තරය **AD** දිගේ සවි කර ඇත. $AO = OD = a$, $AB = 2a$ වේ.

- (i) **N** සිට සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර සොයන්න.
- (ii) පද්ධතිය a වලින් එල්ලා සමතුලිතවිට **AD** සිරසට ආනත කෝණය සොයන්න.



(iii) සංයුක්ත ආස්තරයේ ස්කන්ධය m වේ. ස්කන්ධය $\frac{5m}{3}$ වන P අංශුවක් LON රේඛාවේ සවිකර ඇත.

A වලින් එල්ලා සමතුලිතවිට AD සිරස් වේ. AD සිට P අංශුවේ පිහිටීම සොයා එය ඇත්තේ කුමන ආස්තර කොටසේ දැයි පෙන්වා දෙන්න.

(05) සුමටව සන්ධි කළ සමාන සැහැල්ලු දඬු 6 කින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් සවිධි ෂඩාස්‍රයක හැඩය ගනී. එම රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක පිහිටයි. A හිදී සුමටව අසවි කර ඇති අතර C හිදී $1N$ එය භාරයක් උසුලයි. රාමු සැකිල්ල දෘඪව තබා ඇත්තේ සැහැල්ලු දඬු 3 ක් වන BD, BE, BF මගිනි. A හි අසවිව මත ක්‍රියාකරන බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න. ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇසුරෙන් දඬු 9 හි ප්‍රත්‍යාබල විශාලත්වයන් සොයා ඒවා ආතති ද, තෙරපුම් ද යන්න වග ලියන්න.

(06) තිරස් තලයක A ලක්ෂ්‍යයකට සිරස්ව ඉහළින් වන O ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට θ ආනතව $13V$ ප්‍රවේගයෙන් P වස්තුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. $\theta = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ වේ. P වස්තුව තිරස් තලයේ B ලක්ෂ්‍යයක වැටී. $AB = \frac{130V^2}{g}$ වේ.

(i) $OA = \frac{26V^2}{g}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) O තුළින් තිරස් රේඛාවට පරාවක්‍රය හමුවන ලක්ෂ්‍යය C නම් OC දුර සොයන්න.

(iii) Q අංශුවක් O වලින් තිරසට α ආනතව $5\sqrt{13}u$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. Q වස්තුව b හි දී වැටී නම් පරාවක්‍රයේ සමීකරණය සොයන්න. α හි අගය දෙකෙන් එක් අගයක් 45° නම්, $u = \frac{V}{\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න. α හි අනෙක් අගයද ලබා ගන්න.

(07) ස්කන්ධය $M \text{ kg}$ වන ලී කුට්ටියක් අවිනත්‍ය තන්තුවකින් අවල O ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. තිරස්ව $u \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් චලිතවන ස්කන්ධය $m \text{ kg}$ වන උණ්ඩයක් ලී කුට්ටියේ වැදී එබ්බේ වේ. තන්තුව පහළ සිරසට θ වලින් ආනත විට චලිත සමීකරණ ලියන්න. පසුව චලිතයේ දී උණ්ඩය අර්ධ වෘත්තයක චලිත වේ නම්, u සොයන්න. $\theta = 60^\circ$ විට තන්තුවේ ආතතියද සොයන්න.