අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2016
සංයුක්ත ගණිතය - I පත්‍රය
පිළිතුරු සඳහා මග පෙන්වීම

A කොටස

1. $f(n) = 4^n + 15n - 1;\ n \in Z^+$ යැයි ගනිමු.

$n = 1$ විට $f(1) = 4 + 15 - 1 = 18 = 9 \times 2$

$\therefore$ $f(1)$, 9 න් බෙදේ.

$\therefore$ $n = 1$ ට ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ. 5

$n = p,\ p \in Z^+$ සඳහා ප්‍රකාශනය 9 න් බෙදේ යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $f(p) = 4^p + 15p - 1 = 9k;\ k \in Z^+$ වේ. 5

$$
\begin{aligned}
f(p+1) &= 4^{p+1} + 15(p+1) - 1 \\
&= 4.\,4^p + 15p + 15 - 1 \\
&= 4\,[9k - 15p + 1] + 15p + 15 - 1 \quad (5) \\
&= 4 \times 9k - 45p + 18 \\
&= 9\,[4k - 5p + 2] \\
&= 9\lambda;\ \lambda = 4k - 5p + 2 \in Z^+
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $f(p+1)$, 9 න් බෙදේ.

$\therefore$ $n = p + 1$ වන විට ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ. 5

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන්, සියලු ධන නිඛිල n සඳහා දී ඇති ප්‍රකාශනය 9න් බෙදේ. 5

25

2. $$\left(\sqrt{2} + 7^{\frac{1}{5}}\right)^{10} = \sum_{r=0}^{10} {}^{10}C_r \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10-r} \left(7^{\frac{1}{5}}\right)^{r}$$

$T_r = {}^{10}C_{r-1} \left(2\right)^{\frac{11-r}{2}} \left(7\right)^{\frac{r-1}{5}}$; මෙහි $1 \le r \le 11$ වේ. 5

2 හා 7 ප්‍රථමක බැවින්, පරිමේය පද සඳහා $11 - r = 2p$ සහ $r - 1 = 5q$ විය යුතුය. $p, q \in Z^+$ 5

එනම් $r \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{1, 6, 11\}$ 5

$\therefore$ $r = 1$ හෝ 11 වේ. 5

පරිමේය පදවල ඓක්‍යයය $= {}^{10}C_0\, 2^5 + {}^{10}C_{10}\, 7^2$

$= 32 + 49 = 81$ 5

25

3. කිසිම සීමාවකින් තොරව 5 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමක් තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන $= {}^{14}C_5$

$= 2002$ (5)

පිරිමි ළමයි 5 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායම් ගණන $= {}^{8}C_5$

$= 56$ (5)

ගැහැණු ළමයි 5 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායම් ගණන $= {}^{6}C_5$

$= 6$ (5)

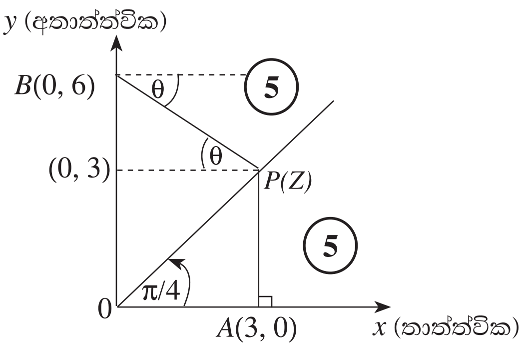
$\therefore$ දෙවර්ගමය නියෝජනය වන පරිදි 5 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමක් තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $= {}^{14}C_5 - \left({}^{8}C_5 + {}^{6}C_5\right)$

$= 2002 - 56 - 6$ (5)

$= 1940$ (5)

$\boxed{25}$

4.



$\text{Arg } Z = \frac{\pi}{4}$ සහ $\text{Arg } (Z-3) = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි වූ $Z = Z_0$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය රූපයේ පරිදි P වේ. (5) රූපයට අනුව $\theta = \frac{\pi}{4}$ වේ. (5)

එම නිසා $\text{Arg } (Z_0 - 6i) = \frac{7\pi}{4}$ වේ. (5)

$\boxed{25}$

5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+kx)^2 - (1-kx)^2}{\sqrt{1+k^2x} - \sqrt{1-k^2x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2kx + k^2x^2 - 1 + 2kx - k^2x^2}{(1+k^2x) - (1-k^2x)} \times \left(\sqrt{1+k^2x} + \sqrt{1-k^2x}\right) \quad (10)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4kx}{2k^2x} \left(\sqrt{1+k^2x} + \sqrt{1-k^2x}\right) \quad ; k, x \neq 0$$

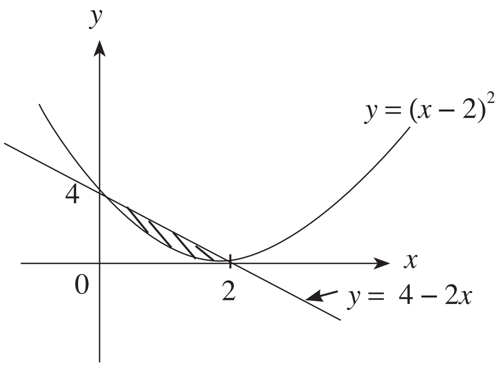
$$= \frac{2}{k} \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{1+k^2x} + \sqrt{1-k^2x}\right) = \left(\frac{2}{k}\right) \times 2 = \frac{4}{k} \quad (5)$$

$$\frac{4}{k} = 1 \quad (5)$$

$$\therefore k = 4 \quad (5)$$

$\boxed{25}$

6.



5

වර්ගඵලය $= \int_0^2 \left\{ (4-2x) - (x-2)^2 \right\} dx$ 5

$= \int_0^2 (4-2x)dx - \int_0^2 (x-2)^2 dx$

$= \left[4x - \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2$

5 5

$= (8-4) - \left[0 + \frac{8}{3}\right]$

$= 4 - \frac{8}{3}$

$= \frac{4}{3}$ 5 $\boxed{25}$

7. t විෂයයෙන් අවකලනයෙන්,

$\frac{dx}{dt} = 2t \qquad \frac{dy}{dt} = 3at^2 - 2t$ 5

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = (3at^2 - 2t) \cdot \frac{1}{2t} = \frac{3at-2}{2} \;;\; t \neq 0$ 5

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = \frac{3a-2}{2}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-1} = \frac{-3a-2}{2}$ 5

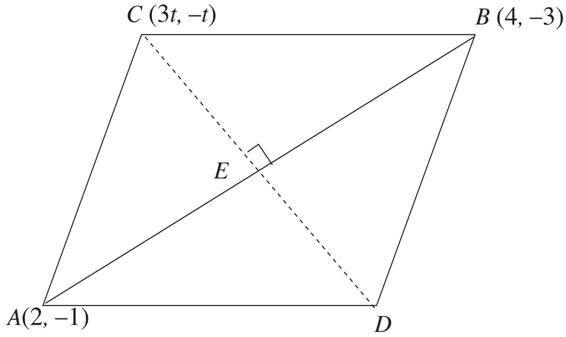
ස්පර්ශක එකිනෙකට $\perp$ නිසා,

$\left(\frac{3a-2}{2}\right)\left(\frac{-3a-2}{2}\right) = -1$ 5

$9a^2 - 4 = 4 \Rightarrow a^2 = 8/9$

$a > 0$ නිසා $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 5 $\boxed{25}$

8.



$E = (3, -2)$

$AB,\ CE$ ට ලම්බක බැවින්

$m_{AB} \,.\, m_{CE} = -1$ වේ.

$-1\left(\dfrac{-2+t}{3-3t}\right) = -1$ 5

$\Rightarrow t = \dfrac{5}{4}$ 5

$\therefore\ C = \left(\dfrac{15}{4}, -\dfrac{5}{4}\right)$ 5

$D = (\overline{x}, \overline{y})$ ලෙස ගනිමු. 5

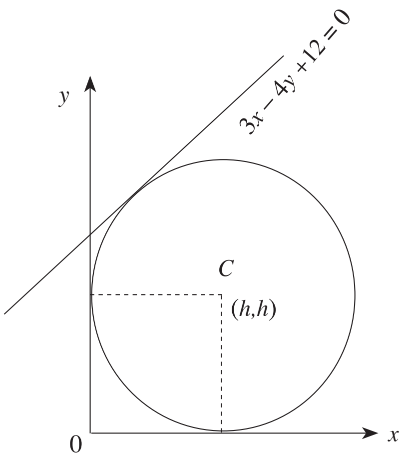
$\overline{x} = 2 \times 3 - 3t = 6 - 3 \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{9}{4}$

$\overline{y} = 2 \times -2 + t = -4 + \dfrac{5}{4} = -\dfrac{11}{4}$

$\therefore\ D = \left(\dfrac{9}{4}, -\dfrac{11}{4}\right)$ 5

25

9.



අවශ්‍ය වෘත්තය $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යැයි ගනිමු.

වෘත්තය x හා y අක්ෂ ස්පර්ශ කරන බැවින්, $C = (h,h)$ වේ. 5

තවද $3x - 4y + 12 = 0$ රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බැවින්

$$\frac{|3h - 4h + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = |h|$$ 5

$$|-h + 12| = 5|h|$$

$$\Leftrightarrow (-h + 12) = \pm 5h$$ 5

$\therefore$ $h = -3$ හෝ $h = 2$ වේ. 5

$\therefore$ වෘත්තවල සමීකරණ

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 = 3^2$$ 5

$\boxed{25}$

10. $\cot\alpha - \tan\alpha$

$$= \frac{1}{\tan\alpha} - \tan\alpha$$

$$= \frac{1 - \tan^2\alpha}{\tan\alpha}$$

$$= \frac{2(1 - \tan^2\alpha)}{2\tan\alpha} = \frac{2}{\tan 2\alpha}$$

$$= 2\cot 2\alpha$$ 5

$\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ ——— 1

$\therefore$ $\cot 2\alpha - \tan 2\alpha = 2\cot 4\alpha$ ——— 2 5

$\cot 4\alpha - \tan 4\alpha = 2\cot 8\alpha$ ——— 3 5

1 + 2 × 2 + 4 × 3 මගින්,

$\cot\alpha - \tan\alpha - 2\tan 2\alpha - 4\tan 4\alpha = 8\cot 8\alpha$ 10

$\cot\alpha = \tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha$

$\boxed{25}$

[6 වන පිටුව බලන්න

11. (a) $ax^2 + bx + c = 0$

$a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right] = 0$

$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = 0$

$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right] = 0$ (10)

සමපාත මූල තිබීම සඳහා $b^2 - 4ac = 0$ විය යුතුයි. (10)

20

$\frac{a}{x + c} + \frac{b}{x - c} = \frac{k}{2x}$

$\frac{a(x - c) + b(x + c)}{x^2 - c^2} = \frac{k}{2x}$

$x^2 [k - 2a - 2b] - 2(bc - ac)\, x - kc^2 = 0$ (10)

සමපාත මූල තිබීමට නම්

$4(bc - ac)^2 - 4(k - 2a - 2b)\,(- kc^2) = 0$ විය යුතුයි. (10)

එනම් $k^2 - 2(a + b)\, k + (b - a)^2 = 0$ (5)

මෙහි මූල k_1 හා k_2 නම්,

$k_1 + k_2 = 2(a + b)$ (5) $k_1 k_2 = (b - a)^2$ (5)

$(k_1 - k_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 - 4 k_1 k_2$ (10)

$= 4(a + b)^2 - 4(b - a)^2$

$= 16ab$

$\therefore\ |k_1 - k_2| = 4\sqrt{ab}$ (10)

55

(b) $f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (6 - 3\lambda)x + (20 - 12\lambda)$

(i) $\lambda = -1$ විට $f(x)$ ඒකජ වේ. (5)

(ii) මූල දෙක α සහ $-\alpha$ ලෙස ගනිමු. (5)

එවිට $\alpha + (-\alpha) = -\frac{(6 - 3\lambda)}{(\lambda + 1)}$ (5)

$\therefore\ 0 = 6 - 3\lambda. \Rightarrow \lambda = 2.$ (5)

(iii) $f(x) = h - b(x - a)^2 = h - b(x^2 - 2ax + a^2) = -bx^2 + 2abx + (h - ba^2)$

$f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (6 - 3\lambda)x + (20 - 12\lambda)$ 5

සංගුණක සැසඳීමෙන්, $-b = \lambda + 1 \Rightarrow b = -(\lambda + 1)$ ——— 1 5

$2ab = 6 - 3\lambda \Rightarrow a = -\dfrac{3(2-\lambda)}{2(\lambda+1)}$ ——— 2 5

$h - ba^2 = 20 - 12\lambda \Rightarrow h = 4(5 - 3\lambda) - \dfrac{9}{4}\dfrac{(2-\lambda)^2}{(\lambda+1)}$ ——— 3 10

$x = 2$ වන විට $f(x)$ උපරිමයක් වන බැවින් $a = 2$ වේ. 5

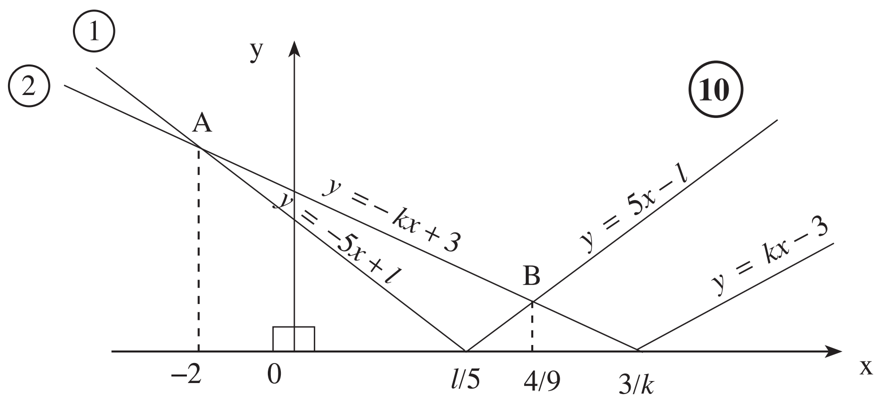
2 $\Rightarrow 4(\lambda + 1) = -(6 - 3\lambda) \Rightarrow 4\lambda + 4 = -6 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = -10$ 5

$h = 4(5 + 30) - \dfrac{9}{4}\dfrac{(2+10)^2}{(-10+1)}$ 10

$f(x)$ හි උපරිම අගය $= 176$ 10

75

12. (a) $|l - 5x| < |kx - 3|$ හි විසඳුම් කුලකය $\{x \mid -2 < x < 4/9\}$ බැවින් ප්‍රස්තාර දෙක පහතින් දැක්වෙන පරිදි පිහිටයි.



10

1 $y = |l - 5x|$

2 $y = |kx - 3|$

A ලක්ෂ්‍යය සඳහා $l + 10 = 2k + 3$ 5

$l - 2k = -7$ ——— (i) 5

B ලක්ෂ්‍යය සඳහා $-l + 5 \cdot \dfrac{4}{9} = -k \cdot \dfrac{4}{9} + 3$ 5

$-9l + 4k = 7$ ——— (ii) 5

(i) සහ (ii) මගින් $l = 1$, 5 $k = 4$ 5

50

(b) $S_n = \dfrac{3n}{2n+1}$ 5

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$ 5

පරිමිත වේ. 5

$\therefore$ එම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. 5

$U_r = S_r - S_{r-1}$ 5

$= \dfrac{3r}{2r+1} - \dfrac{3(r-1)}{2r-1}$ 5

$U_r = \dfrac{3}{4r^2-1}$ 5

$S_n' = \sum\limits_{r=1}^{n} r^2 \dfrac{3}{4r^2-1}$ ලෙස ගනිමු. 5

$= \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{\frac{3}{4}(4r^2-1) + \frac{3}{4}}{(4r^2-1)}$ 5

$= \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{3}{4r^2-1}$ 10

$= \dfrac{3n}{4} + \dfrac{1}{4} S_n$ 5

5

$= \dfrac{3n}{4} + \dfrac{1}{4} \dfrac{3n}{(2n+1)}$ 5

$= \dfrac{3n}{4}\left\{1 + \dfrac{1}{2n+1}\right\}$ 5

$= \dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$

5

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} r^2 U_r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{4}\left\{1 + \dfrac{1}{2n+1}\right\}$ 5

$= \infty$ 5

පරිමිත නොවේ. 5

$\therefore$ එම ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවේ. 5

100

13. (a) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & p \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2p$ 5

A^{-1} පැවතීමට $\det A \neq 0$.

එනම්, $p \neq 9/2$ විය යුතුය. 5

$$A^{-1} = \frac{1}{(2p-9)} \begin{bmatrix} -3 & -p \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$ 5

$A^{-1} = A$

$$\frac{1}{(2p-9)} \begin{bmatrix} -3 & -p \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & p \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$ 5

අනුරූප අවයවයන් සැසඳීමෙන්,

$$-\frac{3}{2p-9} = 3 \qquad \frac{-p}{2p-9} = p$$ 5

$$\frac{2}{2p-9} = -2 \;, \quad \frac{3}{2p-9} = -3$$ 5

5 5

$\Rightarrow\ 2p-9 = -1$ and $p\,[1 + 2p - 9] = 0$

$p \neq 0$ බැවින් $p = 4$ විය යුතුය. 5

එවිට, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = A$

$\Rightarrow A\,A^{-1} = A\ .\ A = A^2$ 5

$\therefore I = A^2$

$\Rightarrow 0 = A^2 - I$

$\Rightarrow 0 = (A - I)\,(A + I)\ ;\ I^2 = I$ 5

එනම් $0 = BC$ ආකාරය ගනී.

මෙහි $B = A - I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

5

සහ

$$C = A + I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$ 5

75

(b) (i) Let $Z = x + iy$, යැයි ගනිමු. $x,\ y \in R$ 5

$Z\overline{Z} = (x + iy)(x - iy)$

$= x^2 + y^2$ 5

$= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |Z|^2$

10

$\therefore\ Z\overline{Z} = |Z|^2$ වේ.

(ii) Let $Z_1 = x_1 + iy_1$ ද $Z_2 = x_2 + iy_2$ ද යැයි ගනිමු. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ වේ.

$Z_1 Z_2 = (x_1 + iy_1)\ (x_2 + iy_2)$

$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$

$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ 5

$\therefore\ \overline{Z_1 Z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

$= x_1(x_2 - i y_2) - iy_1(-i y_2 + x_2)$

$= (x_1 - iy_1)\ (x_2 - i y_2)$ 5

10

$\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z}_1\ \overline{Z}_2$ වේ.

(iii) $\left|\dfrac{\overline{Z}_1 - 2\overline{Z}_2}{2 - Z_1\overline{Z}_2}\right| = 1$

$\Rightarrow \left|\overline{Z}_1 - 2\overline{Z}_2\right| = \left|2 - Z_1\overline{Z}_2\right|$ 5

$\Rightarrow \left|\overline{Z}_1 - 2\overline{Z}_2\right|^2 = \left|2 - Z_1\overline{Z}_2\right|^2$ 5

$\Rightarrow \left(\overline{Z}_1 - 2\overline{Z}_2\right)\left(\overline{\overline{Z}_1 - 2\overline{Z}_2}\right) = \left(2 - Z_1\overline{Z}_2\right)\left(\overline{2 - Z_1\overline{Z}_2}\right)$ 5

$\Rightarrow \left(\overline{Z}_1 - 2\overline{Z}_2\right)\left(Z_1 - 2Z_2\right) = \left(2 - Z_1\overline{Z}_2\right)\left(2 - \overline{Z}_1 Z_2\right)$ 5

$$Z_1\bar{Z}_1 - 2\bar{Z}_1Z_2 - 2\bar{Z}_2Z_1 + 4Z_2\bar{Z}_2 \quad = 4 - 2\bar{Z}_1Z_2 - 2Z_1\bar{Z}_2 + Z_1\bar{Z}_1Z_2\bar{Z}_2 \quad 5$$

$$|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2 \quad = \quad 4 + |Z_1|^2\ |Z_2|^2$$

$$|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2 - |Z_1|^2 \cdot |Z_2|^2 - 4 \quad = 0$$

$$|Z_1|^2\left(1 - |Z_2|^2\right) - 4\left(1 - |Z_2|^2\right) = 0$$

$$\left(1 - |Z_2|^2\right)\left(|Z_1|^2 - 4\right) \quad = 0 \quad 5$$

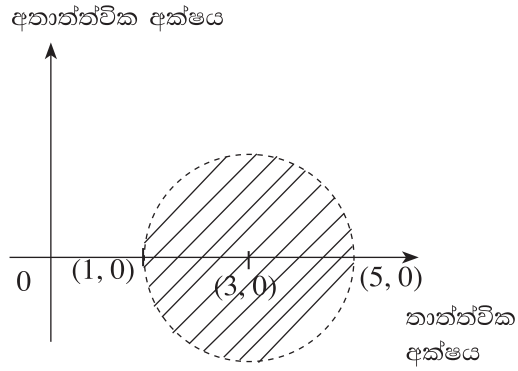
$|Z_2| \neq 1,$ නිසා $|Z_1|^2 - 4 \quad = 0$

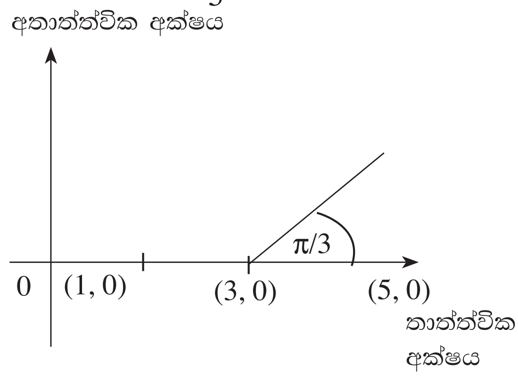
$\therefore\ |Z_1|^2 = 4$

$|Z_1| > 0,$ නිසා $|Z_1| = 2$ 5

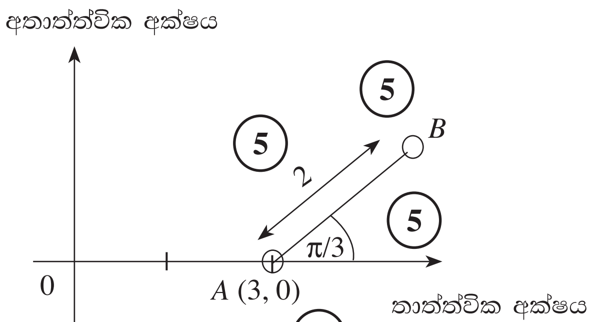
35

(c) $|Z - 3| < 2$ $\qquad$ $\text{Arg}\,(Z-3) = \dfrac{\pi}{3}$





$|Z - 3| < 2$ සහ $\text{Arg}\,(Z-3) = \dfrac{\pi}{3}$; යන දෙකම තෘප්ත කරන P හි පථය



20

14. (a) $y = (\sin x)^x \qquad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

$\ln y = x \ln|\sin x|$ 10

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \ln|\sin x| + x \cot x$ 10

$\dfrac{dy}{dx} = \left[x \cot x + \ln(\sin x)\right](\sin x)^x$ 5

25

(b) ටැංකියේ පරිමාව $= \pi x^2 y + \dfrac{2}{3}\pi x^3$

$\therefore\ \pi x^2 y + \dfrac{2}{3}\pi x^3 = 45\pi$ 5

$\therefore\ 45 = x^2\left(y + \dfrac{2}{3}x\right)$

$y = \dfrac{45}{x^2} - \dfrac{2}{3}x$ 5

ටැංකියේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

$A = 2\pi x^2 + \pi x^2 + 2\pi xy$ 10

$A = 3\pi x^2 + 2\pi xy$

$A = 3\pi x^2 + 2\pi x\left(\dfrac{45}{x^2} - \dfrac{2}{3}x\right)$

$A = 3\pi x^2 + \dfrac{90\pi}{x} - \dfrac{4\pi}{3}x^2$

$A = \dfrac{5\pi x^2}{3} + \dfrac{90\pi}{x}$ 5

$\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{10\pi x}{3} - \dfrac{90\pi}{x^2}$ 5

$= \dfrac{10\pi(x^3 - 27)}{3x^2}$

$= \dfrac{10\pi}{3x^2}(x-3)(x^2+3x+9)$ 5

$x = 3$ වන විට $\dfrac{dA}{dx} = 0$ වේ. 5

x	$0 < x < 3$	$3 < x$
$\dfrac{dA}{dx}$	< 0	> 0

5

$\therefore\ x = 3$ විට පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අවම වේ. 5

$y = \dfrac{45}{9} - \dfrac{6}{3}$

$= 3$ 5

55

[13 වන පිටුව බලන්න

(c) $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)}$

$f(0) = 2$ බැවින්,

$a + b = 2$ ——— 1 5

$f'(x) = -\dfrac{2a}{(x-1)^3} - \dfrac{b}{(x+1)^2}$ 5

$f'(0) = 0$ බැවින්,

$2a - b = 0$ ——— 2 5

1 හා 2 න් $a = \dfrac{2}{3},\ b = \dfrac{4}{3}$ 5

$$f'(x) = -\frac{4}{3}\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{4}{3(x+1)^2}$$ 5

$$= -\frac{4}{3}\left\{\frac{(x+1)^2 + (x-1)^3}{(x-1)^3\,(x+1)^2}\right\}$$

$$= -\frac{4}{3}\left[\frac{x^3 - 2x^2 + 5x}{(x-1)^3\,(x+1)^2}\right]$$

$$= -\frac{4x}{3}\left[\frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^3(x+1)^2}\right]$$

$$= -\frac{4x}{3}\left[\frac{(x-1)^2 + 4}{(x-1)^3(x+1)^2}\right]$$

සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $(x-1)^2 + 4 > 0$ බැවින්, $x = 0$ නම්ම පමණක් $f'(x) = 0$ වේ. 5

x	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$	< 0	< 0	> 0	< 0
	f අඩුවේ.	f අඩුවේ.	f වැඩිවේ.	f අඩුවේ.

10

$x = 0$ දී f ශ්‍රිතයට ස්ථානීය අවමයක් පවතී. 5

එවිට $f(0) = 2$ වේ.

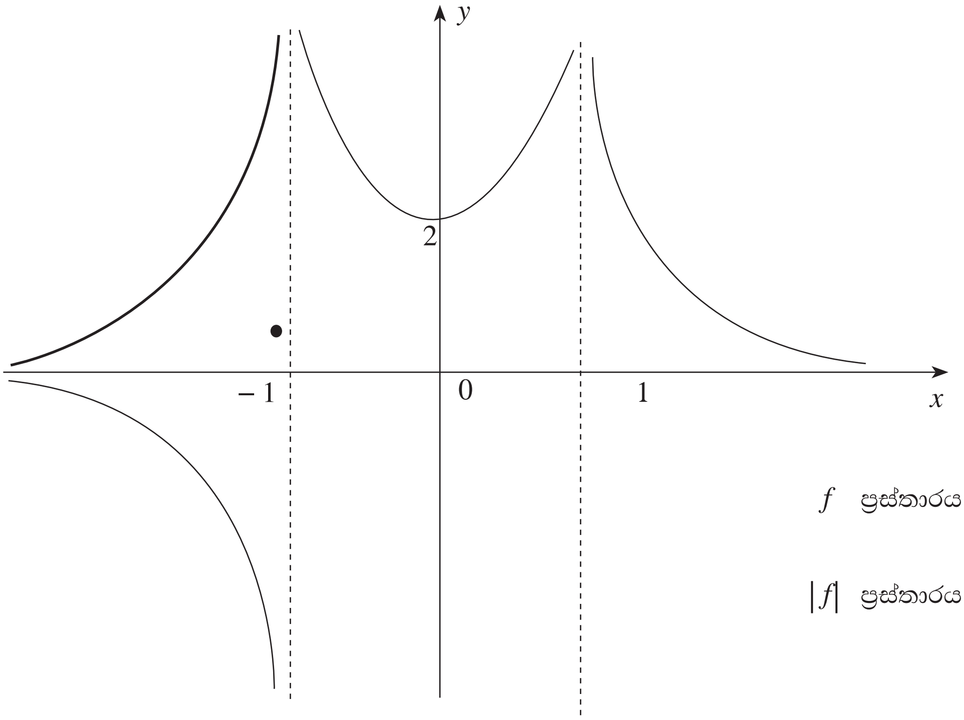
$x \longrightarrow \pm\infty$ විට $f(x) \longrightarrow 0$

$x \longrightarrow -1^-,\ f(x) \longrightarrow -\infty$

$x \longrightarrow -1^+,\ f(x) \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow 1^-,\ f(x) \longrightarrow +\infty$ 10

$x \longrightarrow 1^+,\ f(x) \longrightarrow +\infty$



f ප්‍රස්තාරය (10)

$|f|$ ප්‍රස්තාරය (5)

70

15. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{1/2}\,(2-x)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{1/2}\,(2-x)}$

$x = 2\sin\theta$ ආදේශයෙන්, (5)

$dx = 2\cos\theta \, d\theta$ (5)

$x = 0, \ \sin\theta = 0$

$\theta = 0$

$x = 1, \ \sin\theta = \frac{1}{2}$ (5)

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{2\cos\theta}{(4-4\sin^2\theta)^{1/2}\,(2-2\sin\theta)}\, d\theta$$ (5)

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{\cancel{2\cos\theta}}{\cancel{2\cos\theta}\; 2(1-\sin\theta)}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \sec^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$ (5)

(5)

$$= \frac{1}{2}\Big[\tan\theta\Big]_0^{\pi/6} + \frac{1}{2}\Big[\sec\theta\Big]_0^{\pi/6}$$ (5)

(5)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right] = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

5 5

50

(b) $G(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+8)}$ 5

$1 = A(x^2+8) + (Bx+C)(x+2)$ 5

x^2 සංගුණක : $0 = A + B \Rightarrow A = -B$

x සංගුණක : $0 = 2B + C \Rightarrow C = -2B$ 5

නියතය : $1 = 8A + 2C$ 5

$1 = -8B - 4B \Rightarrow 12B = -1$

$\Rightarrow B = -\frac{1}{12}$ 5

$A = \frac{1}{12}, \quad C = \frac{1}{6}$

5 5

$$g(x) = \int \frac{1}{(x+2)(x^2+8)}\, dx$$

$$g(x) = \frac{1}{12}\int \frac{1}{(x+2)}\, dx - \frac{1}{12}\int \frac{x}{(x^2+8)}\, dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x^2+8)}\, dx$$ 5

$$= \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln(x^2+8) + \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) + C$$

5

$$= \frac{1}{24}\ln\left[\frac{(x+2)^2}{x^2+8}\right] + \frac{1}{6}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) + C$$

5 5

$$= \frac{1}{24}\ln\left[\frac{(x+2)^2}{x^2+8}\right] + \frac{1}{12\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) + C$$

5

60

(c)

$$I_n = \int x^n \sin x \; dx$$

$$= \int -x^n \frac{d}{dx} (\cos x) \qquad 5$$

$$= \left[-x^n \cos x\right] + \int (\cos x)\, n x^{n-1} dx \qquad 10$$

$$= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \frac{d}{dx} (\sin x) \qquad 5$$

$$= -x^n \cos x + n \left\{ x^{n-1} \sin x - \int \sin x (n-1)\; x^{n-2}\, dx \right\} \qquad 10$$

$$= -x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1)\, I_{n-2} \qquad 5$$

$$I_n + n(n-1)\, I_{n-2} = x^{n-1} \left[n \sin x - x \cos x \right] \qquad 5$$

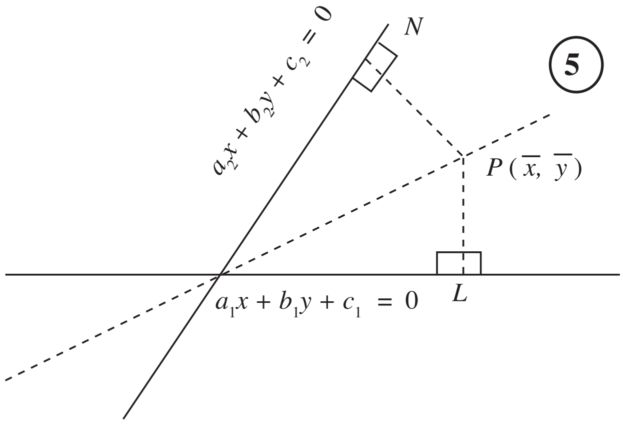
$\boxed{40}$

16. (a)

ඕනෑම කෝණ සමච්ඡේදකයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක්

$P(\overline{x}, \overline{y})$ නම්

$PL = PN$ 5



$$\frac{\left|a_1\overline{x} + b_1\overline{y} + c_1\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_2^2}} = \frac{\left|a_2\overline{x} + b_2\overline{y} + c_2\right|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \qquad 5$$

$$\therefore \; \frac{a_1\overline{x} + b_1\overline{y} + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_2^2}} = \pm \frac{a_2\overline{x} + b_2\overline{y} + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \qquad 5$$

$\overline{x} \longrightarrow x$, $\overline{y} \longrightarrow y$ ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන් 5

කෝණ සමච්ඡේදක රේඛාවල සමීකරණ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_2^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \qquad 5$$

කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණය

$$\frac{4x + y + 3}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \pm \frac{x + 4y - 3}{\sqrt{4^2 + 1^2}} \qquad 5$$

$+ : \; 3x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

$- : \; 5x + 5y = 0 \Rightarrow x + y = 0$ 5

$x + y = 0$ සහ $x - y + 2 = 0$ විසඳීමෙන්

$x = -1, \quad y = 1$ 5

$A = (-1, 1)$ යැයි ගනිමු.

$B = (0, 2), \quad x - y + 2 = 0$ මත පිහිටයි. 5

$P = (x, y)$ යනු $x + y = 0$ මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ලෙස ගනිමු.

$PA \perp PB$ බැවින්

$\left(\frac{y-1}{x+1}\right) \times 1 = -1$ 5

$\frac{y-1}{-1} = \frac{x+1}{1} = t$; t යනු පරාමිතියකි 5

$\therefore\ x = -1 + t, \quad y = 1 - t$

$x + y = 0$ මත $AD = AB$ වන පරිදි

D ලක්ෂයට අනුරූප පරාමිතිය T ලෙස ගනිමු.

එවිට $D = (-1 + T, 1 - T)$ 5

$AD^2 = AB^2 \Rightarrow T^2 + T^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ 5

$T = \pm 1$ 5

$\therefore\ D = (0, 0)$ හෝ $(-2, +2)$

5 5

$D \equiv (0, 0)$ විට CD සමීකරණය

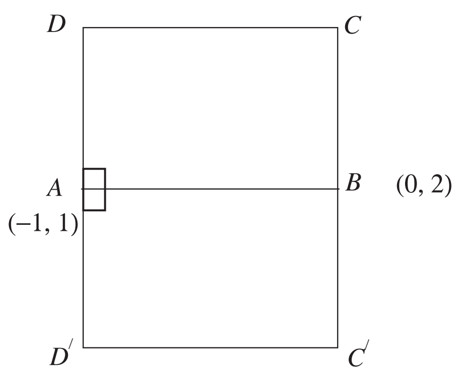
$x - y = 0$ 5

$D' \equiv (-2, +2)$ විට $C'D'$ සමීකරණය

$x - y + 4 = 0$ 5

BC සහ BC' රේඛාවන්හි සමීකරණය

$x + y - 2 = 0$ 5



100

(b) $S^1 = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 \quad = 0$

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යැයි ගනිමු. මෙහි g, f, c නියත වේ. 5

$S^1 = 0$ න් $S = 0$ සමච්ඡේද වන නිසා,
$S^1 - S = 0$ රේඛාව මත $S = 0$ හි කේන්ද්‍රය පිහිටයි. 5

$-2x(g+1) - 2y(f-2) - 3 - c = 0$ 5

$\therefore\ 2(g)(g+1) + 2(f)(f-2) - c - 3 = 0$ ——— 1 5

$S = 0$ වෘත්තය $(1, 1)$ හරහා යන බැවින්
$1^2 + 1^2 + 2g + 2f + c = 0$
$\therefore\ c = -2g - 2f - 2$ ——— 2 5

1 න් හා 2 න්

$2g^2 + 2g + 2f^2 - 4f - (-2g - 2f - 2) - 3 = 0$

$2g^2 + 2f^2 + 4g - 2f - 1 = 0$

$2(-g)^2 + 2(-f)^2 - 4(-g) + 2(-f) - 1 = 0$ 5

$\therefore (-g, -f)$ ලක්ෂ්‍යය $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටයි. 5

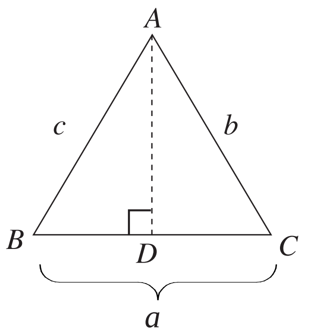
මෙහි කේන්ද්‍රය$(1, -\frac{1}{2})$ 5

අරය $= \sqrt{1^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{4}}$

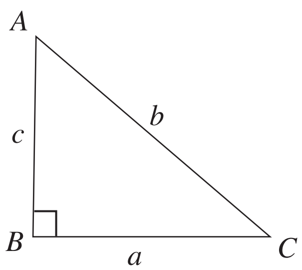
$= \frac{\sqrt{7}}{2}$ 5

$\boxed{50}$

17. (a)

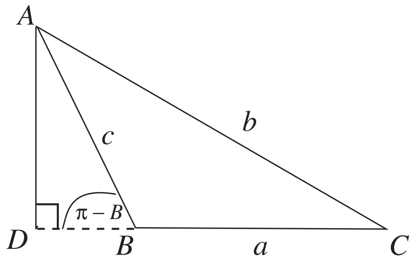


$a = BC = BD + DC$
$a = c\cos B + b\cos C$ 5



$a = b\cos C + 0$
$= b\cos C + c\cos 90°$
$= b\cos C + c\cos B$ 5

[19 වන පිටුව බලන්න



$a = BC = CD - BD$

$= b\cos C - c\cos(\pi - B)$ (5)

$= b\cos C + c\cos B$

එපරිදිම $b = a\cos C + c\cos A$

$a\cos C = b - c\cos A$

$a^2\cos^2 C = b^2 - 2bc\cos A + c^2\cos^2 A$ (10)

$a^2 - a^2\sin^2 C = b^2 + c^2 - 2bc\cos A - c^2\sin^2 A$

$a^2 + \underbrace{c^2\sin^2 A - a^2\sin^2 C}_{=0} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ නිසා

(5)

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

a, b, c සමාන්තර ශ්‍රේඪියක නම්

$a + c = 2b$ (5)

$b\cos C + c\cos B + a\cos B + b\cos A = 2b$ (5)

$\cos A + \cos C + 2\cos B = 2$

$2\cos\left(\dfrac{A+C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-C}{2}\right) = 2(1 - \cos B)$

(5)

$2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-C}{2}\right) = 4\sin^2\dfrac{B}{2}$

$\cos\left(\dfrac{A-C}{2}\right) = 2\sin\dfrac{B}{2}$ (5)

50

(b) $0 < x,\ y < \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore 0 < \dfrac{\pi}{2} - y < \dfrac{\pi}{2}$ (5)

$\sin x > \cos y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$ (5)

$\sin x > \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$

$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ වසම තුළ කෝණය වැඩි වන විට සයින් අගය වැඩි වන නිසා, (10)

$\therefore x > \dfrac{\pi}{2} - y$ (5)

$x + y > \dfrac{\pi}{2}$

25

(c) $f(x) = 3\cos^2 x + 8\sin x\cos x - 3\sin^2 x$

$= 3\cos 2x + 4\sin 2x$ 5

5

$= 5\left(\frac{3}{5}\cos 2x + \frac{4}{5}\sin 2x\right)$ 5

$= 5(\sin\alpha\cos 2x + \cos\alpha\sin 2x)$

$= 5\sin(2x + \alpha)$

$= A\sin(2x + \alpha)$ 5

මෙහි $A = 5$, α යනු $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ වන පරිදි වූ සුළු කෝණයයි. 5

$f(x) = \frac{5}{2}$

$5\sin(2x + \alpha) = \frac{5}{2}$

$\sin(2x + \alpha) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ 5

$2x + \alpha = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ 5

$x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$, මෙහි $n \in Z$

5

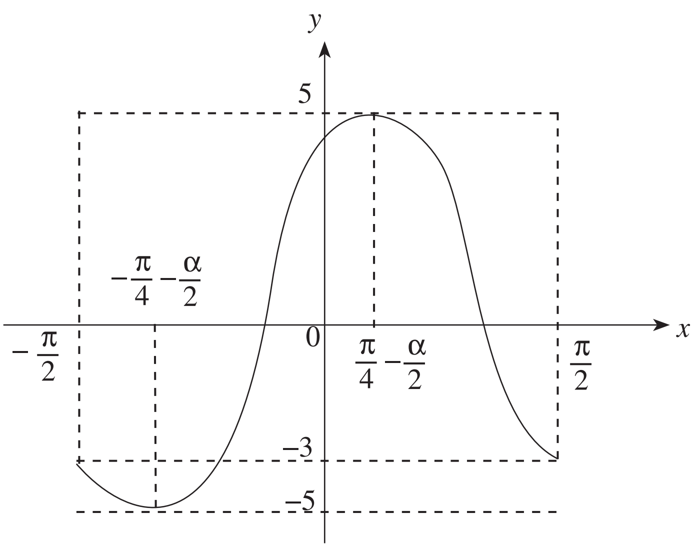
$f(x) = 5\sin(2x + \alpha)$

$f(x)$ උපරිම $= 5$; $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$

5 5

$f(x)$ අවම $= -5$; $x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ $\left(\alpha < \frac{\pi}{4}\right.$ නිසා)

5 5



15

75

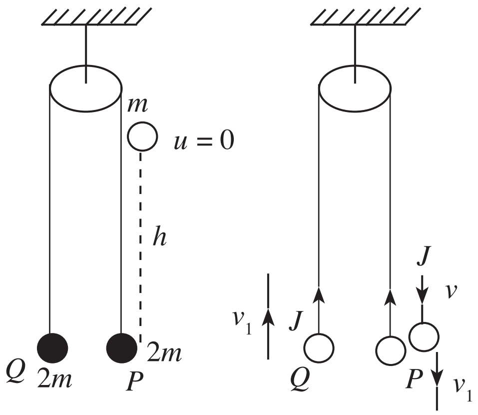
අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2016
සංයුක්ත ගණිතය - II පත්‍රය
පිළිතුරු සඳහා මග පෙන්වීම

A කොටස

1. m ට $\downarrow$ $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්

$v^2 = 2gh$

$\therefore v = \sqrt{2gh}$ (5)



$I = \Delta(mv)$ යෙදීම ;

$\downarrow$ P හා m ට

$-J = (2m + m)\, v_1 - mv - 2m \times 0$ (5)

$\therefore -J = 3mv_1 - mv$ ——— (1)

Q ට $\uparrow$

$J = 2mv_1 - 0$ ——— (2) (5)

(1) හා (2) න්

$v_1 = \frac{v}{5} = \frac{\sqrt{2gh}}{5}$ (5)

$J = \frac{2m}{5}\sqrt{2gh}$ (5)

$\boxed{25}$

2. තත්පරයකදී පිටකරන ජල පරිමාව $= 8\,(0.005)\ \text{m}^3$

$= 0.040\ \text{m}^3$ (5)

තත්පරයකදී පිටකරන ජල ස්කන්ධය $= 10^3 \times 0.040\ \text{kg}$

$= 40\ \text{kg}$ (5)

තත්පරයකදී පොම්පය මගින් කෙරෙන කාර්යය $= mgh + \frac{1}{2}mv^2$

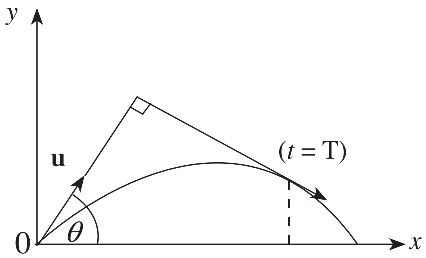
$= (40 \times 10 \times 4) + \frac{1}{2} \times 40 \times 8^2$ (5) (5)

$= 2880\ \text{js}^{-1}$

$\therefore$ පොම්පයේ ක්ෂමතාවය $= 2880\ \text{W}$ (5)

$\boxed{25}$

3.

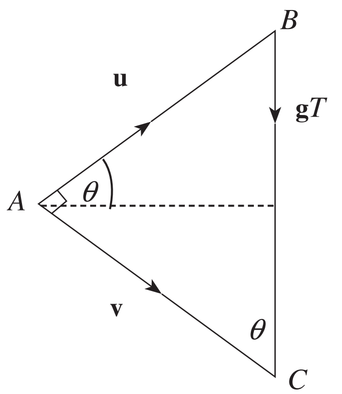


5

$t = T$ විට,

$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{g}T$ 5

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



10

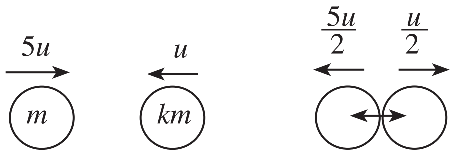
$gT \sin\theta = u$ 5

$\therefore \quad T = \frac{u}{g\sin\theta}$

$= \frac{u}{g}\operatorname{cosec}\theta$

25

4.



පද්ධතියට ගම්‍යතා සංස්ථිතිය නියමය යෙදීමෙන්

$\longrightarrow \qquad 5mu - kmu = \frac{kmu}{2} - \frac{5mu}{2}$ 5

$10 - 2k = k - 5$

$\therefore k = 5$ 5

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන්

$\frac{u}{2} + \frac{5u}{2} = e(u + 5u)$ 5

$3u = 6ue$

$\frac{1}{2} = e$ 5

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$

$\longrightarrow -I = -m.\frac{5u}{2} - m.5u$

$I = \frac{15mu}{2}$ 5

25

5. $\underline{a} \perp \underline{b}$ නිසා $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ 5

$\therefore \ (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \ . \ (\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}) = 0$ 5

$2\lambda + 3\mu = 0$ ———— 1

$|\underline{b}| = 1$ නිසා $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ ——— 2 5

1 හා 2 $\mu = \pm\sqrt{\dfrac{2}{13}}$

$\mu > 0$ නිසා $\mu = \sqrt{\dfrac{2}{13}}$ 5

1 න්, $\lambda = -\sqrt{\dfrac{3}{13}}$ 5

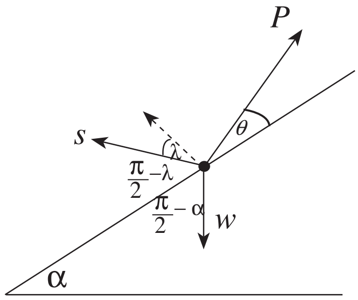
25

6. වස්තුව සීමාකාරී අවස්ථාවේ පවතින විට වේ.

ලාමි ප්‍රමේයයෙන්,

$$\frac{P}{\sin[\pi - (\alpha+\lambda)]} = \frac{w}{\sin[\frac{\pi}{2} - (\theta - \lambda)]}$$ 5

$$P = \frac{w \sin(\lambda + \alpha)}{\cos(\theta - \lambda)}$$ 5



5

P අඩුතම වීමට $\cos(\theta - \lambda)$ උපරිම විය යුතුය.

එනම් $\theta = \lambda$ 5

$\therefore P$ (අඩුතම) $= w \sin(\lambda + \alpha)$ 5

25

7. $P(A) = \dfrac{1}{3}, P(B) = \dfrac{1}{4}$ යැයි ගනිමු.

$(A) \longrightarrow 1^{st}$ (පළමුවන) $(B) \longrightarrow 2^{nd}$ (දෙවන)

(i) $X = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ 5

නමුත් $(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \phi$

$\therefore P(X) = P(A \cap B') + P(A' \cap B)$ ($\because$ III වන ප්‍රත්‍යක්ෂය)

$= P(A) \ P(B') + P(A') \ P(B)$ 5 (ස්වායත්ත බැවින්)

$= \dfrac{1}{3} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) . \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{1}{4} \times \dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{5}{12}$ 5

(ii) $P(A \mid X) = \dfrac{P(A \cap X)}{P(X)} = \dfrac{P(A)\,P(B')}{P(X)}$ 5

$= \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{5}{12}} = \dfrac{3}{5}$ 5

25

8. $P(A \cap B') = 0.2, \quad P(A' \cap B) = 0.1$ 5

$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 0.6$

$1 - P(A \cup B) = 0.6$

$P(A \cup B) = 0.4$ 5

$P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.1$

$\therefore P(A \cap B) = 0.4 - 0.3 = 0.1$ 5

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$0.1 + 0.1 = P(B)$ 5

$\therefore P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.2}$

$= \dfrac{1}{2}$ 5

25

9. $\overline{x} = 5$ සහ $s_x = 2$

(i) $y_i \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$y_i = x_i + 10$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $x_i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore \overline{y} = \overline{x} + 10 = 5 + 10 = 15$ 5

සහ $s_y = s_x = 2$

(ii) $y_i \in \{20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$

$y_i = 10x_i$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $x_i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore \overline{y} = 10\,\overline{x}$ 5

$= 10 \times 5 = 50$

සහ $s_y = 10\, s_x = 10 \times 2 = 20$ 5

(iii) $y_i = ax_i + b$ යැයි ගනිමු. 5

එවිට $\overline{y} = a\overline{x} + b = 5a + b$

$s_y^2 = a^2 s_x^2$

$s_y = |a|\, s_x$

$= 2|a|$ 5

25

[5 වන පිටුව බලන්න

10.

u_i	-3	-2	-1	0	1	2
f_i	5	10	25	30	20	10
$f_i u_i$	-15	-20	-25	0	20	20

5

$$\overline{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} = -\frac{20}{100} = -\frac{1}{5}$$

$$u_i = \frac{x_i - 35}{a}$$ 5

$$\therefore \ \overline{x} = a\overline{u} + 35$$

$$33 = -\frac{a}{5} + 35$$ 5

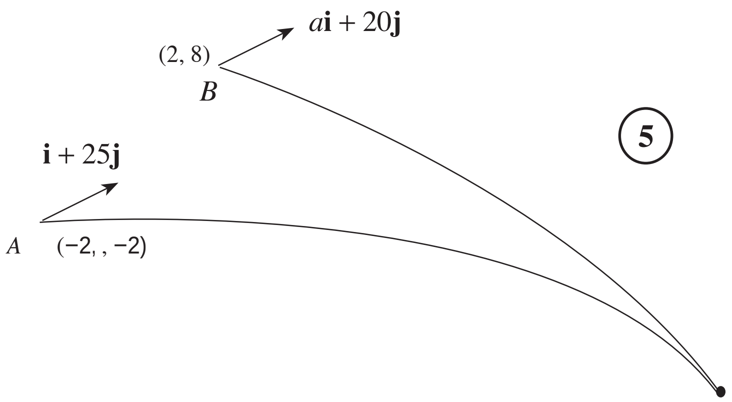
$$a = 10$$ 5

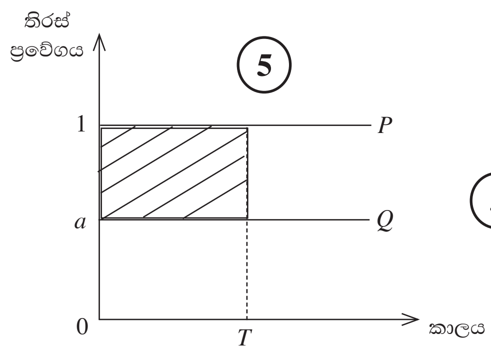
ප්‍රාන්තර	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
f_i	5	10	25	30	20	10

5

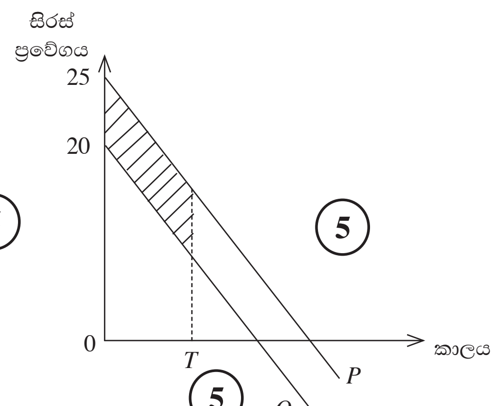
25

11. (a)





5



5

5

හමුවීම සඳහා

P හි සිරස් විස්ථාපනය $=$ Q හි සිරස් විස්ථාපනය $+ 10$

P හි සිරස් විස්ථාපනය $-$ Q හි සිරස් විස්ථාපනය $= 10$ 10

$5T = 10$

$T = 2$ 5

P හි තිරස් විස්ථාපනය $=$ Q හි තිරස් විස්ථාපනය $+4$

P හි තිරස් විස්ථාපනය $-$ Q හි සිරස් විස්ථාපනය $= 4$ 10

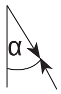
$(1-a)\,2 = 4$ 5

$1-a = 2$

$a = -1$ 5

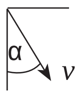
60

(b) $v\,(S, E) = \xrightarrow{\quad} u$

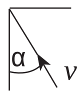
$v\,(P, S) =$  v 5

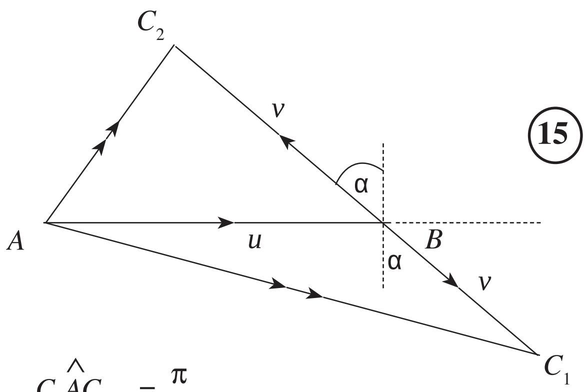
$v\,(P, E) = v\,(P, S) + v\,(S, E)$

යාමට

$\underline{v}\,(P, E) =$  $+ \xrightarrow{\quad} u \Rightarrow \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC_1}$ 5

ඒමට

$\underline{v}\,(P, E) =$  $+ \xrightarrow{\quad} u \Rightarrow \overrightarrow{BC_2} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC_2}$ 5



15

$C_1\hat{A}C_2 = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ C_1C_2 විශ්කම්භය වන පරිදි වූ වෘත්තය A හරහා ගමන් කරයි.

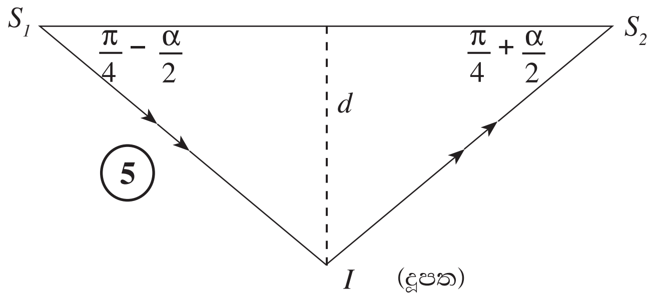
C_1C_2 හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය B බැවින්, 10

$BC_1 = BC_2 = BA = u$ 5

$v = u$

$B\hat{A}C_1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$ සහ $B\hat{A}C_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$

5 5



ගමනට ගතවන මුළු කාලය t නම්,

$$t = \frac{S_1I}{AC_1} + \frac{S_2I}{AC_2}$$

10

$$= \frac{S_1I \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{AC_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{S_2I \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{AC_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}$$ 10

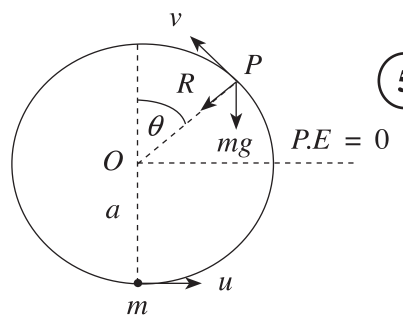
$$= \frac{d}{v\cos\alpha} + \frac{d}{v\cos\alpha} = \frac{2d}{u\cos\alpha} \quad (\because v = u)$$

5 5

90

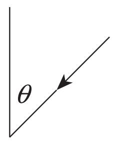
12. (a) m ට ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,

$$\frac{1}{2}mu^2 - mga = mga\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$ 15



$$v^2 - u^2 + 2ga(1 + \cos\theta) = 0 \quad \text{—— (1)}$$ 5

m ට



$F = ma$ යෙදීමෙන් 10

$$R + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a} \quad \text{—— (2)}$$

(1) න් (2) ට ආදේශයෙන් 5

$$R + mg\cos\theta = \frac{m}{a}\left[u^2 - 2ga\ (1 + \cos\theta)\right]$$

$$R = \frac{mu^2}{a} - mg\ (2 + 3\cos\theta)$$

OA උඩු සිරස සමග සාදන කෝණය α වන විට අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වේ නම්, එවිට $R = 0$ වේ. 5

$\therefore\ u^2 - 2ga - 3ga\cos\alpha = 0$ 5

$$\cos\alpha = \frac{u^2 - 2ga}{3ga} > 0 \quad (\because u^2 > 2ga)$$

$\therefore\ \alpha$ සුළු කෝණයක් වේ.

තවද $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වන නිසා $0 < \cos\alpha < 1$ වේ.

5

$$\frac{u^2 - 2ga}{3ga} < 1$$

$u^2 < 5ga$

[8 වන පිටුව බලන්න

m ස්කන්ධය පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වන විට $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ fõ'

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{u^2 - 2ga}{3ga}$$

$$u^2 - 2ga = \sqrt{3}\, ga$$

$$u^2 = (2 + \sqrt{3}\,)\, ga \qquad 5$$

එවිට ප්‍රවේගය $v^2 = u^2 - 2ga \;\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2ga + \sqrt{3}\, ga - 2ga - \dfrac{2ga}{\sqrt{3}} = \dfrac{ga}{\sqrt{3}}$ 5

m ස්කන්ධය ගෝල පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වූ පසු ප්‍රක්ෂිප්තයක ආකාරයට ගමන් කරයි.

අනතුරුව සිදුවන චලිතයේදී, $a\sin\alpha$ තිරස් දුරක් යාමට ගතවන කාලය t_0 නම්

$$a\sin\alpha = (v\cos\alpha)\, t_0 \qquad 5$$

එවිට ඉහළට ගමන් කරන දුර $y = (v\sin\alpha)\, t_0 - \dfrac{1}{2} g t_0^2$

$$y = \frac{v\sin\alpha \times a\sin\alpha}{v\cos\alpha} - \frac{1}{2}\,\frac{ga^2\sin^2\alpha}{v^2\cos^2\alpha} \qquad 5$$

$$= \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{ga^2}{\frac{2ga}{\sqrt{3}}}\;\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\, a$$

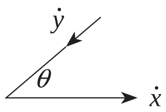
$$= -\frac{a}{\sqrt{3}}$$

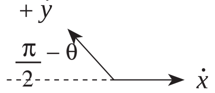
$$= -a\cos\alpha \qquad 5$$

m ස්කන්ධය O හරහා යන සිරස් රේඛාව පසුකර යනවිට පහළට $a\cos\alpha$ දුරක් ගොස් ඇති බැවින් එය ගෝලයේ O කේන්ද්‍රය හරහා යයි.

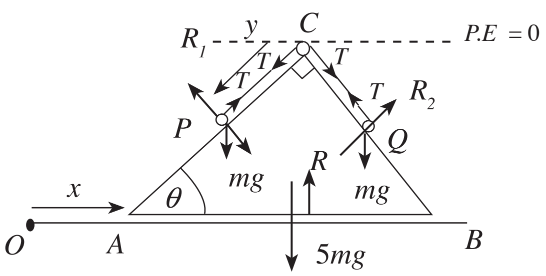
80

(b)

$\mathbf{v}(P, O) =$ 

$\mathbf{v}(Q, O) =$ 

5



පද්ධතිය සඳහා ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$$\longrightarrow \quad 5m\dot{x} + m(\dot{x} - \dot{y}\cos\theta) + m(\dot{x} - \dot{y}\sin\theta) = 0 \qquad 10$$

$$7m\dot{x} = m\dot{y}\,(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$7\dot{x} = \dot{y}\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) \qquad 5$$

$$5\dot{x} = \dot{y} \quad \text{———} \quad 1$$

$\boxed{20}$

පද්ධතිය සඳහා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}\,5m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,m\{(\dot{x} - \dot{y}\cos\theta)^2 + (\dot{y}\sin\theta)^2\} \qquad 20$$

$$+\frac{1}{2}\,m\{(\dot{x} - \dot{y}\sin\theta)^2 + (\dot{y}\cos\theta)^2\} - mgy\sin\theta - mg(l-y)\cos\theta = \text{නියතයක්}$$

$$5\dot{x}^2 + \left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\cos\theta\right\} + \left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\sin\theta\right\}$$

$$-2gy\sin\theta + 2gy\cos\theta = \text{නියතයක්} \qquad 5$$

$$7\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) - 2gy\frac{4}{5} + 2gy\frac{3}{5} = \text{නියතයක්}$$

$$35\dot{x}^2 + 10\dot{y}^2 - 14\dot{x}\dot{y} - 2gy = \text{නියතයක්} \quad \text{———} \quad 2$$

$\boxed{25}$

1 yd 2 k

$$35\dot{x}^2 + 250\dot{x}^2 - 70\dot{x}^2 - 2gy = \text{නියතයක්}$$

$$215\dot{x}^2 - 2gy = \text{නියතයක්}$$

t විෂයෙන් අවකලනය කිරීමෙන්

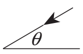
$$430\dot{x}\cdot\ddot{x} - 2g\dot{y} = 0 \qquad 5$$

$$430\dot{x}\cdot\ddot{x} - 2g\,.\,5\dot{x} = 0 \quad (\therefore\ \dot{x} \neq 0) \qquad 5$$

$$\therefore\ \ddot{x} = \frac{g}{43}$$

$\boxed{10}$

P සඳහා $F = \text{m}a$ යෙදීමෙන්



$$:\ mg\sin\theta - \text{T} = m(\ddot{y} - \ddot{x}\cos\theta) \qquad 5$$

$$\text{T} = mg\sin\theta - m(5\ddot{x} - \ddot{x}\cos\theta) \qquad 5$$

$$= mg\frac{4}{5} - m\ddot{x}\left(5 - \frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{4mg}{5} - m.\frac{1}{43}g\,.\,\frac{22}{5}$$

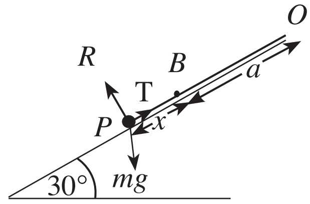
$$= \frac{2mg}{5}\left\{2 - \frac{11}{43}\right\}$$

$$= \frac{2mg}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{75}}{43}$$

$$= \frac{30mg}{43} \qquad 5$$

$\boxed{15}$

13. තන්තුව ස්වාභාවික දිගේ සිට x දුරක් ඇදී ඇති විට තන්තුවේ ආතතිය T නම්,



$T = \frac{\lambda x}{a} = \frac{2mgx}{a}$ 5

අංශුවේ චලිතය සඳහා $F = ma$

$mg \sin 30° - T = m\ddot{x}$ 10

$\cancel{m}g \times \frac{1}{2} - \frac{2\cancel{m}gx}{a} = \cancel{m}\ddot{x}$

$\ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{a}{4}\right)$ ——— 1 5

20

$x = \frac{a}{4} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ——— 2

$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ ——— 3 5

$\ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$ ——— 4 5

$= -\omega^2(A\cos\omega t + B\omega\sin\omega t)$

$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - \frac{a}{4}\right)$ ——— 5 2 න් 5

1 හා 5 සැලකීමෙන් $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ වේ. 5

$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$

$t = 0$ විට $\dot{x} = 0$ වේ. 5

3 න්, $0 = B\omega$

$\omega \neq 0$ නිසා $B = 0$ වේ. 5

$t = 0$ විට $x = a$ වේ. 5

5

2 න්, $a - \frac{a}{4} = A \Rightarrow A = \frac{3a}{4}$

40

$\therefore x = \frac{3a}{4}\cos\omega t + \frac{a}{4}$

$x - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}\cos\omega t$

අංශුවේ දෝලන කේන්ද්‍රය $x - \frac{a}{4} = 0$ දී ලැබේ. 5

එනම් $x = \frac{a}{4}$ දෝලන කේන්ද්‍රය වේ. 5

10

විස්තාරයේදී $\dot{x} = 0$ වේ. එවිට $t = t_1$ යැයි ගනිමු.

$0 = -A\omega \sin \omega t_1$ 5

$\sin \omega t_1 = 0$

$\omega t_1 = n\pi \; ; \; n \in Z_0^+$ 5

$x - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t_1$

$x - \frac{a}{4} = \pm \frac{3a}{4}$ 5

$\boxed{20}$

$\therefore$ අංශුවේ සරල අනුවර්තී චලිතයේ විස්තාරය $= \frac{3a}{4}$ 5

අංශුව පළමුවෙන්ම ස්වාභාවික දිගට පැමිණෙන විට එහි ප්‍රවේගය V යැයි ගනිමු. එවිට $x = 0$ වේ. 5

$\frac{3\cancel{a}}{\cancel{4}} \cos \omega t = -\frac{\cancel{a}}{\cancel{4}}$

$\cos \omega t = -\frac{1}{3}$ 5

$V = -A\omega \sin \omega t$

$= -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \omega t}$

$= -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \sqrt{\frac{8}{9}}$ 5 $= -\frac{\cancel{3}a}{\cancel{4}} \sqrt{\frac{\cancel{2}g}{a}} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{\cancel{2}}}{\cancel{3}}$

$= -\sqrt{ag}$

$x = 0$ විට ප්‍රවේගය $\uparrow \sqrt{ag}$ වේ. 5

$\boxed{20}$

අංශුව පළමුවෙන්ම ස්වාභාවික දිගට ඒමට ගතවන කාලය t_0 යැයි ගනිමු.
එවිට $x = 0$ වේ. 5

$-\frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t_0$

$\cos \omega t_0 = -\frac{1}{3}$ 5

$\omega t_0 = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$t_0 = \frac{1}{\omega}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ 5

අංශුව O දක්වා ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ.

B සිට O දක්වා යාමට කාලය t_2 නම්

$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \uparrow$

$S = a, \; u = \sqrt{ag}, \; a = -g \sin 30°$

$a = \sqrt{ag}\,t_2 - \frac{1}{2}\frac{g}{2}t_2^2$ 5

$\frac{g}{4}t_2^2 - \sqrt{ag}\,t_2 + a = 0$

$t_2 = \dfrac{\sqrt{ag} \pm \sqrt{ag - 4\frac{g}{4}a}}{\frac{g}{2}}$

$t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}$ 5

$\therefore$ O දක්වා යාමට කාලය $t_0 + t_2$

$= \sqrt{\frac{a}{2g}}\left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 2\sqrt{\frac{a}{g}}$
5

$= \sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{2}\right]$ **30**

තන්තුව උපරිම දිගේ ඇත්තේ A ලක්ෂ්‍යයේදීය. එනම් $x = a$ විට, **10**

$T_A = \frac{\lambda a}{a}$ 5

$= \lambda$

$T_A = 2mg$ 5

14. (a) (i) $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1$ 5

$(\underline{a} + 2\underline{b}) \perp (5\underline{a} - 4\underline{b})$ නම්

$(\underline{a} + 2\underline{b}) \cdot (5\underline{a} - 4\underline{b}) = 0$ 5

$5\underline{a}\cdot\underline{a} + 10\underline{b}\cdot\underline{a} - 4\underline{a}\cdot\underline{b} - 8\underline{b}\cdot\underline{b} = 0$

$5|\underline{a}|^2 + 10\underline{a}\cdot\underline{b} - 4\underline{a}\cdot\underline{b} - 8|\underline{b}|^2 = 0$

$5 + 6\underline{a}\cdot\underline{b} - 8 = 0$

$6\underline{a}\cdot\underline{b} = 3$

$\underline{a}\cdot\underline{b} = \frac{1}{2}$ 5

$|\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta = \frac{1}{2}$ 5

$1 \times 1 \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$ 5 **25**

(ii) $|\underline{a}-\underline{b}|^2+|\underline{b}-\underline{c}|^2+|\underline{c}-\underline{a}|^2$

$= (\underline{a}-\underline{b}).(\underline{a}-\underline{b})+(\underline{b}-\underline{c}).(\underline{b}-\underline{c})+(\underline{c}-\underline{a}).(\underline{c}-\underline{a})$ 5

$= |\underline{a}|^2+|\underline{b}|^2-2\,\underline{a}.\underline{b}+|\underline{b}|^2+|\underline{c}|^2-2\underline{b}.\underline{c}+|\underline{c}|^2+|\underline{a}|^2-2\,\underline{c}.\underline{a}$ 5

$= 6-2(\underline{a}.\underline{b}+\underline{b}.\underline{c}+\underline{c}.\underline{a})$ 5

$\therefore 2(\underline{a}.\underline{b}+\underline{b}.\underline{c}+\underline{c}.\underline{a}) = 6-\left(|\underline{a}-\underline{b}|^2+|\underline{b}-\underline{c}|^2+|\underline{c}-\underline{a}|^2\right)$ —— 1 5

$|\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}|^2 \geq 0$ 5

$\therefore (\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}).(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) \geq 0$ 5

$|\underline{a}|^2+\underline{a}.\underline{b}+\underline{a}.\underline{c}+\underline{b}.\underline{a}+|\underline{b}|^2+\underline{b}.\underline{c}+\underline{c}.\underline{a}+\underline{c}.\underline{b}+|\underline{c}|^2 \geq 0$ 5

$3+2(\underline{a}.\underline{b}+\underline{b}.\underline{c}+\underline{c}.\underline{a}) \geq 0$ —— 2 5

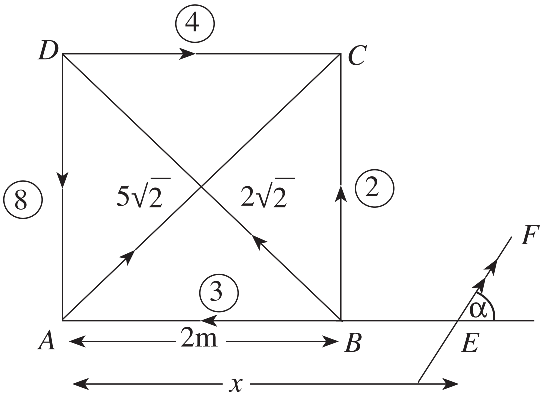
1 හා 2 න්

$3+6-(|\underline{a}-\underline{b}|^2+|\underline{b}-\underline{c}|^2+|\underline{c}-\underline{a}|^2) \geq 0$ 5

$\therefore\ |\underline{a}-\underline{b}|^2+|\underline{b}-\underline{c}|^2+|\underline{c}-\underline{a}|^2 \leq 9$ 5

50

(b)



5

(i) $\overrightarrow{X} = 4-3+5\sqrt{2}\cos 45^\circ - 2\sqrt{2}\cos 45^\circ$ 5

$= 4\text{N}$

$\uparrow Y = 2-8+5\sqrt{2}\cos 45^\circ + 2\sqrt{2}\cos 45^\circ$ 5

$= 1\text{N}$

සම්ප්‍රයුක්තය R නම්,

$R = \sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{4^2+1^2}$

$= \sqrt{17}\,\text{N}$ 5

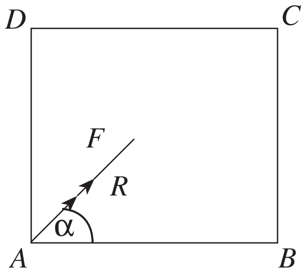
සම්ප්‍රයුක්තය තිරසත් සමඟ සාදන කෝණය α නම්,

$\tan\alpha = \dfrac{1}{4}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 5

25

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව AB කපන ලක්ෂ්‍යය E නම් $AE = x$ යැයි ගනිමු.



$\overset{\curvearrowleft}{A}$ $\quad 1 \times x = 2 \times 2 - 4 \times 2 + 2\sqrt{2} \cdot 2 \cos 45^\circ$ 5

$x = 0$ 5

$A \equiv E$ (සමපාත වේ)

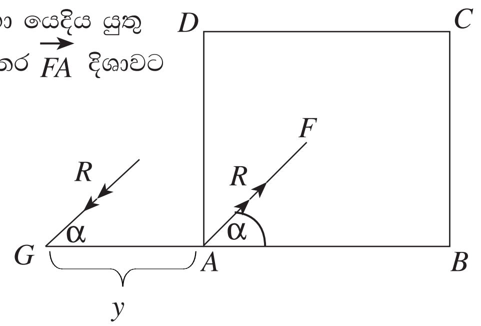
සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව A හරහා යයි.

$\therefore$ බල පද්ධතිය සමතුලිත වීම සඳහා $\sqrt{17}$ N බලයක් $\overrightarrow{FA}$ දිශාවට A හිදී යෙදිය යුතුයි. 5 5

20

(ii) ABC අතට 39Nm යුග්මයකට ඌනනය කිරීම සඳහා යෙදිය යුතු බලය දික්කළ BA මත Aසිට y දුරකින් AF ට සමාන්තර $\overrightarrow{FA}$ දිශාවට වූ $\sqrt{17}$ N බලයක් ක්‍රියා කරන්නේ යැයි ගනිමු.

5



$\overset{\curvearrowleft}{ABC}$ $\quad \sqrt{17} \times AG \sin\alpha = 39$ 5

$\sqrt{17} \times AG \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 39$

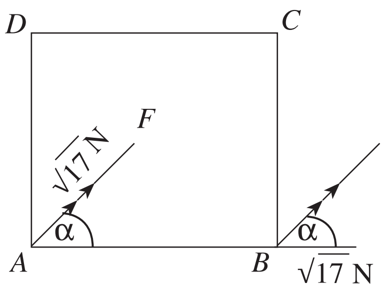
$AG = 39\text{m}$ 5

15

(iii) B හිදී තනි බලයකට ඌනනය කිරීම සඳහා එක් කළ යුතු ඝූර්ණය 5

$= \curvearrowright \sqrt{17} \times BA \sin\alpha$ 5

$= \curvearrowright \sqrt{17} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 2\text{Nm}$ 5



Aliter

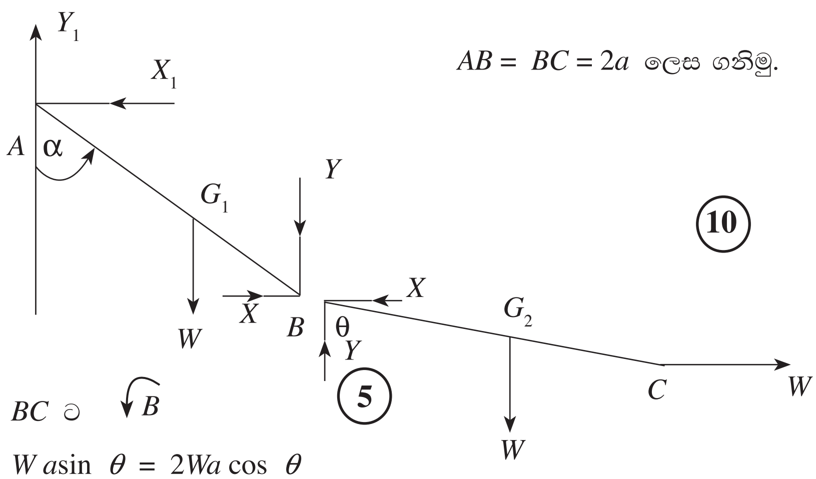
එක් කළ යුතු ඝූර්ණය M නම්

$M - \sqrt{17} \times 2 \sin\alpha = 0$

$M = \sqrt{17} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 2$ Nm

15

15. (a)



$AB = BC = 2a$ ලෙස ගනිමු.

10

10

(i) BC ට $\overset{\curvearrowleft}{B}$

$Wa \sin\theta = 2Wa \cos\theta$

$\tan\theta = 2$ 5

10

BC කොටසේ සමතුලිතතාව සැලකීමෙන්,

$\leftarrow \; X = W$ 5

$\uparrow \; Y = W$ 5

$\therefore \; R_B = \sqrt{W^2 + W^2}$ 5

$= \sqrt{2}\, W$

20

R_B හි දිශාව තිරස සමඟ $\tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ කෝණයක් සාදයි. 5

AB g $\curvearrowleft A$

$X.\; 2\cancel{a} \cos \alpha = W\cancel{a} \sin \alpha + y.\; 2\cancel{a} \sin \alpha$ 10

$W\; 2\cos \alpha = W \sin \alpha + W.\, 2 \sin \alpha$

$\dfrac{2}{3} = \tan \alpha$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ 5

15

AB හි සමතුලිතතාව සැලකීමෙන්,

$\rightarrow \; X_1 = X = W$ 5

$\uparrow \; Y_1 = 2W$ 5

$\therefore \; R_A = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$

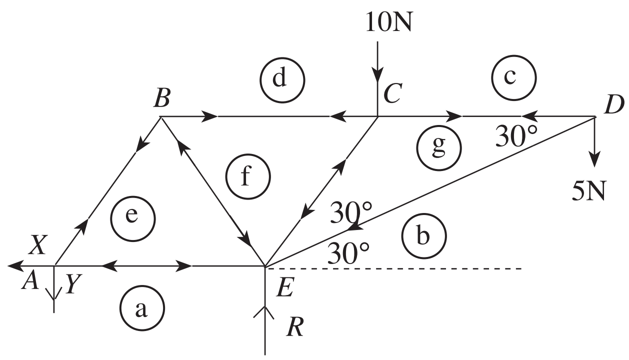
$= \sqrt{5}\, W$ 5

R_A හි දිශාව තිරස සමඟ සාදන කෝණය

$= \tan^{-1}(2)$ 5

20

(b)



දණ්ඩක දිග $2a$ යැයි ගනිමු. ^DE හැරු

(i) $\curvearrowleft A$ පද්ධතිය සලකා,

$R\, 2\cancel{a} - 10 \times 3\cancel{a} - 5 \times 5\cancel{a} = 0$ 5

$R = \dfrac{55}{2}$ N 5

$\therefore E$ හි යෙදෙන සිරස් බලය $= \dfrac{55}{2}$ N

(ii) $\uparrow \; -Y + R - 10 - 5 = 0$

$$-Y = 15 - \frac{55}{2} = -\frac{25}{2}\text{ N}$$

$$\therefore \; Y = \frac{25}{2}\text{ N}$$

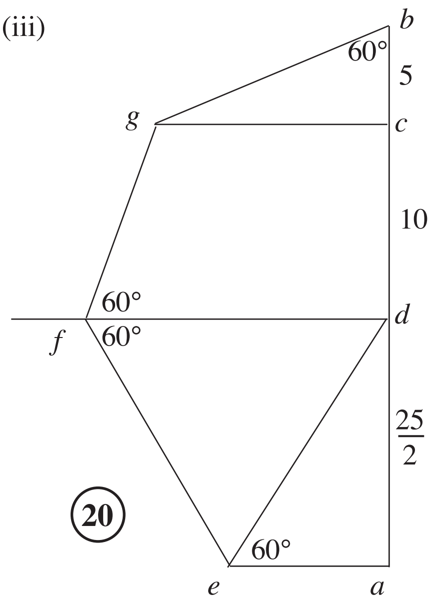
$$\leftarrow \; X = 0$$

A අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාවේ සිරස් සංරචකය $= \downarrow \frac{25}{2}$ N (5)

තිරස් සංරචකය $= 0$ (5)

20

(iii)

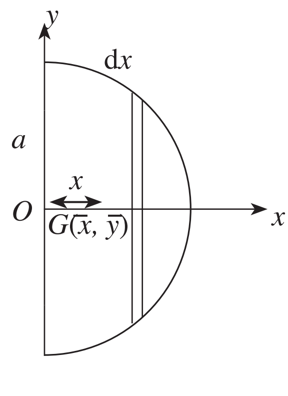


දණ්ඩ	විශාලත්වය	ප්‍රත්‍යාබලය
AE	$\frac{25\sqrt{3}}{6}$ N	තෙරපුම
AB	$\frac{25\sqrt{3}}{3}$ N	ආතතිය
BE	$\frac{25\sqrt{3}}{3}$ N	තෙරපුම
BC	$\frac{25\sqrt{3}}{3}$ N	ආතතිය
CE	$\frac{20\sqrt{3}}{3}$ N	තෙරපුම
CD	$5\sqrt{3}$	ආතතිය
ED	10 N	තෙරපුම

35

55

16. සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත වේ.



$$\overline{y} = 0 \quad (5)$$

$$\overline{x} = \frac{\int_0^a \pi\rho x(a^2 - x^2)\,dx}{\int_0^a \pi\rho(a^2 - x^2)\,dx} \quad (10)\ (5)$$

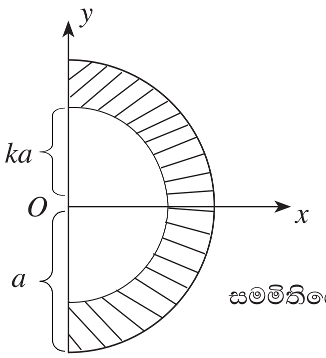
$$= \frac{\left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a} \quad (5)$$

$$= \frac{3a}{8} \quad (5)$$

$$\therefore \; G \equiv \left(\frac{3a}{8},\ 0\right)$$

30

(a)



සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය Ox මත වේ.

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර
අර්ධ ගෝලය	$\frac{2}{3}\pi a^3 \rho$	$\frac{3a}{8}$
ඉවත් කළ අර්ධ ගෝලය	$\frac{2}{3}\pi (ka)^3 \rho$	$\frac{3ka}{8}$
ඉතිරි කොටස	$\frac{2}{3}\pi a^3 \rho (1-k^3)$	$\overline{x}$

10

5

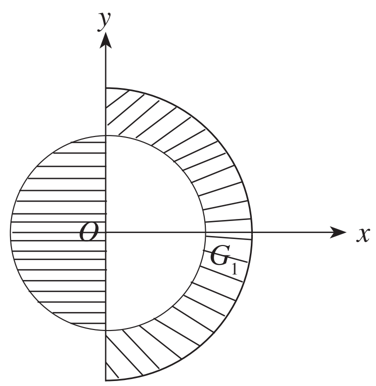
$$\overline{x} = \frac{\frac{2}{3}\pi a^3 \rho \frac{3a}{8} - \frac{2}{3}\pi k^3 a^3 \rho \frac{3ka}{8}}{\frac{2}{3}\pi a^3 \rho (1-k^3)}$$ 15

$$= \frac{\frac{3a}{8}(1-k^4)}{(1-k^3)} = \frac{3a}{8}\frac{(1+k^2)(1-k)(1+k)}{(1-k)\ (1+k+k^2)}$$

$$= \frac{3a}{8}\frac{(1+k^2)\ (1+k)}{(1+k+k^2)}$$ 10

40

(b) ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය $G_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ ලෙස ගනිමු. ඉවත් කළ කොටස රූපයේ අයුරු සම්බන්ධ කළ විට ද Ox වටා සමමිතික නිසා $\overline{y}_1 = 0$ වේ. 5



(i) ඉවත් කළ කොටසේ ස්කන්ධය m ද අරය a ද වූ අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධය M යැයිද ගනිමු.

5

$$\frac{m}{M} = \frac{\frac{2\pi}{3}k^3 a^3 \rho}{\frac{2\pi}{3}a^3 \rho} = k^3$$ 5

5

$$m = Mk^3$$

20

(ii) සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\bar{x}_1$ වේ.

$$\bar{x}_1 = \frac{(M-m)\,\bar{x} + m\left(-\frac{3}{8}ka\right)}{(M-m)+m}$$ 15

තවද $(M-m)\ \bar{x} = M\left(\frac{3a}{8}\right) - m\left(\frac{3}{8}ka\right)$ බැවින් 5

$$\bar{x}_1 = \frac{M\left(\frac{3a}{8}\right) - m\left(\frac{3}{8}ka\right) - m\left(\frac{3}{8}ka\right)}{M}$$

$$= \frac{3a}{8}\ \frac{(M-2mk)}{M}$$

$$= \frac{3a}{8}\left(1-\frac{2m}{M}k\right)$$ 10

සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $= \frac{3a}{8}\ (1-2k^4)$

30

(iii) G_1 ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සමපාත විය යුතුය. 5

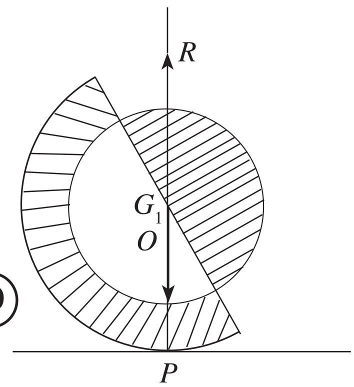
එනම්, $\bar{x}_1 = 0$ විය යුතුයි. 5

$\frac{3a}{8}(1-2k^4) = 0$ 5

$2k^4 = 1$

$k^2 = \pm\ \frac{1}{\sqrt{2}}$ 5

$k^2 > 0$ නිසා $k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$



30

17. (a) $P(A) = 0.1,\quad P(A\cup B) = 0.37$ සහ $P(C) = 0.2$

(i) $P\,(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B)$ 5

(A සහ B ස්වායත්ත නිසා) 5

$0.37 = 0.1 + P(B) - 0.1\,P(B)$

$0.37 - 0.1 = 0.9\,P(B)$ 5

$0.3 = P(B)$

15

(ii) $P(B'\mid A') = \frac{P(B'\cap A')}{P(A')}$ 5

මෙහි $P(B'\cap A') = P[(B\cup A)'] = 1 - P\,(A\cup B)$ 5

$= 1 - 0.37 = 0.63$

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.1 = 0.9$ 5

$\therefore\ P(B'\mid A') = \frac{0.63}{0.9} = 0.7$ 5

20

[19 වන පිටුව බලන්න

(iii) $P(A' \cap B' \cap C) = P(A') P(B') P(C)$ 5

$= 0.9 \times 0.7 \times 0.2$

$= 0.126$ 5

10

(iv) $X : (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$ 5

$P(X) = P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)$

$= P(A)\ P(B')\ P(C') + P(A')\ P(B)\ P(C') + P(A')\ P(B') P(C)$ 5

$= 0.1 \times 0.7 \times 0.8 + 0.9 \times 0.3 \times 0.8 + 0.9 \times 0.7 \times 0.2$ 10

$= 0.398$

20

$\Rightarrow P(A \mid X) = \dfrac{P(A \cap X)}{P(X)}$

$= \dfrac{P(A \cap B' \cap C')}{P(X)}$ 5

$= \dfrac{0.1 \times 0.7 \times 0.8}{0.398}$

$= \dfrac{56}{398}$ 5

$= \dfrac{28}{199}$

10

(b) (i) (α) මධ්‍යන්‍යය $= \dfrac{\sum_{r=1}^{n} x_r}{n}$ 5

ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය $\overline{x} = \dfrac{28 + 56 + 23 + 94 + 8 + 5 + 13 + 846}{28}$ 5

$= \dfrac{1073}{28}$

$= 38.32$ 5

15

(β) 94 සිට ලකුණු 49 දක්වා අඩු වී ඇති බැවින් වෙනස -45 ක් වේ.

05 සිට ලකුණු 50 දක්වා වැඩි වී ඇති බැවින් වෙනස $+45$ ක් වේ. 5

$\therefore$ මධ්‍යන්‍යය වෙනස් නොවේ. 5

10

සම්මත අපගමනය $= \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$ 5

විචලතාවය $= \quad s_x^{\,2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$

$= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^{\,2})}{n}$ 5

$= \dfrac{\sum_{r=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}\,\dfrac{\Sigma x_i}{n} + \overline{x}^{\,2}$

$= \dfrac{\sum_{r=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}^{\,2} + \overline{x}^{\,2}$ 5

$= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^{\,2}$

$X = \{x_1, x_2, ..., x_{20}\}$ සහ $Y = \{y_1, y_2, ..., y_{10}\}$ ලෙස ගනිමු.

$\sum_{i=1}^{20} x_i = 320$ සහ $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 5840$ 5

සහ

$\sum_{i=1}^{10} y_i = 130$ සහ $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 2380$ 5

$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \dfrac{320}{20} = 16$ 5

$s_x^{\,2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2}{20} - 16^2 = \dfrac{5840}{20} - 16^2$

$= 292 - 256 = 36$ 5

$\therefore\ s_x = 6$

$\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = \dfrac{130}{10} = 13$ 5

$s_y^{\,2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{10} y_i^2}{100} - 13^2 = \dfrac{2380}{10} - 169 = 69$

$\therefore\ s_y = 8.30$ 5

$Z = X \cup Y$ ලෙස ගනිමු.

$\overline{z} = \dfrac{\sum_{i=1}^{20} x_i + \sum_{i=1}^{10} y_i}{30}$

$= \dfrac{320 + 130}{30} = 15$ 5

$$s_z^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2 + \sum_{i=1}^{10} y_i^2}{30} - \overline{z}^{\,2}$$ 5

$$= 274 - 225 = 49$$

$$s_z = 7$$ 5

60