22

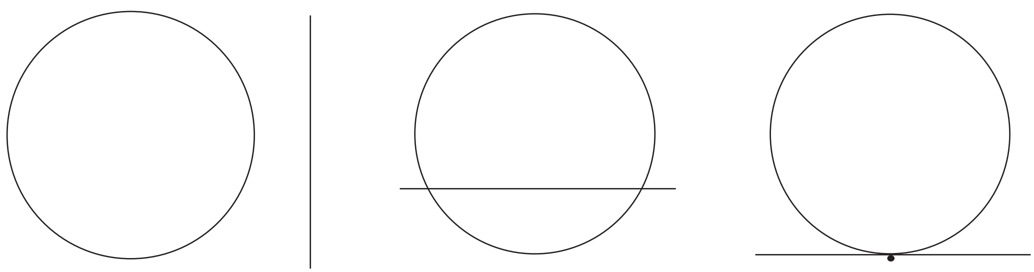
தொடலிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- J¸ Ámhzvß «xÒÍ J¸ ¦ÒÎ º¼¸¢x ÁmhzxUS Áøµ¯¨£mh J¸ öuõh¼ø¯²® Auß £s¦Pø Í²® AÔ¢xöPõÒÁuØS®
- ¦Óz÷u EÒÍ J¸ ¦ÒÎ º¼¸¢x ÁmhzxUS Áøµ¯¨£k® öuõh¼PÎ ß £s¦Pø Í AÔ¢xöPõÒÁxUS®
- ஒன்றுவிட்ட துண்டத்திலுள்ள கோணத்தை அறியவும் அது தொடர்பான பிரசி Ú [Pø Íz wºUPÄ®

÷uøÁ¯õÚ BØÓÀPø Í¨ ö£ÖÃºPÒ.

22.1 தொடலிகள்



E¸ (i) E¸ (ii) E¸ (iii)

E¸ (i) C¾ÒÍ ÁmhzxUS® ÷|º÷PõmkUS® ö£õxÁõÚ ¦ÒÎPÒ CÀø». C¨÷£õx ÷|º÷PõhõÚx ÁmhzxUS¨ ¦Óz÷u Aø©¢xÒÍx.

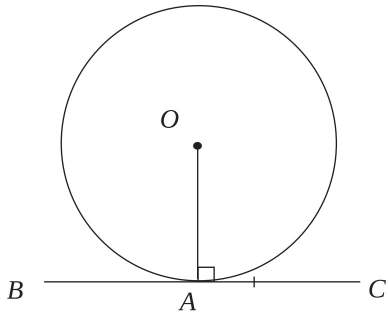
E¸ (ii) CÀ ÷|º÷Põm i ÚõÀ Ámh©õÚx Cµs k ¦ÒÎPÎ À CøhöÁmh¨£kQßÓx. ÷|º÷PõmkUS® ÁmhzxUS® Cµs k ö£õx¨ ¦ÒÎPÒ Es k. C¨÷£õx ÷|º÷PõhõÚx Ámhzvß **இடைவெட்டி** GÚ¨£k®.

E¸ (iii) CÀ ÷|º÷PõmkUS® ÁmhzxUS® J¸ ö£õx¨ ¦ÒÎ ©õzvµ® Es k. C¨÷£õx ÷|º÷PõhõÚx Ámhzøuz öuõkQßÓx GÚU TÓ¨£kÁxhß ÷|º÷PõhõÚx Ámhzvß **தொடலி** GÚ¨£k®

öuõh¼US® ÁmhzxUS® EÒÍ ö£õx¨ ¦ÒÎ **தொடுபுள்ளி** GÚ¨£k®.

ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு

Ámhzvß «xÒÍ J¸ ¦ÒÎ °À BøµUSa ö\[SzuõP Áøµ¯¨£mh ÷Põk £ØÔ¯ Âh¯[PøÍU PØ£uØPõPU R÷Ç²ÒÍ Âh¯[PÎÀ PÁÚzøua ö\¾zx÷Áõ®.



÷©÷»²ÒÍ E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ *O* øÁ ø©¯©õPÄøh¯ J¸ Ámhzvß «xÒÍ J¸ ¦ÒÎ *A* °À Áøµ¯¨£mh Bøµ *OA* BS®. *OA* CØS¨ ¦ÒÎ *A* °À Áøµ¢u ö\[Szx *BC* BS®. C[S *BC* Gß Ý® ÷Põmkz x s h® Ámhzøu *A* °À öuõkQßÓx Gß£x® öuÎ ÁõS®.
AuõÁx,

Ámhzvß «xÒÍ ¦ÒÎ *A* °À Bøµ *OA* °ØSa ö\[SzuõP Áøµ¢u ÷Põmkz x s h® *BC* BÚx CÆÁmhzxUS J¸ öuõk¯õ BS®. C¨÷£ØøÓ J¸ தெற்றமாக இப்போது முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம் : J¸ Ámhzvß «xÒÍ J¸ ¦ÒÎ °Þ hõP BøµUSa ö\[SzuõP Áøµ¯¨£mh ÷Põk Ámhzvß öuõk¯õ BS®.

÷©¾®
AuõÁx Cz÷uØÓzvß ©Öuø»²® Es ø©¯õS®.

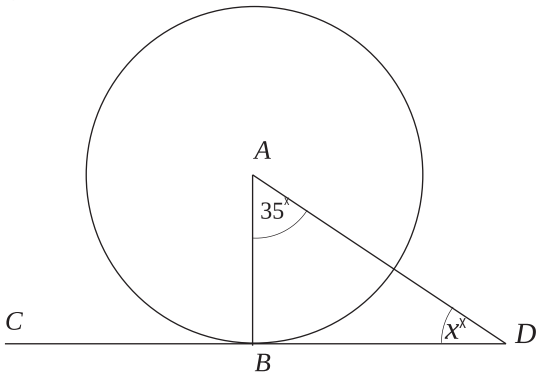
AuõÁx Ámhzvß «xÒÍ G¢uöÁõ¸ ¦ÒÎ °¾® J¸ öuõk¯ø¯ Áøµ¢x öuõk¦ÒÎ °÷»÷¯ Bøµ²® Áøµ²®÷£õx Azöuõk¯²® Bøµ²® JßÖUöPõßÖ ö\[SzuõS®.

இப்பேற்றை ஒரு தேற்றமாக இவ்வாறு முன்வைக்கலாம்.

தேற்றத்தின் மறுதலை : J¸ Ámhzvß «xÒÍ J¸ ¦ÒÎ °À Áøµ¯¨£mh öuõh¼, öuõk¦ÒÎ °À Áøµ¢u BøµUSa ö\[SzuõS®.

உதாரணம் 1

ø©¯® A BPÄøh¯ Ámhvß «x Aø©¢xÒÍ ¦ÒÎ B °À Áøµ¯¨£mh öuõh¼ CD BS®. $B\hat{A}D = 35^\circ$ B°ß x Cß ö£Ö©õÚ® Põs P.



$A\hat{B}D = 90^\circ$ ^J¸ Ámhzvß «xÒÍ J¸ ¦ÒÎ °À Áøµ¯¨£mh öuõh¼¯õÚx öuõk¦ÒÎ °Þ hõP Áøµ¨£mh BøµUSa ö\[Szx Gß£uõÀ&

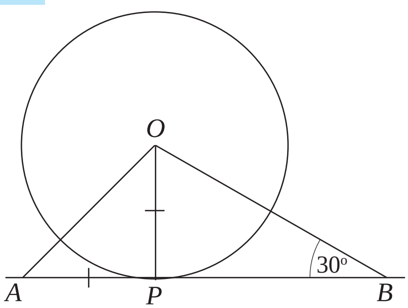
ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° Gß£uõÀ

$$35^\circ + 90^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 35^\circ - 90^\circ$$

$$x = 55^\circ$$

உதாரணம் 2



E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ Ámhzx US P °À Áøµ¯¨£mh öuõh¼ AB B S®. $OP = AP$, $O\hat{B}P = 30^o$ B ° ß $A\hat{O}B$ ° ß ö£Ö©õÚ® Põs P.

$O\hat{P}A = 90^o$ (J¸ Ámhzvß «xÒÍ J¸ ¦ÒÎ °À Áøµ¯¨£mh öuõh¼¯õÚx öuõk¦ÒÎ ° Þ hõP Áøµ¨£mh BøµUSa ö\[Szx Gß£uõÀ)

$OP = AP$ (uµÄ)

$\therefore P\hat{O}A = P\hat{A}O$ (ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரான ÷Põn [PÒ \©ß Gß£uõÀ)

$\Delta\, APO$ ÂÀ

$P\hat{A}O + P\hat{O}A + O\hat{P}A = 180^o$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் TmkzöuõøP 180^o Gß£uõÀ)

$\therefore\ P\hat{A}O + P\hat{O}A + 90^o = 180^o$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 180^o - 90^o$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 90^o$

$\therefore 2\, P\hat{A}O = 90^o$ ($P\hat{A}O = P\hat{O}A$ Gß£uõÀ)

$P\hat{A}O = \frac{90^o}{2}$

$= 45^o$

முக்கோணி AOB

$A\hat{O}B + P\hat{A}O + P\hat{B}O = 180^o$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் TmkzöuõøP 180^o Gß£uõÀ)

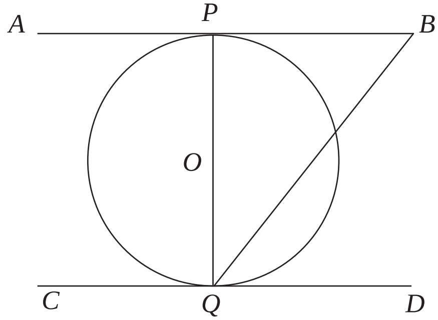
$A\hat{O}B + 45^o + 30^o = 180^o$

$A\hat{O}B + 75^o = 180^o$

$A\hat{O}B = 180^o - 75^o$

$= 105^o$

உதாரணம் 3



PQ GÚ¨£kÁx O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ J¸ Ámhzvß Âmh©õS®. ÁmhzvØS P, Q ஆகியவற்றில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் முறையே AB, CD B S®. $P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ GÚU Põm kP.

J¸ Ámhzvß «xÒÍ J¸ ¦ÒÎ °À Áøµ¯¨£mh öuõh¼¯õÚx öuõk¦ÒÎ ° Þ hõP Áøµ¯¨£mh BøµUSa ö\[Szx Gß£uõÀ

$$Q\hat{P}B = 90^{o} \ ,$$

$$P\hat{Q}D = 90^{o}$$ B S®.

$$\therefore \ Q\hat{P}B + P\hat{Q}D = 90^{o} + 90^{o}$$

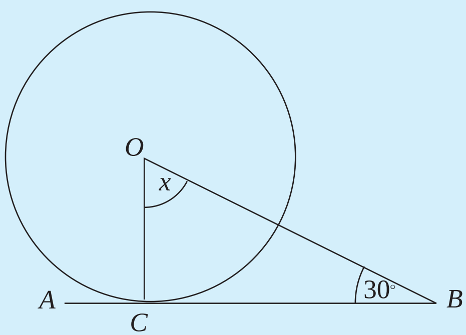
$$= 180^{o}$$

$\therefore$ $AB \,//\, CD$ (நேயக் கோணங்களின் மிகை நிரப்பிகள் என்பதால்)

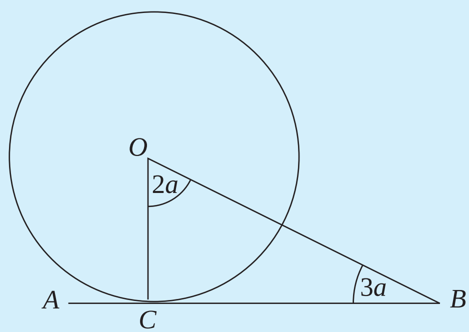
$\therefore$ $P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ ($AB \,//\, CD$ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

பயிற்சி 22.1

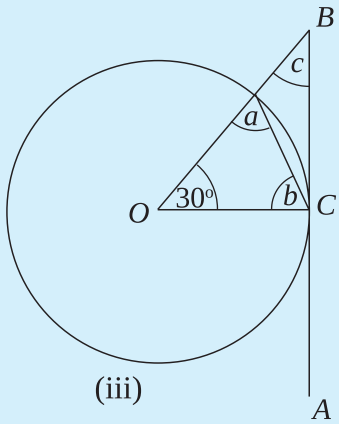
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் O Ä® AB Gß£x Ámhzvß «xÒÍ ¦ÒÎ C °À Áøµ¯¨£mh öuõh¼²©õS®. uµ¨£mkÒÍ uµÄPÎß£i Am\µP o uU SÔ±kPÎ ÚõÀ uµ¨£k® ö£Ö©õÚ® Põs P.



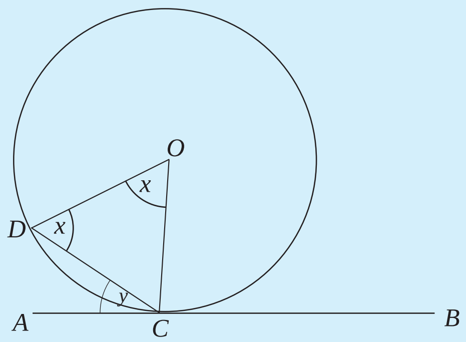
(i)



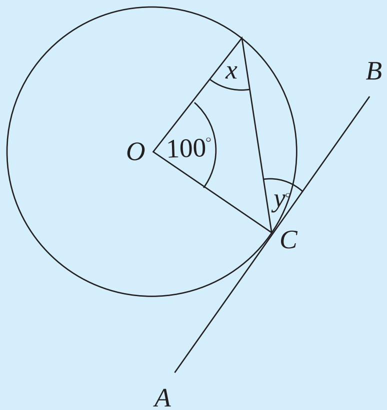
(ii)



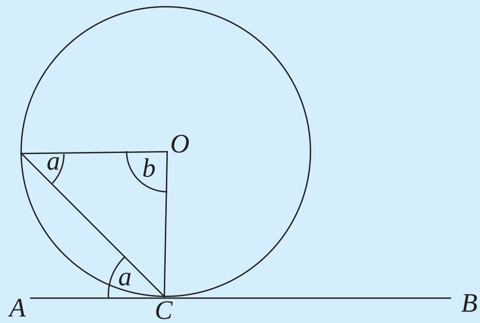
(iii)



(iv)

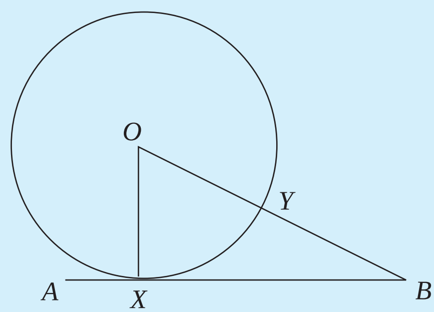


(v)

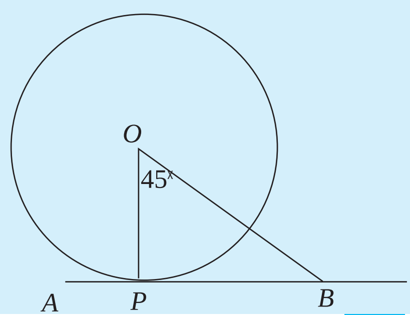


(vi)

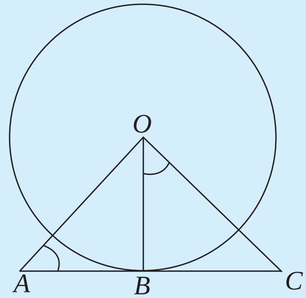
2. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ Ámhzvß Aø©¢xÒÍ ¦ÒÎ X CÀ Áøµ¯¨£mh öuõh¼ AB BS®. ÷Põk OB °ÚõÀ Ámh©õÚx ¦ÒÎ Y °À Cøh öÁmh¨£kQßÓx. Ámhzvß Bøµ 6 cm , YB = 4 cm B°ß XB °ß }ÍzøuU Põs P.



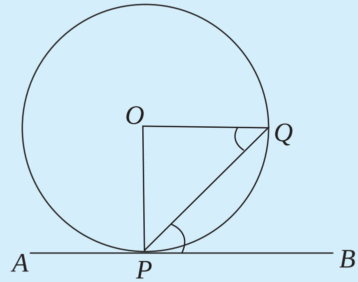
3. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ ÁmhzxUS P °À Áøµ¯¨£mh öuõh¼ AB E® $B\hat{O}P = 45^{x}$ E® PB = 6 cm E® B°ß Ámhzvß Bøµø¯U Põs P.



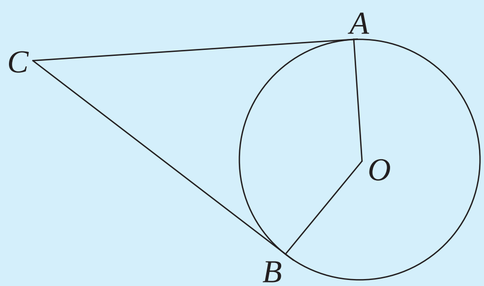
4. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ J¸ ÁmhzxUS ¦ÒÎ B °À Áøµ¢u öuõh¼ AC BS®. $O\hat{A}B = B\hat{O}C$ B°ß $A\hat{O}B = B\hat{C}O$ GÚU PõmkP.



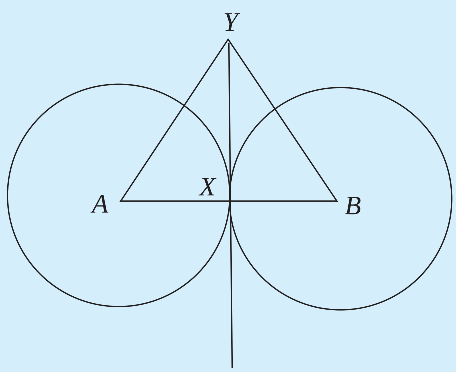
5. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ Ámhzv¾ÒÍ ¦ÒÎ P °À Áøµ¯¨£mh öuõh¼ AB BS®' $O\hat{Q}P = Q\hat{P}B$ BS©õÖ ¦ÒÎ Q BÚx Ámhzvß «x Aø©¢uÒÍx. OQ ö\[Szx PO GÚU PõmkP.



6. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ Ámhzvß «xÒÍ A, B BQ¯ ¦ÒÎPÎÀ Áøµ¯¨£mh öuõh¼PÒ ¦ÒÎ C °À JßøÓö¯õßÖ CøhöÁmkQßÓÚ. $AOBC$ J¸ Ámh |õØ£UPÀ GÚU PõmkP.



7. E¸ÂÀ A, B BQ¯ÁØøÓ ø©¯[PÍõPÄøh¯ \©ÚõÚ BøµPøÍU öPõsh Cµsk Ámh[PÒ uµ¨£mkÒÍÚ. ¦ÒÎ Y BÚx $AY = YB$ BS©õÖ Aø©¢xÒÍx. ÷Põk YX BÚx Cµsk வட்டங்களுக்கும் பொதுத் தொடலி BQßÓöuÚU PõmkP.

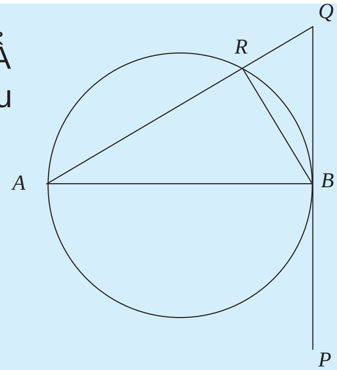


8. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ ÁmhzvÀ AB BÚx J¸ÂmhÁ©õÁxhß PQ BÚx ¦ÒÎ B °À Ámhzøuz öuõkQßÓx. AQ BÚx Ámhzøu R CÀ \¢vUQßÓx.

(i) $Q\hat{R}B = 90°$ GÚÄ®

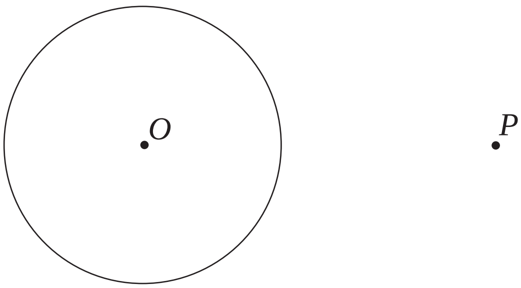
(ii) $A\hat{B}R = R\hat{Q}B$ GÚÄ®

{ÖÄP.

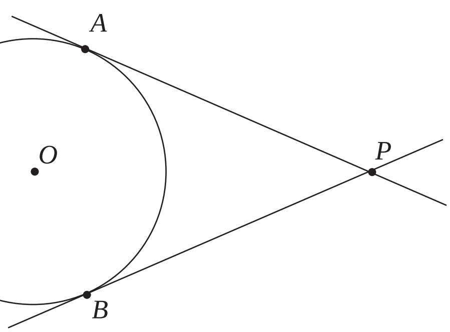


22.2 ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள்

O øÁ ø©¯©õPøh¯ ÁmhzxUS¨ ¦Óz÷u Aø©¢xÒÍ ¦ÒÎ P ø¯U P¸x÷Áõ®.

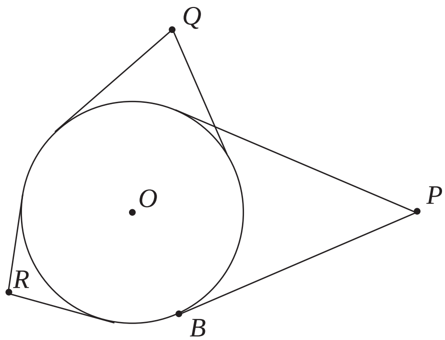


C¨¦ÒÎ P °ØThõP Ámhzøuz öuõkQßÓ Cµsk ÷PõkPøÍ Áøµ¯»õ®. AÆÁõÖ Áøµ¯¨£mkÒÍ Cµsk ÷PõkPÒ E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍÚ.



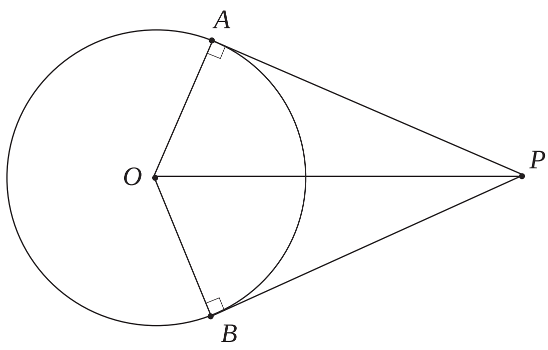
இந்த இரண்டு தொடலிகளும் புறப்புள்ளி P °¼¸¢x ÁmhzxUS Áøµ¯¨£mh öuõh¼PÒ GÚ AøÇUP¨£k®.

¦ÒÎ P ஆனது வட்டத்துக்கு புறத்தே எங்கே அமைந்திருப்பினும் இவ்வாறானத் தொடலிச் சோடியொன்றை வரைய முடியும் என்பதை விளங்கிக் கொள்க. கீழேயுள்ள E¸ÂÀ P, Q, R BQ¯ ‰ßÖ ¦ÒÎPÎ¼¸¢x Áøµ¯¨£mh ‰ßÖ ÷\õi z öuõh¼PÒ uµ¨£mkÒÍÚ.



¦Óz÷u EÒÍ J¸ ¦ÒÎ °¼¸¢x J¸ ÁmhzxUS CÆÁõÖ J¸ சோடி தொடலிகளை வரையும்போது பெறப்படும் உருவிலுள்ள கேத்திரகணிதப் £s¦Pøͨ £ØÔ C¨÷£õx Bµõ´÷Áõ®.

öuõh¼PÒ Cµs øh²® AP, BP GÚU SÔzx BøµPÍõÚ OA, OB BQ¯ÁØøÓ²® ÷Põmkz xsh® OP I²® Áøµ÷Áõ®.



÷©÷» £Sv 22.1 CÀ PØÓuØ÷PØ£z öuõh¼²® öuõk¨¦ÒÎ °À Áøµ¢u Bøµ²® JßÖUöPõßÖ ö\[SzuõÚøÁ Gß£uõÀ Ax £ØÔ E¸ÂÀ SÔUP¨£mkÒÍx.

இவ்வுருவிலுள்ள முக்கோணிகளான OAP, OBP BQ¯ÁØøÓ ÷|õUS®÷£õx சமச்சீரின்படி அவை ஒருங்கிசைகின்றன என்பதை ஊகிக்க முடியும். உண்மையிலேயே

அவை ஒருங்கிசைகின்ற முக்கோணி என்பதை இலகுவாக நிறுவலாம். அந்நிறுவலைச் செய்யும் முறையைப் பற்றி முதலில் விளங்கிக் கொள்வோம். அதற்கு அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் செங்கோண முக்கோணிகள் என்பதை முதலில் அவதானிக்கவும். இதற்கேற்ப ஒரு முக்கோணியின் செம்பக்கத்தையும் இன்னொரு பக்கத்தையும் மற்றைய முக்கோணியின் செம்பக்கத்துக்கும் மற்றுமொறு பக்கத்துக்கும் \©öÚÚU Põmk Áuß ‰»® ö\. £.£. GßÓ \¢uº¨£zvß RÌ C¢{ÖÁø»a செய்யலாம். இரண்டு முக்கோணிகளின் செம்பக்கம் OP Gß Ý®ö£õx¨ £UP©õS®. ÷©¾® OA, OB என்பன ஆரைகள் என்பதால் அப்பக்கங்களும் சமனானவை ஆகும். இதற்கேற்ப இரண்டு முக்கோணிகளும் சமனானவை ஆகும். அதற்கேற்ப இரண்டு முக்கோணிகளும் செ.ப.ப என்னும் சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைகின்றன. அவ்வாறு ஒருங்கிசைந்த பின்னர் ஒத்த உறுப்புகள் சமனாவதால்,

(i) $AP = BP$ ஆகும். அதாவது இரண்டு தொடலிகளும் நீளத்தில் சமனானவை.

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ ஆகும். அதாவது இரண்டு தொடலிகளுக்கும் இடையிலுள்ள ÷Põn® C¸\©TÔkQßÓÚ.

(iii) $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ BS®. AuõÁx öuõh¼PÒ ø©¯zvÀ \©ÚõÚ ÷Põn [Pø Í GvµøUQßÓÚ.

C[S |õ® Pµ»¢x øµ¯õi¯ Âh¯[PÒ J¸ ÷uØÓ©õPU R÷Ç uµ¨£mkÒ Íx.

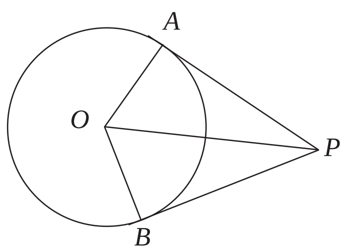
தேற்றம் : ¦Ó¨ ¦ÒÎ ö¯õßÔ¼¸¢x J¸ ÁmhzvØS Cµsk öuõh¼PÒ Áøµ¯¨£i ß

(i) இரண்டு தொடலிகளும் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும்.

(ii) ¦Ó¨ ¦ÒÎ ø¯²® Ámhzvß ø©¯zøu²® Cøn US® J¸ ÷Põk இரண்டு தொடலிகளுக்கும் இடையிலான கோணத்தை இருசமகூறிடும்.

(iii) öuõh¼PÒ ø©¯zvÀ \©ÚõÚ ÷Põn [Pø Í GvµøUS®

இத்தேற்றத்தை முறையாக நிறுவும் முறையை ஆராய்வோம்.



uµÄ : O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ ÁmhxUS¨ ¦Ó¨¦ÒÎ P °¼¸¢x A, B BQ¯ புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் முறையே AP, BP BS®.

{ÖÁ ÷Á s i¯x :

(i) $AP = BP$

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$

(iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$

{ÖÁÀ : $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^{\circ}$ (öuõh¼ B øµUSa ö\ [Szx Gß£uõÀ)

$\therefore$ POA, POB ஆகிய முக்கோணிகள் செங்கோண முக்கோணிகள் B S®.

C Û POA, POB ஆகிய முக்கோணிகளில்

$OA = OB$ (J÷µ Ámhzv ß B øµPÒ)

OP ö£õx¨ £UP®.

$\therefore$ $\Delta POA \equiv \Delta POB$ (ö\.£.£.)

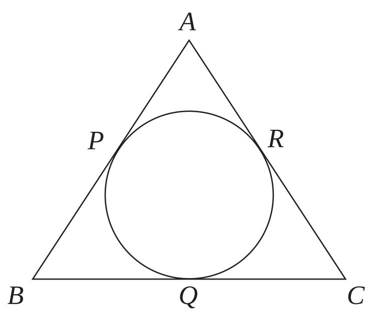
ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளில் ஒத்த உறுப்புகள் சமனாகும்.

$\therefore$ (i) $AP = BP$

$\therefore$ (ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$

$\therefore$ (iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$

உதாரணம் 1



உருவிலுள்ள வட்டத்தை முக்கோணி ABC ° ß £UP [PÒ P, Q, R B Q¯ ¦Ò Î P Î À öuõ kQ ßÓÚ. $AB = 11$ cm, $CR = 4$ cm ஆயின் முக்கோணி ABC ° ß _ØÓÍ ø ÁU Põ s P.

¦Ó¨ ¦Ò Î ö¯õßÔ¼¸¢x J¸ Ámhx US Cµ s k öuõh¼PÒ Áøµ¯¨£k® ÷£õx öuõh¼PÒ } Í zvÀ \©ÚõÚ ø Á B S®.

$\therefore$ $AP = AR$ E®

$BP = BQ$ E®

$CR = CQ$ E® B S®.

முக்கோணி ABC ° ß _ØÓ Í Ä $= AB + BC + CA$

$= 11 + (BQ + QC) + (CR + RA)$

$= 11 + (BP + CR) + (4 + AP)$

$= 11 + (BP + 4) + (4 + AP)$

$= 19 + (BP + AP)$

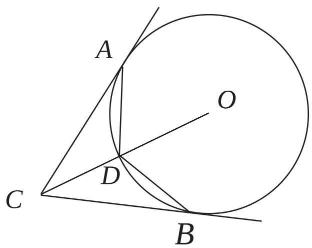
$= 19 + AB$

$= 19 + 11$

$= 30$

$\therefore$ முக்கோணி ABC ° ß _ØÓ Í Ä 30 cm B S®.

உதாரணம் 2



E¸ ÂÀ uµ¨£mkÒ Í ÁmhzxUS ¦Óz÷u Aø©¢xÒ Í ¦Ò Î C °¼¸¢x Áøµ¯¨£mh öuõh¼PÒ A, B BQ¯ ¦Ò Î P Î À Ámhzøu öuõkQßÓÚ. Ámhzv ß ø©¯® O øÁ²® C ø¯²® C ø n US® ÷Põk D °À Ámhzøu öÁmkQßÓx. $AD = BD$ GÚU Põm k P.

ACD, BCD ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளையும் ஒருங்கிசையச் செய்வதன் மூலம் ÷uøÁ¯õÚ Âøhø¯¨ ö£Ó»õ®.

ACD, BCD ஆகிய முக்கோணிகளில்

$AC = BC$ (J¸ ¦Ó¨ ¦Ò Î °¼¸¢x J¸ ÁmhzvØS Cµs k öuõh¼PÒ Áøµ¯¨£i ß Azöuõh¼PÒ } Í zvÀ \©ÚõÚøÁ)

$A\hat{C}O = B\hat{C}O$ (J¸ ¦Ò Î °¼¸¢x J¸ ÁmhzvØS Cµs k öuõh¼PÒ Áøµ¯¨£i ß ¦Ó¨ ¦Ò Î ø¯²® Ámhzv ß ø©¯zøu²® இணைக்கும் நேர்கோட்டினால் தொடலிகளுக்கும் இடையிலான ÷Põn® C¸ \©TÒh¨£k®.)

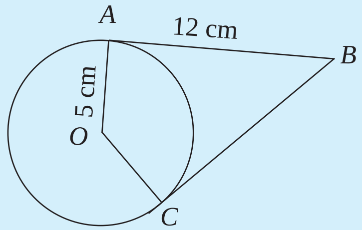
CD ö£õx£UP®

$\therefore \Delta ACD \equiv \Delta BCD$ (£.÷Põ.£.)

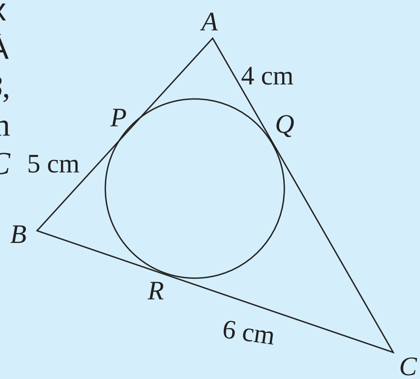
$\therefore AD = BD$ (ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளில் ஒத்த பக்கங்கள் சமன் Gß£uõÀ)

பயிற்சி 22.2

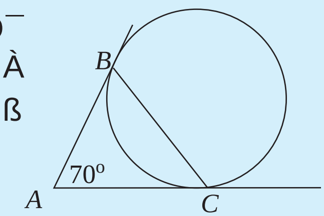
1. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ Ámhzvß «xÒÍ *A*, *C* BQ¯ ¦ÒÎPÎÀ Áøµ¯¨£mkÒÍ öuõh¼PÒ *B* °À CøhöÁmkQßÓÚ. Ámhzvß Bøµ 5 cm E® *AB* = 12 cm E® B°ß |õØ£UPÀ *ABCO* Âß _ØÓÍøÁU Põs P.



2. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ Ámhzvß «x Aø©¢xÒÍ *P*, *Q*, *R* BQ¯ ¦ÒÎPÎÀ வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் முறையே *AB*, *AC*, *BC* BS®' *RC* = 6 cm E® *BP* = 5 cm E® *AQ* = 4 cm உம் ஆகும். முக்கோணி *ABC* Cß _ØÓÍøÁU Põs P.

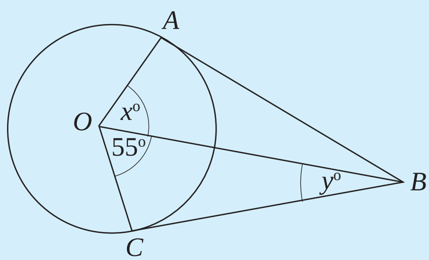


3. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ Ámhzvß «xÒÍ *B*, *C* BQ¯ ¦ÒÎPÎÀ Áøµ¯¨£mh öuõh¼PÒ *A* CÀ CøhöÁmkQßÓÚ. $B\hat{A}C = 70^o$ B°ß $A\hat{B}C$ Cß ö£Ö©õÚ® Põs P.

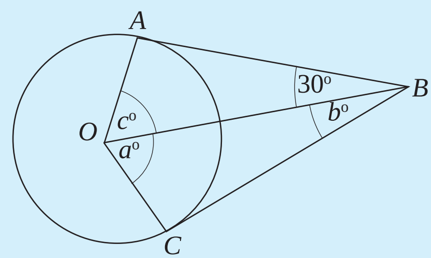


4. R÷Ç uµ¨£mkÒÍ JÆöÁõ¸ ÁmhzvÚx® ø©¯® *O* E® ÁmhzvÀ EÒÍ *A*, *C* BQ¯ ¦ÒÎPÎ¼¸¢x Ámhzv¾S Áøµ¯¨£mh öuõh¼PÒ ¦ÒÎ *B* யில் சந்திக்கின்றன. தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் அட்சரகணிதக் குறியீடுகளினால் Põmh¨£k® ÷Põn [PÎß ö£Ö©õÚ [PøÍU Põs P.

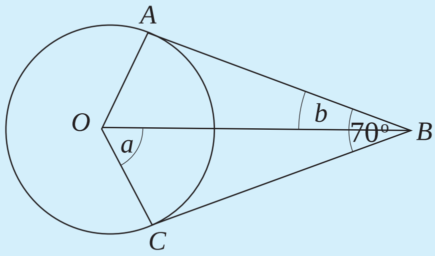
(i)



(ii)

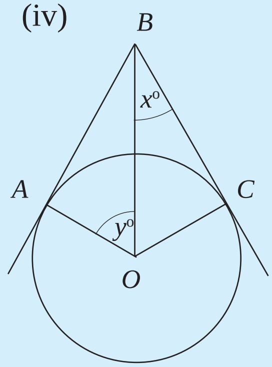


(iii)



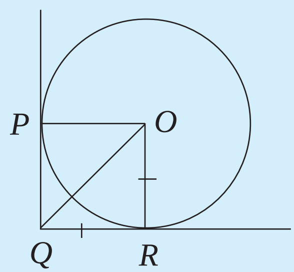
$A\hat{B}C = 70^\circ$

(iv)



$A\hat{O}C = 110^\circ$

5. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ *O* øÁ ø©¯©õPÄøh¯ ÁmhzvÀ *P*, *R* BQ¯ ¦ÒÎPÎÀ Áøµ¯¨£mkÒÍ öuõh¼PÒ *Q* ÂÀ \¢vUQßÓÚ. $QR = OR$ B° ß *PQRO* Gß£x J¸ \xµ® GÚU Põm kP.

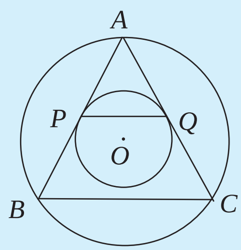


6. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ *O* øÁ ø©¯©õPÄøh¯ Ámhzvß *A*, *B*, *C* BQ¯ ¦ÒÎPÒ Aø©¢xÒÍÚ. Ámhzvß EÒ÷Í *O* øÁ ø©¯©õPU öPõs k Aø©¢xÒÍ]Ô¯ Ámh©õÚx *P*, *Q* BQ¯ ¦ÒÎPÎÀ *AB*, *AC* BQ¯ÁØøÓz öuõkQßÓx.

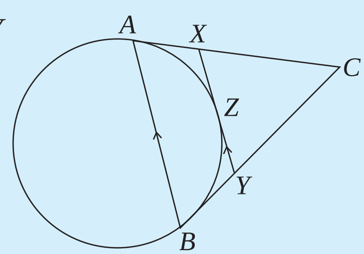
(i) *APQ* ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி எனவும்

(ii) $BC \parallel PQ$ GÚÄ®

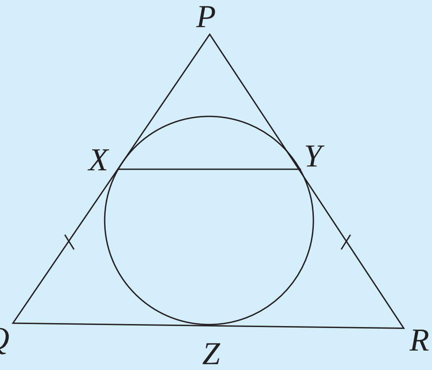
Põm kP.



7. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ uµÄPÐU÷PØ£ $XC = CY$ GÚU Põm kP'

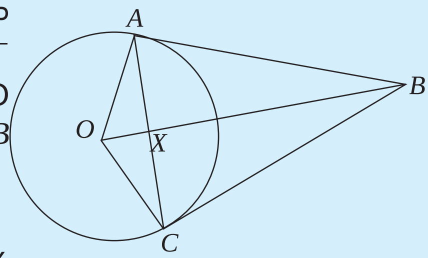


8. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ ÁmhzxUS P C¼¸¢x Áøµ¯¨£mh öuõh¼PÒ X , Y BQ¯ ¦ÒÎPÎÀ Ámhzøuz öuõkQßÓÚ. $XQ = YR$ BS©õÖ Áøµ¯¨£mh ÷|º÷Põk QR BÚx Ámhzøu Z CÀ öuõkQßÓx.



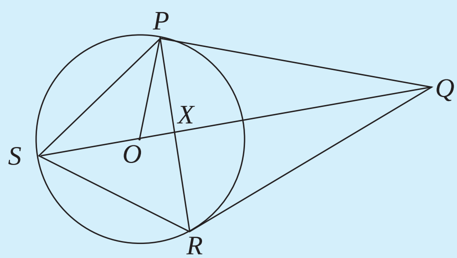
(i) $PR = PQ$ GÚÄ®
(ii) $QR = XQ + YR$ GÚÄ®
(iii) $XY \,//\, QR$ GÚÄ®
PõmkP'

9. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ O øÁ ø©¯©õP Äøh¯ Ámhzvß «xÒÍ A, C BQ¯ ¦ÒÎPÎÀ Áøµ¯¨£mh öuõh¼PÒ Jßøóö¯õßÖ B °À \¢vUQßÓx. OB BÚx AC ø¯ X CÀ \¢vUQßÓx.



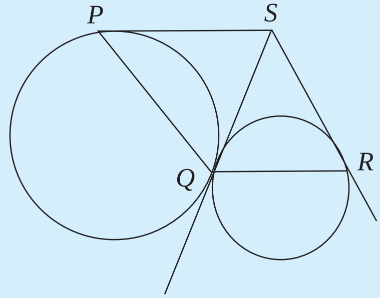
(i) $\Delta OAX \equiv \Delta OCX$ GÚÄ®
(ii) ÷Põk OB BÚx AC °ß ö\[Szx C¸\©TÓõUQ GÚÄ®
(iii) $A\hat{O}C = 2\,A\hat{C}B$ GÚÄ®
PõmkP.

10. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ O øÁ ø©¯©õP Äøh¯ ÁmhzxUS Q Â¼¸¢x Áøµ¯¨£mh öuõh¼PÒ PQ, QR BS®. }mh¨£mh ÷Põk QO BÚx Ámhzøu S CÀ \¢vUQßÓx. PR E® SQ Ä® X CÀ \¢vUQßÓÚ.



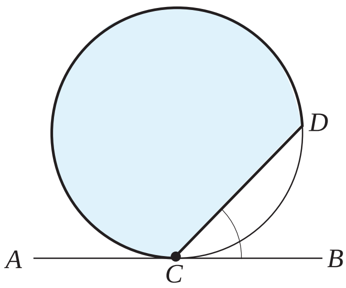
(i) $\Delta PQS \equiv \Delta QRS$ GÚÄ®
(ii) $2\,O\hat{P}X = P\hat{Q}R$ GÚÄ®
PõmkP.

11. E¸Â¾ÒÍ C¿sk Ámh[PÐ® Q ÂÀ öÁÎ¨¦Ó©õP öuõkQßÓÚ. QS BÚx ö£õxz öuõh¼¯õS®. S CÀ C¸¢x C¸ Ámh[PÐUS® Áøµ¯¨£mh ©Ø øÓ¯ öuõh¼PÒ P, R CÀ Ámhzøuz öuõkQßÓÚ.
(i) $PS = SR$ GÚÄ®
(ii) $P\hat{Q}R = S\hat{P}Q + S\hat{R}Q$ GÚÄ®
PõmkP.



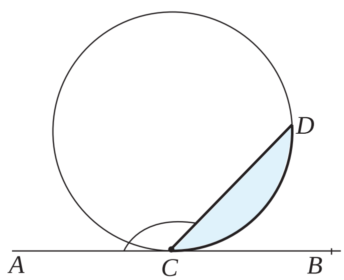
22.3 ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்

முதலில் ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணம் என்பதால் கருதப்படுவது யாதென்பதை Bµõ´ ÷Áõ®. CuØS R÷Ç²ÒÍ E¸Â ß «x PÁÚzøua ö\¾zx÷Áõ®.



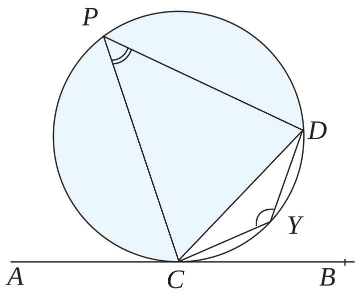
E¸Â¾ÒÍ ÁõÖ ÷|º÷Põk *AB* BÚx Ámhzøu *C* °À öuõkQßÓx. *CD* J¸ |õs BS®. *CD* என்னும் நாணின் மூலம் வட்டம் இரண்டு வட்டத் துண்டங்களாப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒரு துண்டம் உருவில் நீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டுள்ளப் பகுதியாகும். மற்றைய துண்டம் அவ்வாறு நிழற்றப்படாத சிறிய பகுதியாகும். öuõh¼ *AB* °ß «x |õs *CD* °ÚõÀ Cµsk ÷Põn [PÒ E¸ÁõQßÓÚ. J¸ ÷Põn® $A\hat{C}D$ BS®. ©ØøÓ¯x $B\hat{C}D$ BS®. *BCD* ÷Põn zxUS Jzu, ஒன்றுவிட்ட துண்டமாக குறிப்பிடப்படுவது நீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டள்ள Ámhzx s h©õS®. $B\hat{C}D$ GßÝ® CU÷Põn ©õÚx Aø©¢v¸¨£x ©ØøÓ¯ Ámhzx s hzvÝÒ Gß£øu AÁuõÛUP. AÆÁõ÷Ó ÷Põn® $A\hat{C}D$ CØS ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட துண்டமாகக் குறிப்பிடப்படுவது நிழற்றப்படாத மற்றைய வட்டத் xs h©õS®. $A\hat{C}D$ GßÝ® APU ÷Põn® Aø©¢v¸¨£x ©ØøÓ¯ ^}» நிறமுடையக் Ámhz xs hzvÀ Gß£øu²® AÁuõÛUP'

R÷Ç uµ¨£mkÒÍ E¸ÂÀ ÷Põn® $A\hat{C}D$ CØS Jzu JßÖÂmh Ámhz xs h® C Í }» {ÓzvÚõÀ {ÇØÓ¨£mkÒÍx.



ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டத்தின் கோணங்கள்

R÷Ç uµ¨£mkÒÍ E¸øÁ¨ £õºUP. $C\hat{P}D$ அமைந்திருப்பது இளநீல நிறமுடைய ö£›¯ Ámhz x s hzv»õS®. AuõÁx ÷Põn [PÒ $C\hat{P}D$, $D\hat{C}B$ BQ¯Ú JßÖUöPõßÖ GvµõÚ Ámhz x s hzv»õS®. AuõÁx ÷Põn [PÒ $C\hat{Y}D$, $A\hat{C}D$ ஆகிய கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று எதிரான வட்டத் துண்டங்களில் Aø©¢xÒÍÚ.

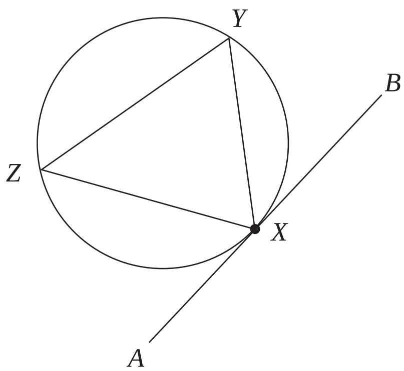


ஒரு வட்டத்தின் தொடலிகள் தொடர்பாக மிகமுக்கியமான ஒரு பேறு உண்டு. A¨÷£ÔÚõÀ TÓ¨£kÁx ÷©ØSÔzu E¸Âß£i $D\hat{C}B$, $C\hat{P}D$ BQ¯ ÷Põn [PÒ \©ß Gß£x® $A\hat{C}D$, $C\hat{Y}D$ BQ¯ ÷Põn [PÒ \©ß Gß£x® BS®. ÷ÁöÓõ¸ Âu©õPU TÖÁuõ°ß J¸ Ámhzvß öuõh¼US® öuõk¦Òΰ À வரையப்பட்ட வட்டத்துண்டத்திலுள்ள கோணத்துக்குச் (அதாவது அந்நாணினால் JßÖÂmh Ámhzx s hzvÀ Gvµø©UP¨£k® ÷Põn zxUS) \©ÚõS®. இப்பேறானது மிக முக்கியமானது என்பதால் அதனை ஒரு தேற்றமாகக் கூறி நினைவில் øÁzv¸¨÷£õ®.

தேற்றம் : J¸ ÁmhzxUS Áøµ¢u öuõh¼US® öuõk¦Òΰ À Áøµ¢u |õq US® Cøh°¾ÒÍ ÷Põn® JßÖÂmh Ámhzv¾ÒÍ ÷Põn zvØSa \©ÚõS®.

Cz÷uØÓzvß Es ø©ø¯ EÖv¨£kzxÁuØPõPU R÷Ç ²ÒÍ ö\¯Ø£õkPΰÀ Dk£kP.

செயற்பாடு 1



2 J¸ Ámh® Áøµ¢x Auß «x J¸ ¦ÒÎ ø¯U SÔzx AuøÚ X GÚ¨ ö£¯›kP.

2 ¦ÒÎ X CÀ Ámhzøuz öuõk® J¸ ÷|º÷Põmøh Áøµ¢x (X CÀ ÁmhzxUS Kº B øµø¯ Áøµ¢x AuØSa ö\[SzuõP X CÀ J¸ ÷|º÷Põk ÁøµÁuß ‰»® CuøÚa ö\´¯»õ®.) AuøÚ AB GÚ¨ ö£¯›kP.

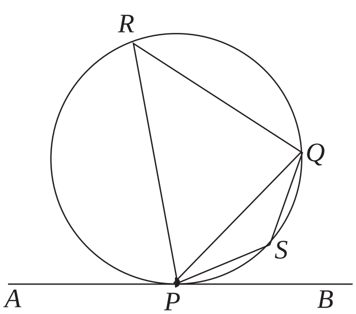
2 Ámhzvß «x ÷©¾® Cµs k ¦ÒÎPøÍU SÔzx AÁØøÓ Y, Z GÚ¨ ö£¯›kP.

2 E¸ Â¾ÒÍÁõÖ X, Y, Z BQ¯ ¦ÒÎPøÍ CønUP.

2 £õøP©õÛ ø¯¨ £¯ß£kzv $B\hat{X}Y$ ©ØÖ® AuØS Jzu, JßÖÂmh Ámhx sh©U ÷Põn ©õQ¯ $X\hat{Z}Y$ Cß ö£Ö©õÚ[Pø Í AÍ¢x AøÁ சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

2 AÆÁõ÷Ó $A\hat{X}Z$ ©ØÖ® AuØS Jzu, JßÖÂmh Ámhz xs h©U ÷Põn ©õQ¯ $X\hat{Y}Z$ Cß ö£Ö©õÚ[Pø Í AÍ¢x AøÁ \©ÚõQßÓÚÁõ என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

செயற்பாடு 2

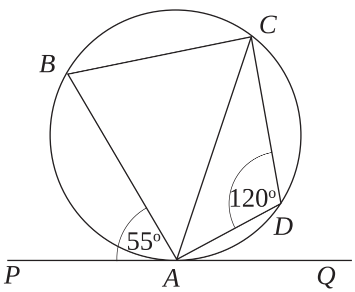


2 J¸ Ámh® Áøµ¢x Auß «x J¸ ¦ÒÎ ø¯U SÔzx AuøÚ P GÚ¨ ö£¯›kP. ¦ÒÎ P CÀ Ámhzøuz öuõk® J¸ ÷|º÷Põmøh Áøµ¢x ^P °À Jº B øµø¯ Áøµ¢x AuØSa ö\[SzuõP P °À J¸ ÷Põmøh ÁøµÁuß ‰»® Cuøa ö\´¯»õ® & AuøÚ AB GÚ¨ ö£¯›kP.

² ¦ÒÎ P °¼¸¢x J¸ |õø n Áøµ¢x AuøÚ PQ GÚ¨ ö£¯›kP.
² |õs PQ Âß C¸£UP[PÎ¾® Aø©²©õÖ Ámhzvß «x Cµs k ¦ÒÎPø ÍU SÔzx R, S GÚ¨ ö£¯›kP.
² QR, QS, PS, PR BQ¯ ÷Põmkz x s h[Pø Í ÁøµP.
² £õøP©õÛ ø¯¨ £¯ß£kzv $B\hat{P}Q$ ©ØÖ® AuØS Jzu JßÖÂmhz x s hU ÷Põ n ©õÚ $P\hat{R}Q$ BQ¯ÁØÔß ö£Ö©õÚ[Pø Í AÍ¢x AøÁ சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.
² AÆÁõ÷Ó, $A\hat{P}Q$ ©ØÖ® AuØS Jzu JßÖÂmh x s hU ÷Põ n ©õQ¯ $P\hat{S}Q$ BQ¯ÁØÔß ö£Ö©õÚ[Pø Í AÍ¢x AøÁ \©ÚõQßÓÚÁõ GÚ ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

J¸ Ámhzvß öuõh¼US® öuõk¦ÒÎ °¾ÒÍ |õ qUS® Cøh°¾ÒÍ ÷Põ n ©õÚx JßÖÂmh Ámhz x s hU ÷Põ n zxUSa \©ÚõQßÓx Gß£øu ÷©ØSÔzu ö\¯Ø£õmi ß ‰»® Â Í [QU öPõ s i ¸¨¥ºPÒ.

உதாரணம் 1



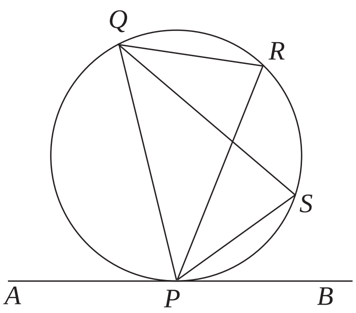
÷©÷» Põmh¨£mkÒÍ E¸ÂÀ ÷Põk PQ BÚx Ámhzøu A °À öuõkQßÓx. ÷©¾® B, C, D ஆகிய புள்ளிகளும் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன.
$P\hat{A}B = 55^{\circ}$ ²® $A\hat{D}C = 120^{\circ}$ ²® BS®. $B\hat{A}C$ Cß ö£Ö©õÚ® Põ s P.
முதலில் $P\hat{A}C$ ö£Ö©õÚ® Põ s ÷£õ®.

$P\hat{A}C = A\hat{D}C$ (JßÖÂmh Ámhz x s hU ÷Põ n [PÒ)

$$P\hat{A}B + B\hat{A}C = 120^{\circ}$$
$$55^{\circ} + B\hat{A}C = 120^{\circ}$$
$$B\hat{A}C = 120^{\circ} - 55^{\circ}$$
$$= 65^{\circ}$$

உதாரணம் 2

÷|º÷Põk AB BÚx Ámhzøu P °À öuõkQßÓx. Q Ä® R E® ÁmhzvÀ Aø©¢xÒÍÚ. ÷Põn® $P\hat{Q}R$ Cß C¸\©TÓõUQ Ámhzøu S CÀ \¢vUQßÓx. PS BÚx $B\hat{P}R$ Cß C¸\©TÓõUQ GÚU Põm kP.



$B\hat{P}S = P\hat{Q}S$ (JßÖÂmh Ámhz x s hU ÷Põ n [PÒ)

$R\hat{P}S = R\hat{Q}S$ (J÷µ x s hU ÷Põ n [PÒ)

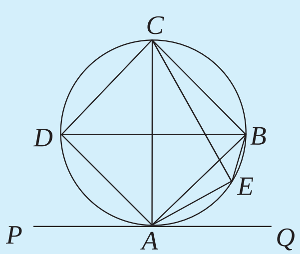
$P\hat{Q}S = R\hat{Q}S$ (uµÄ QS BÚx $P\hat{Q}R$ CÀ C¸\©TÓõUQ)

$\therefore\ B\hat{P}S = R\hat{P}S$

$\therefore$ PS BÚx $B\hat{P}R$ Cß C¸\©TÓõUQ¯õS®.

பயிற்சி 22.3

1. ÷Põk PQ BÚx ¦ÒÎ A °À Ámhzøuz öuõkQßÓx. B, C, D, E BQ¯ ¦ÒÎPÒ Ámhzvß «x Aø©¢xÒÍÚ.



öuõh¼US® |õ q US® Cøh° ¾Ò Í ÷Põ n®	JßÖÂmh x s hU ÷Põ n [PÒ
$B\hat{A}Q$	....
$P\hat{A}B$	....
$P\hat{A}D$	....
$E\hat{A}Q$	....
....	$D\hat{B}A$
....	$D\hat{C}A$

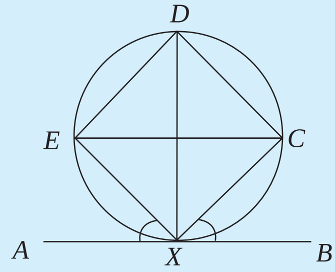
4. AB BÚx ¦ÒÎ X CÀ ÁmhzxUS Áøµ¯¨£mh öuõh¼ BS®. C, E BQ¯ ¦ÒÎPÒ $B\hat{X}C = A\hat{X}E$ BS©õÖ ÁmhzvÀ Aø©¢xÒÍÚ D Gߣx Ámhzvß «xÒÍ Cß Ýö©õ¸ ¦ÒÎ¯õS®.

(i) XD BÚx $E\hat{D}C$ ° ß ÷Põn C¸\©TÓõUQ GÚÄ®

(ii) $EX = CX$ GÚÄ®

(iii) AB // EC GÚÄ®

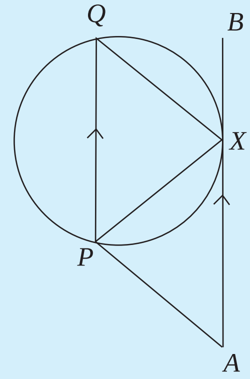
PõmkP.



5. ÷Põk AB BÚx Ámhzøu X öuõkQßÓx. PQ // AB BS©õÖ |õs PQ Áøµ¯¨£mkÒÍx.

(i) $B\hat{X}Q = A\hat{X}P$ GÚ {ÖÄP.

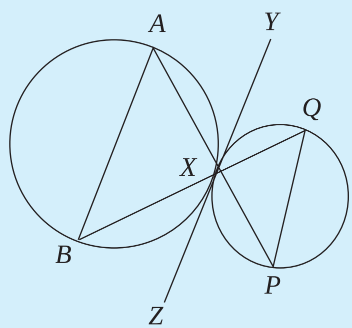
(ii) $PX = PA$ B°ß $AXQP$ Kº Cøn Pµ® GÚU PõmkP.



6. Cµs k Ámh[PÒ öÁÎ¨ ¦Ó©õP ¦ÒÎ X CÀ öuõkQßÓÚ. YZ BÚx ö£õxz öuõh¼ BS®. AB BÚx J¸ Ámhzvß |õs BS®. }mh¨£mh AX, BX BQ¯øÁ ©Ø øÓ¯ வட்டத்தை முறையே P, Q GߣÁØÔÀ \¢vUQßÓÚ.

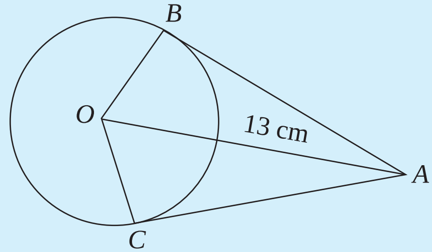
(i) $B\hat{X}Z = X\hat{P}Q$ GÚU PõmkP.

(ii) AB // PQ GÚU PõmkP.

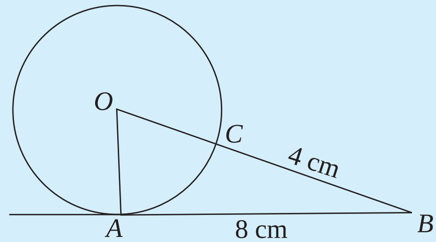


பலவினப் பயிற்சி

1. O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ Ámhzx US A C¼¸¢x Áøµ¯¨£mh öuõh¼PÒ B, C BQ¯ÁØÔÀ Ámhzøuz öuõkQßÓÚ. Ámhzvß Bøµ 5cm, $OA = 13$ cm B° ß |õØ£UPÀ $OBAC$ Cß £µ¨£Í øÁU Põs P.



2. O øÁ ø©¯©õPÄøh¯ Ámhzx US A CÀ Áøµ¯¨£mkÒÍ öuõh¼ AB BS®. OB BÚx C °À Ámhzøu CøhöÁmkQßÓx. $CB = 4$ cm, $AB = 8$ cm BS®. Ámhzvß Bøµø¯U Põs P.

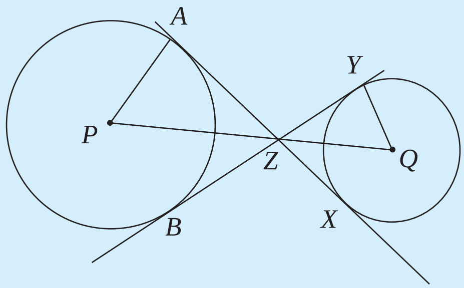


3. E¸ÂÀ Põmh¨£mkÒÍ Cµs k Ámh[PÎ¾® ø©¯[PÒ P, Q BS®. P ø¯ ø©¯©õPÄøh¯ öÁ£›¯ Ámh vØS A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாக வரைந்த இரண்டு தொடலிகள் சிறிய வட்டத்தை முறையே X, Y CÀ öuõkQßÓx. ÷©¾® AøÁ Cµs k® JßøÓö¯õßÖ Z CÀ \¢vUQßÓx GÛß

(i) $AX = BY$ GÚÄ®

(ii) $A\hat{P}Z = Y\hat{Q}Z$ GÚÄ®

{ÖÄP.



4. E¸ÂÀ uµ¨£mkÒÍ öuõh¼PÒ PX E® QX E® Ámh[PøÍ P, R, Q, S GßÝ® ¦ÒÎPÎÀ öuõkQßÓÚ. Ámh[PÎß ø©¯[PÒ A, B BS®.

(i) $PR = QS$ GÚÄ®

(ii) PQ // RS GÚÄ®

(iii) A, B, X J¸ ÷|º ÷Põmi À AøÛ¢xÒÍÚ GÚÄ®

Põm kP.