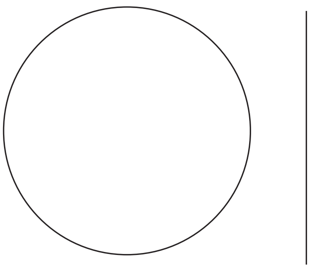
22 தொடலிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

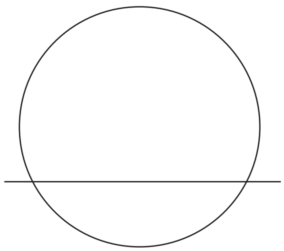
- ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட ஒரு தொடலியையும் அதன் பண்புகளையும் அறிந்துகொள்வதற்கும்
- புறத்தே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் பண்புகளை அறிந்துகொள்வதுக்கும்
- ஒன்றுவிட்ட துண்டத்திலுள்ள கோணத்தை அறியவும் அது தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

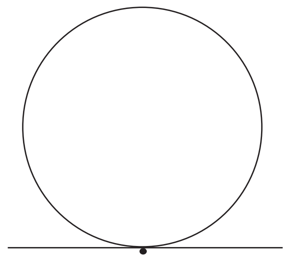
22.1 தொடலிகள்



உரு (i)



உரு (ii)



உரு (iii)

உரு (i) இலுள்ள வட்டத்துக்கும் நேர்கோட்டுக்கும் பொதுவான புள்ளிகள் இல்லை. இப்போது நேர்கோடானது வட்டத்துக்குப் புறத்தே அமைந்துள்ளது.

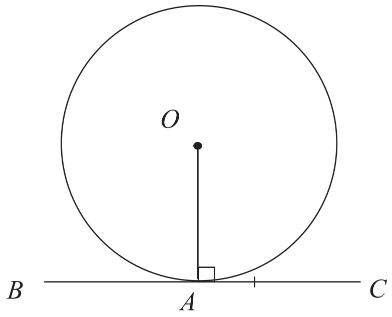
உரு (ii) இல் நேர்கோட்டினால் வட்டமானது இரண்டு புள்ளிகளில் இடைவெட்டப்படுகின்றது. நேர்கோட்டுக்கும் வட்டத்துக்கும் இரண்டு பொதுப் புள்ளிகள் உண்டு. இப்போது நேர்கோடானது வட்டத்தின் **இடைவெட்டி** எனப்படும்.

உரு (iii) இல் நேர்கோட்டுக்கும் வட்டத்துக்கும் ஒரு பொதுப் புள்ளி மாத்திரம் உண்டு. இப்போது நேர்கோடானது வட்டத்தைத் தொடுகின்றது எனக் கூறப்படுவதுடன் நேர்கோடானது வட்டத்தின் **தொடலி** எனப்படும்

தொடலிக்கும் வட்டத்துக்கும் உள்ள பொதுப் புள்ளி **தொடுபுள்ளி** எனப்படும்.

ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு

வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு பற்றிய விடயங்களைக் கற்பதற்காகக் கீழேயுள்ள விடயங்களில் கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.



மேலேயுள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி A யில் வரையப்பட்ட ஆரை OA ஆகும். OA இற்குப் புள்ளி A யில் வரைந்த செங்குத்து BC ஆகும். இங்கு BC என்னும் கோட்டுத் துண்டம் வட்டத்தை A யில் தொடுகின்றது என்பதும் தெளிவாகும்.
அதாவது,

வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி A யில் ஆரை OA யிற்குச் செங்குத்தாக வரைந்த கோட்டுத் துண்டம் BC ஆனது இவ்வட்டத்துக்கு ஒரு தொடலி ஆகும். இப்பேற்றை ஒரு தெற்றமாக இப்போது முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம் : ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியினூடாக ஆரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு வட்டத்தின் தொடலி ஆகும்.

மேலும்
அதாவது இத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

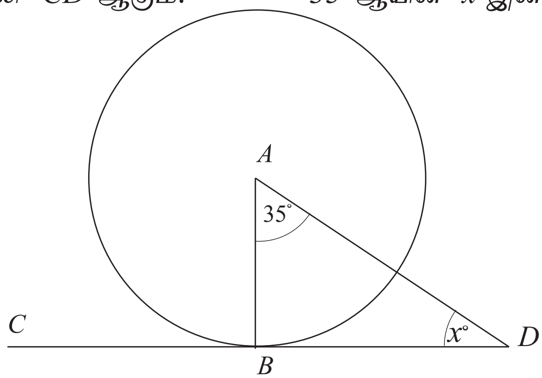
அதாவது வட்டத்தின் மீதுள்ள எந்தவொரு புள்ளியிலும் ஒரு தொடலியை வரைந்து தொடுபுள்ளியிலேயே ஆரையும் வரையும்போது அத்தொடலியும் ஆரையும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

இப்பேற்றை ஒரு தேற்றமாக இவ்வாறு முன்வைக்கலாம்.

தேற்றத்தின் மறுதலை : ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலி, தொடுபுள்ளியில் வரைந்த ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும்.

உதாரணம் 1

மையம் A ஆகவுடைய வட்டதின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளி B யில் வரையப்பட்ட தொடலி CD ஆகும். $B\hat{A}D = 35^{o}$ ஆயின் x இன் பெறுமானம் காண்க.



$A\hat{B}D = 90^{o}$ (ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியானது தொடுபுள்ளியினூடாக வரைப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்)

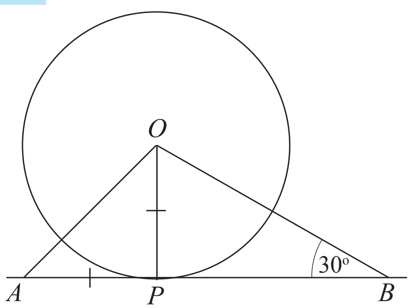
ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^{o} என்பதால்

$$35^{o} + 90^{o} + x^{o} = 180^{o}$$

$$x = 180^{o} - 35^{o} - 90^{o}$$

$$x = 55^{o}$$

உதாரணம் 2



உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு P யில் வரையப்பட்ட தொடலி AB ஆகும். $OP = AP,\ O\hat{B}P = 30^{\circ}$ ஆயின் $A\hat{O}B$ யின் பெறுமானம் காண்க.

$O\hat{P}A = 90^{\circ}$ (ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியானது தொடுபுள்ளியினூடாக வரைப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்)

$OP = AP$ (தரவு)

$\therefore P\hat{O}A = P\hat{A}O$ (ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரான கோணங்கள் சமன் என்பதால்)

$\Delta\ APO$ வில்

$P\hat{A}O + P\hat{O}A + O\hat{P}A = 180^{\circ}$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்)

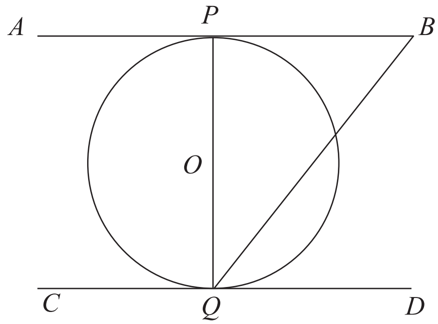
$$\therefore\ P\hat{A}O + P\hat{O}A + 90^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 180^{\circ} - 90^{\circ}$$
$$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 90^{\circ}$$
$$\therefore 2\,P\hat{A}O = 90^{\circ}$$ ($P\hat{A}O = P\hat{O}A$ என்பதால்)
$$P\hat{A}O = \frac{90^{\circ}}{2}$$
$$= 45^{\circ}$$

முக்கோணி AOB

$A\hat{O}B + P\hat{A}O + P\hat{B}O = 180^{\circ}$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்)

$$A\hat{O}B + 45^{\circ} + 30^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$A\hat{O}B + 75^{\circ} = 180^{\circ}$$
$$A\hat{O}B = 180^{\circ} - 75^{\circ}$$
$$= 105^{\circ}$$

உதாரணம் 3



PQ எனப்படுவது O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் விட்டமாகும். வட்டத்திற்கு P, Q ஆகியவற்றில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் முறையே AB, CD ஆகும். $P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ எனக் காட்டுக.

ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலியானது தொடுபுள்ளியினூடாக வரையப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்

$Q\hat{P}B = 90^\circ$,

$P\hat{Q}D = 90^\circ$ ஆகும்.

$\therefore \; Q\hat{P}B + P\hat{Q}D = 90^\circ + 90^\circ$

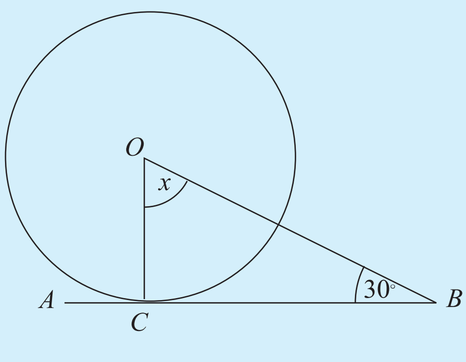
$= 180^\circ$

$\therefore \; AB \,//\, CD$ (நேயக் கோணங்களின் மிகை நிரப்பிகள் என்பதால்)

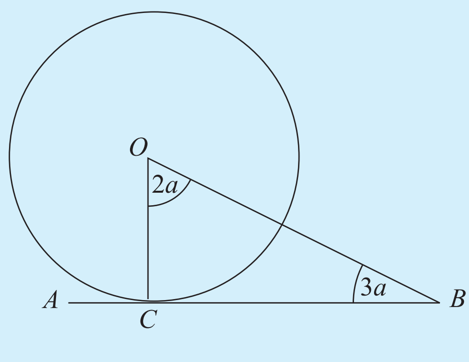
$\therefore \; P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ ($AB \,//\, CD$ ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

பயிற்சி 22.1

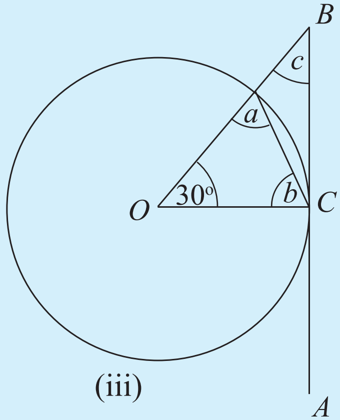
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் O வும் AB என்பது வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி C யில் வரையப்பட்ட தொடலியுமாகும். தரப் பட்டுள்ள தரவுகளின்படி அட்சரகணிதக் குறியீடுகளினால் தரப்படும் பெறுமானம் காண்க.



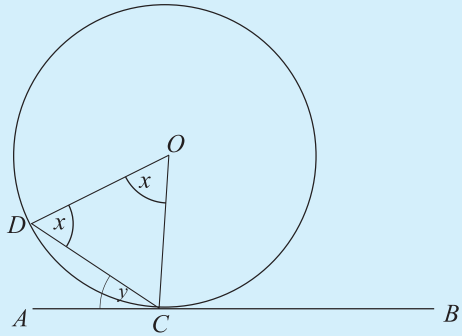
(i)



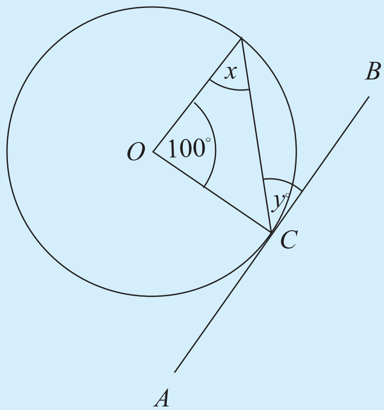
(ii)



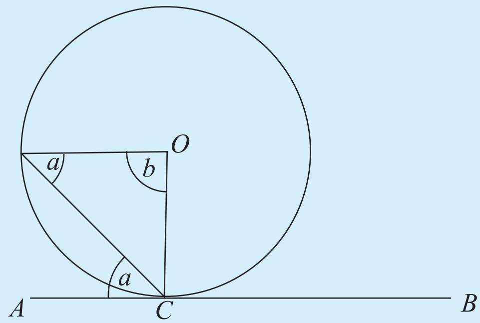
(iii)



(iv)

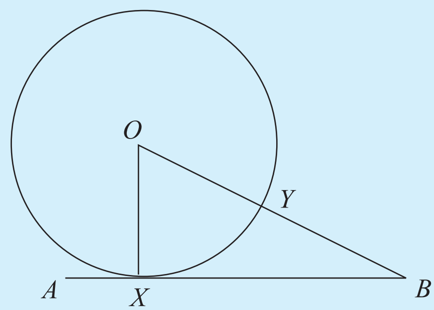


(v)

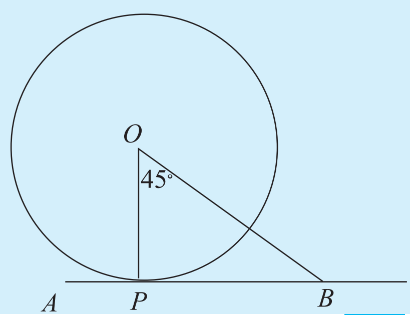


(vi)

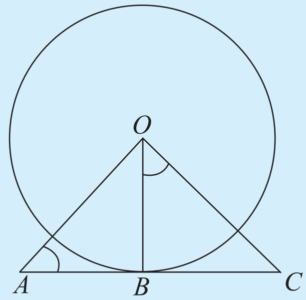
2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் அமைந்துள்ள புள்ளி X இல் வரையப்பட்ட தொடலி AB ஆகும். கோடு OB யினால் வட்டமானது புள்ளி Y யில் இடை வெட்டப்படுகின்றது. வட்டத்தின் ஆரை 6 cm , YB = 4 cm ஆயின் XB யின் நீளத்தைக் காண்க.



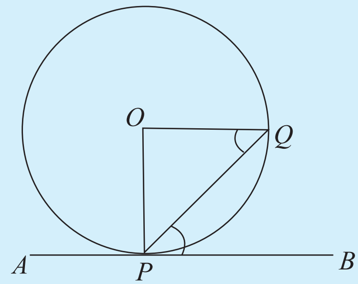
3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு P யில் வரையப்பட்ட தொடலி AB உம் $B\hat{O}P = 45^\circ$ உம் $PB = 6$ cm உம் ஆயின் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.



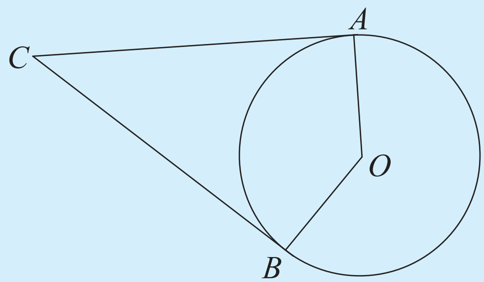
4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்துக்கு புள்ளி B யில் வரைந்த தொடலி AC ஆகும். $O\hat{A}B = B\hat{O}C$ ஆயின் $A\hat{O}B = B\hat{C}O$ எனக் காட்டுக.



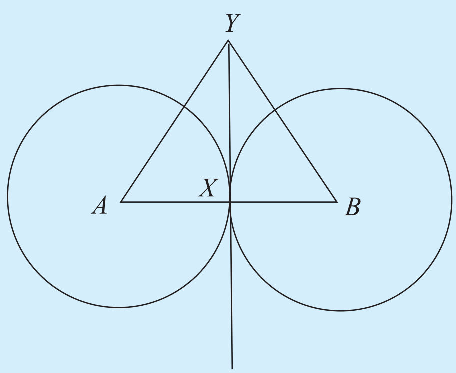
5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்திலுள்ள புள்ளி P யில் வரையப்பட்ட தொடலி AB ஆகும். $O\hat{Q}P = Q\hat{P}B$ ஆகுமாறு புள்ளி Q ஆனது வட்டத்தின் மீது அமைந்தள்ளது. OQ செங்குத்து PO எனக் காட்டுக.



6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ள A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் புள்ளி C யில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டு கின்றன. $AOBC$ ஒரு வட்ட நாற்பக்கல் எனக் காட்டுக.



7. உருவில் A, B ஆகியவற்றை மையங்களாகவுடைய சமனான ஆரை களைக் கொண்ட இரண்டு வட்டங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. புள்ளி Y ஆனது $AY = YB$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. கோடு YX ஆனது இரண்டு வட்டங்களுக்கும் பொதுத் தொடலி ஆகின்றதெனக் காட்டுக.

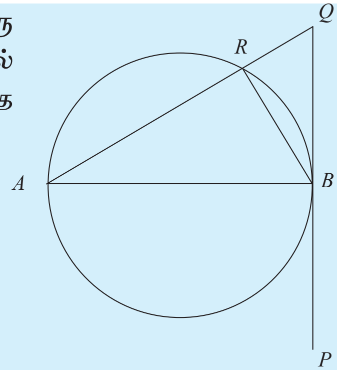


8. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தில் AB ஆனது ஒரு விட்டமாவதுடன் PQ ஆனது புள்ளி B யில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. AQ ஆனது வட்டத்தை R இல் சந்திக்கின்றது.

(i) $Q\hat{R}B = 90^\circ$ எனவும்

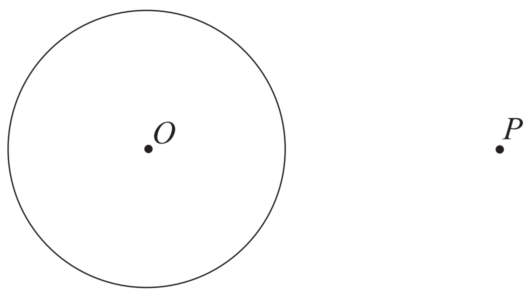
(ii) $A\hat{B}R = R\hat{Q}B$ எனவும்

நிறுவுக.

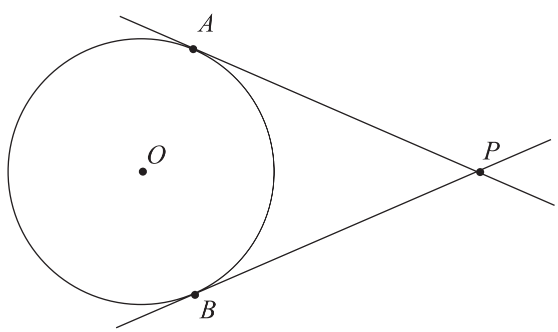


22.2 ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள்

O வை மையமாகடைய வட்டத்துக்குப் புறத்தே அமைந்துள்ள புள்ளி P யைக் கருதுவோம்.

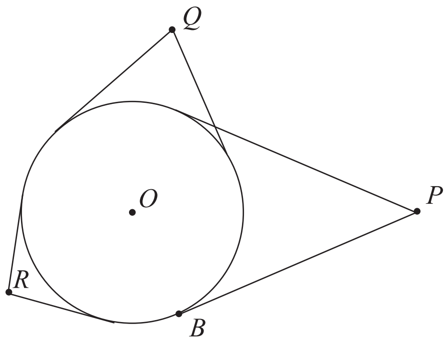


இப்புள்ளி P யிற்கூடாக வட்டத்தைத் தொடுகின்ற இரண்டு கோடுகளை வரையலாம். அவ்வாறு வரையப்பட்டுள்ள இரண்டு கோடுகள் உருவில் தரப்பட்டுள்ளன.



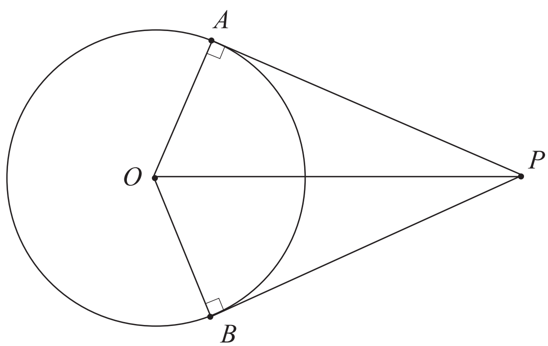
இந்த இரண்டு தொடலிகளும் புறப்புள்ளி P யிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் என அழைக்கப்படும்.

புள்ளி P ஆனது வட்டத்துக்கு புறத்தே எங்கே அமைந்திருப்பினும் இவ்வாறானத் தொடலிச் சோடியொன்றை வரைய முடியும் என்பதை விளங்கிக் கொள்க. கீழேயுள்ள உருவில் P, Q, R ஆகிய மூன்று புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்பட்ட மூன்று சோடித் தொடலிகள் தரப்பட்டுள்ளன.



புறத்தே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்கு இவ்வாறு ஒரு சோடி தொடலிகளை வரையும்போது பெறப்படும் உருவிலுள்ள கேத்திரகணிதப் பண்புகளைப் பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

தொடலிகள் இரண்டையும் AP, BP எனக் குறித்து ஆரைகளான OA, OB ஆகியவற்றையும் கோட்டுத் துண்டம் OP ஐயும் வரைவோம்.



மேலே பகுதி 22.1 இல் கற்றதற்கேற்பத் தொடலியும் தொடுப்புள்ளியில் வரைந்த ஆரையும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என்பதால் அது பற்றி உருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

இவ்வுருவிலுள்ள முக்கோணிகளான OAP, OBP ஆகியவற்றை நோக்கும்போது சமச்சீரின்படி அவை ஒருங்கிசைகின்றன என்பதை ஊகிக்க முடியும். உண்மையிலேயே

அவை ஒருங்கிசைகின்ற முக்கோணி என்பதை இலகுவாக நிறுவலாம். அந்நிறுவலைச் செய்யும் முறையைப் பற்றி முதலில் விளங்கிக் கொள்வோம். அதற்கு அம்முக்கோணிகள் இரண்டும் செங்கோண முக்கோணிகள் என்பதை முதலில் அவதானிக்கவும். இதற்கேற்ப ஒரு முக்கோணியின் செம்பக்கத்தையும் இன்னொரு பக்கத்தையும் மற்றைய முக்கோணியின் செம்பக்கத்துக்கும் மற்றுமொறு பக்கத்துக்கும் சமனெனக் காட்டுவதன் மூலம் செ. ப.ப. என்ற சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் இந்நிறுவலைச் செய்யலாம். இரண்டு முக்கோணிகளின் செம்பக்கம் OP என்னும் பொதுப் பக்கமாகும். மேலும் OA, OB என்பன ஆரைகள் என்பதால் அப்பக்கங்களும் சமனானவை ஆகும். இதற்கேற்ப இரண்டு முக்கோணிகளும் சமனானவை ஆகும். அதற்கேற்ப இரண்டு முக்கோணிகளும் செ.ப.ப என்னும் சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைகின்றன. அவ்வாறு ஒருங்கிசைந்த பின்னர் ஒத்த உறுப்புகள் சமனாவதால்,

(i) $AP = BP$ ஆகும். அதாவது இரண்டு தொடலிகளும் நீளத்தில் சமனானவை.

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ ஆகும். அதாவது இரண்டு தொடலிகளுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் இருசமகூறிடுகின்றன.

(iii) $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ ஆகும். அதாவது தொடலிகள் மையத்தில் சமனான கோணங்களை எதிரமைக்கின்றன.

இங்கு நாம் கரலந்துரையாடிய விடயங்கள் ஒரு தேற்றமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

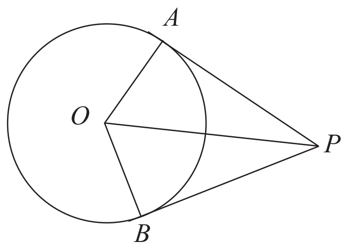
தேற்றம் : புறப் புள்ளியொன்றிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படின்

(i) இரண்டு தொடலிகளும் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும்.

(ii) புறப் புள்ளியையும் வட்டத்தின் மையத்தையும் இணைக்கும் ஒரு கோடு இரண்டு தொடலிகளுக்கும் இடையிலான கோணத்தை இருசமகூறிடும்.

(iii) தொடலிகள் மையத்தில் சமனான கோணங்களை எதிரமைக்கும்

இத்தேற்றத்தை முறையாக நிறுவும் முறையை ஆராய்வோம்.



தரவு : O வை மையமாகவுடைய வட்டதுக்குப் புறப்புள்ளி P யிலிருந்து A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் முறையே AP, BP ஆகும்.

நிறுவ வேண்டியது :

$$\text{(i) } AP = BP$$
$$\text{(ii) } A\hat{P}O = B\hat{P}O$$
$$\text{(iii) } P\hat{O}A = P\hat{O}B$$

நிறுவல் : $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^{\circ}$ (தொடலி ஆரைக்குச் செங்குத்து என்பதால்)

$\therefore$ POA, POB ஆகிய முக்கோணிகள் செங்கோண முக்கோணிகள் ஆகும்.

இனி POA, POB ஆகிய முக்கோணிகளில்

$OA = OB$ (ஒரே வட்டத்தின் ஆரைகள்)

OP பொதுப் பக்கம்.

$\therefore$ $\Delta POA \equiv \Delta POB$ (செ.ப.ப.)

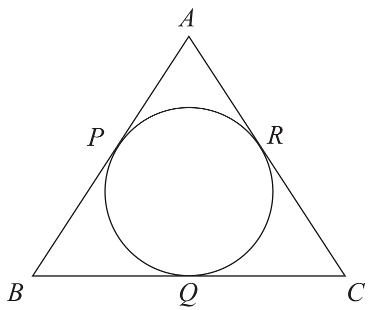
ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளில் ஒத்த உறுப்புகள் சமனாகும்.

$\therefore$ (i) $AP = BP$

$\therefore$ (ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$

$\therefore$ (iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$

உதாரணம் 1



உருவிலுள்ள வட்டத்தை முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. $AB = 11$ cm, $CR = 4$ cm ஆயின் முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவைக் காண்க.

புறப் புள்ளியொன்றிலிருந்து ஒரு வட்டதுக்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படும் போது தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும்.

$\therefore$ $AP = AR$ உம்

$BP = BQ$ உம்

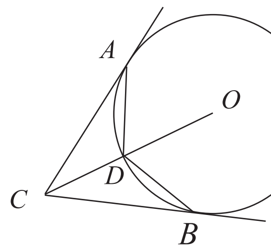
$CR = CQ$ உம் ஆகும்.

முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு $= AB + BC + CA$

$$= 11 + (BQ + QC) + (CR + RA)$$
$$= 11 + (BP + CR) + (4 + AP)$$
$$= 11 + (BP + 4) + (4 + AP)$$
$$= 19 + (BP + AP)$$
$$= 19 + AB$$
$$= 19 + 11$$
$$= 30$$

$\therefore$ முக்கோணி ABC யின் சுற்றளவு 30 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2



உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்துக்கு புறத்தே அமைந்துள்ள புள்ளி C யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வட்டத்தை தொடுகின்றன. வட்டத்தின் மையம் O வையும் C யையும் இணைக்கும் கோடு D யில் வட்டத்தை வெட்டுகின்றது. $AD = BD$ எனக் காட்டுக.

ACD, BCD ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளையும் ஒருங்கிசையச் செய்வதன் மூலம் தேவையான விடையைப் பெறலாம்.

ACD, BCD ஆகிய முக்கோணிகளில்

$AC = BC$ (ஒரு புறப் புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படின் அத்தொடலிகள் நீளத்தில் சமனானவை)

$A\hat{C}O = B\hat{C}O$ (ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடலிகள் வரையப்படின் புறப் புள்ளியையும் வட்டத்தின் மையத்தையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டினால் தொடலிகளுக்கும் இடையிலான கோணம் இருசமகூறிடப்படும்.)

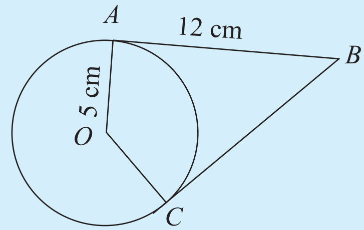
CD பொதுபக்கம்

$\therefore\ \Delta ACD \equiv \Delta BCD$ (ப.கோ.ப.)

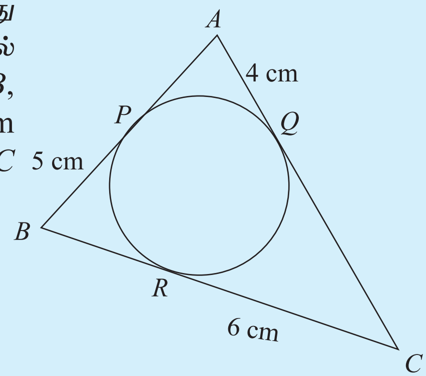
$\therefore\ AD = BD$ (ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளில் ஒத்த பக்கங்கள் சமன் என்பதால்)

பயிற்சி 22.2

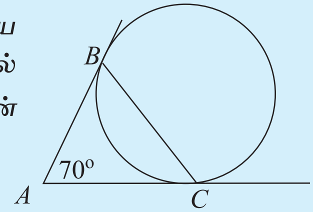
1. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ள A, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் B யில் இடைவெட்டுகின்றன. வட்டத்தின் ஆரை 5 cm உம் AB = 12 cm உம் ஆயின் நாற்பக்கல் $ABCO$ வின் சுற்றளவைக் காண்க.



2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ள P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் முறையே AB, AC, BC ஆகும். RC = 6 cm உம் BP = 5 cm உம் AQ = 4 cm உம் ஆகும். முக்கோணி ABC இன் சுற்றளவைக் காண்க.

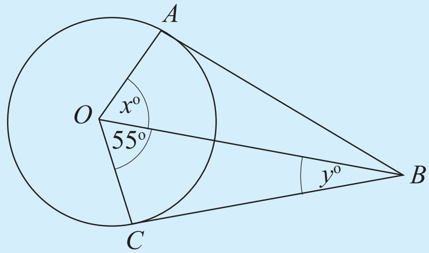


3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மீதுள்ள B, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் A இல் இடைவெட்டுகின்றன. $B\hat{A}C = 70^{o}$ ஆயின் $A\hat{B}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.

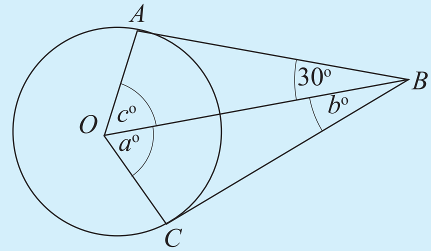


4. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தினதும் மையம் O உம் வட்டத்தில் உள்ள A, C ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் புள்ளி B யில் சந்திக்கின்றன. தரப்பட்டுள்ள உருக்களில் அட்சரகணிதக் குறியீடுகளினால் காட்டப்படும் கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

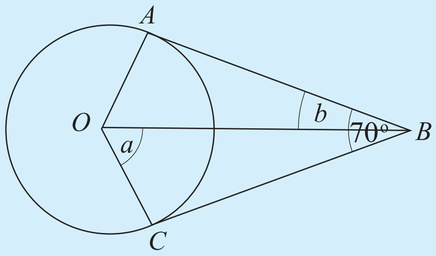
(i)



(ii)

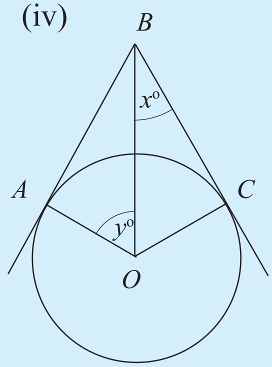


(iii)



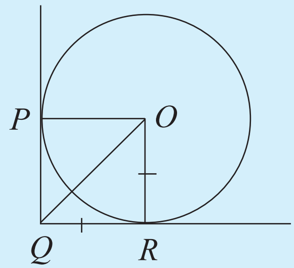
$A\hat{B}C = 70°$

(iv)



$A\hat{O}C = 110°$

5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் P, R ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகள் Q வில் சந்திக்கின்றன. $QR = OR$ ஆயின் $PQRO$ என்பது ஒரு சதுரம் எனக் காட்டுக.

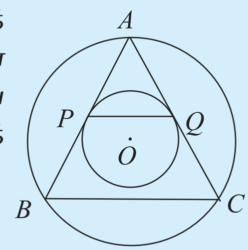


6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. வட்டத்தின் உள்ளே O வை மையமாகக் கொண்டு அமைந்துள்ள சிறிய வட்டமானது P, Q ஆகிய புள்ளிகளில் AB, AC ஆகியவற்றைத் தொடுகின்றது.

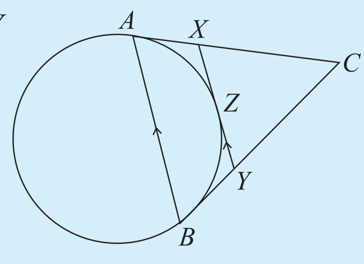
(i) APQ ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி எனவும்

(ii) $BC // PQ$ எனவும்

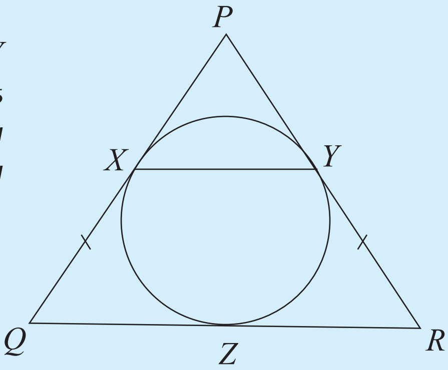
காட்டுக.



7. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $XC = CY$ எனக் காட்டுக.



8. உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்துக்கு P இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் X , Y ஆகிய புள்ளிகளில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன. $XQ = YR$ ஆகுமாறு வரையப்பட்ட நேர்கோடு QR ஆனது வட்டத்தை Z இல் தொடுகின்றது.



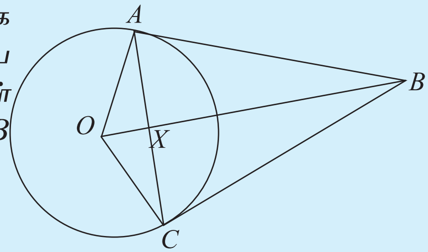
(i) $PR = PQ$ எனவும்

(ii) $QR = XQ + YR$ எனவும்

(iii) $XY // QR$ எனவும்

காட்டுக.

9. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாக வுடைய வட்டத்தின் மீதுள்ள A, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடலிகள் ஒன்றையொன்று B யில் சந்திக்கின்றது. OB ஆனது AC யை X இல் சந்திக்கின்றது.



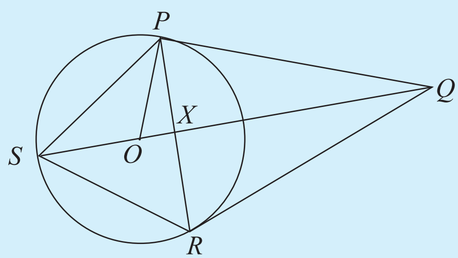
(i) $\Delta OAX \equiv \Delta OCX$ எனவும்

(ii) கோடு OB ஆனது AC யின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி எனவும்

(iii) $A\hat{O}C = 2\, A\hat{C}B$ எனவும்

காட்டுக.

10. உருவில் தரப்பட்டுள்ள O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு Q விலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் PQ, QR ஆகும். நீட்டப்பட்ட கோடு QO ஆனது வட்டத்தை S இல் சந்திக்கின்றது. PR உம் SQ வும் X இல் சந்திக்கின்றன.

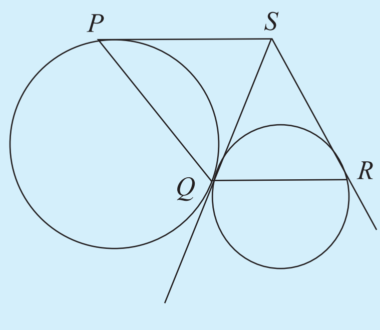


(i) $\Delta PQS \equiv \Delta QRS$ எனவும்

(ii) $2\, O\hat{P}X = P\hat{Q}R$ எனவும்

காட்டுக.

11. உருவிலுள்ள இரண்டு வட்டங்களும் Q வில் வெளிப்புறமாக தொடுகின்றன. QS ஆனது பொதுத் தொடலியாகும். S இல் இருந்து இரு வட்டங்களுக்கும் வரையப்பட்ட மற்றைய தொடலிகள் P, R இல் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன.



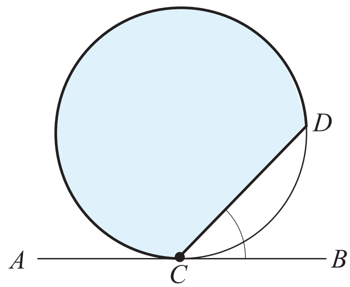
(i) $PS = SR$ எனவும்

(ii) $P\hat{Q}R = S\hat{P}Q + S\hat{R}Q$ எனவும்

காட்டுக.

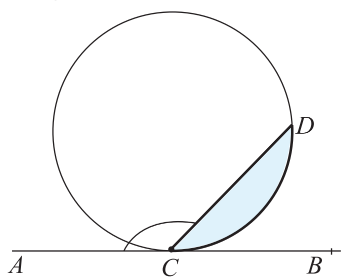
22.3 ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்

முதலில் ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணம் என்பதால் கருதப்படுவது யாதென்பதை ஆராய்வோம். இதற்கு கீழேயுள்ள உருவின் மீது கவனத்தைச் செலுத்துவோம்.



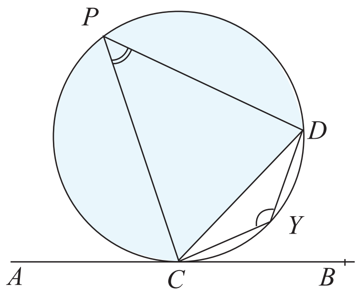
உருவிலுள்ளவாறு நேர்கோடு AB ஆனது வட்டத்தை C யில் தொடுகின்றது. CD ஒரு நாண் ஆகும். CD என்னும் நாணின் மூலம் வட்டம் இரண்டு வட்டத் துண்டங்களாப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒரு துண்டம் உருவில் நீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டுள்ளப் பகுதியாகும். மற்றைய துண்டம் அவ்வாறு நிழற்றப்படாத சிறிய பகுதியாகும். தொடலி AB யின் மீது நாண் CD யினால் இரண்டு கோணங்கள் உருவாகின்றன. ஒரு கோணம் $A\hat{C}D$ ஆகும். மற்றையது $B\hat{C}D$ ஆகும். BCD கோணத்துக்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட துண்டமாக குறிப்பிடப்படுவது நீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டள்ள வட்டத்துண்டமாகும். $B\hat{C}D$ என்னும் இக்கோணமானது அமைந்திருப்பது மற்றைய வட்டத்துண்டத்தினுள் என்பதை அவதானிக்க. அவ்வாறே கோணம் $A\hat{C}D$ இற்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட துண்டமாகக் குறிப்பிடப்படுவது நிழற்றப்படாத மற்றைய வட்டத் துண்டமாகும். $A\hat{C}D$ என்னும் அகக் கோணம் அமைந்திருப்பது மற்றைய (நீல நிறமுடைய) வட்டத் துண்டத்தில் என்பதையும் அவதானிக்க.

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவில் கோணம் $A\hat{C}D$ இற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டம் இளநீல நிறத்தினால் நிழற்றப்பட்டுள்ளது.



ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டத்தின் கோணங்கள்

கீழே தரப்பட்டுள்ள உருவைப் பார்க்க. $C\hat{P}D$ அமைந்திருப்பது இளநீல நிறமுடைய பெரிய வட்டத் துண்டத்திலாகும். அதாவது கோணங்கள் $C\hat{P}D$, $D\hat{C}B$ ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று எதிரான வட்டத் துண்டத்திலாகும். அதாவது கோணங்கள் $C\hat{Y}D$, $A\hat{C}D$ ஆகிய கோணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று எதிரான வட்டத் துண்டங்களில் அமைந்துள்ளன.

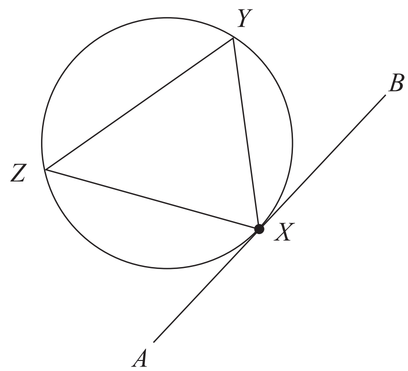


ஒரு வட்டத்தின் தொடலிகள் தொடர்பாக மிகமுக்கியமான ஒரு பேறு உண்டு. அப்பேறினால் கூறப்படுவது மேற்குறித்த உருவின்படி $D\hat{C}B$, $C\hat{P}D$ ஆகிய கோணங்கள் சமன் என்பதும் $A\hat{C}D$, $C\hat{Y}D$ ஆகிய கோணங்கள் சமன் என்பதும் ஆகும். வேறொரு விதமாகக் கூறுவதாயின் ஒரு வட்டத்தின் தொடலிக்கும் தொடு புள்ளியில் வரையப்பட்ட வட்டத்துண்டத்திலுள்ள கோணத்துக்குச் (அதாவது அந்நாணினால் ஒன்றுவிட்ட வட்டத்துண்டத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணத்துக்கு) சமனாகும். இப்பேறானது மிக முக்கியமானது என்பதால் அதனை ஒரு தேற்றமாகக் கூறி நினைவில் வைத்திருப்போம்.

தேற்றம் : ஒரு வட்டத்துக்கு வரைந்த தொடலிக்கும் தொடுபுள்ளியில் வரைந்த நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் ஒன்றுவிட்ட வட்டத்திலுள்ள கோணத்திற்குச் சமனாகும்.

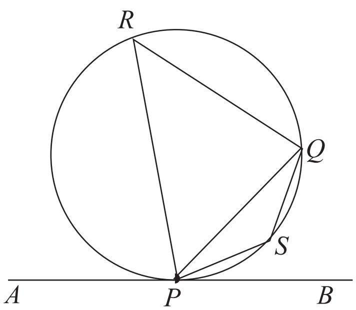
இத்தேற்றத்தின் உண்மையை உறுதிப்படுத்துவதற்காகக் கீழேயுள்ள செயற்பாடுகளில் ஈடுபடுக.

செயற்பாடு 1



- ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை X எனப் பெயரிடுக.
- புள்ளி X இல் வட்டத்தைத் தொடும் ஒரு நேர்கோட்டை வரைந்து (X இல் வட்டத்துக்கு ஓர் ஆரையை வரைந்து அதற்குச் செங்குத்தாக X இல் ஒரு நேர்கோடு வரைவதன் மூலம் இதனைச் செய்யலாம்.) அதனை AB எனப் பெயரிடுக.
- வட்டத்தின் மீது மேலும் இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை Y, Z எனப் பெயரிடுக.
- உருவிலுள்ளவாறு X, Y, Z ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்க .
- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $B\hat{X}Y$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட வட்டதுண்டக் கோணமாகிய $X\hat{Z}Y$ இன் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.
- அவ்வாறே $A\hat{X}Z$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த, ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணமாகிய$X\hat{Y}Z$ இன் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

செயற்பாடு 2

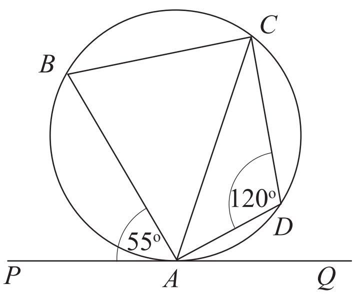


- ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை P எனப் பெயரிடுக. புள்ளி P இல் வட்டத்தைத் தொடும் ஒரு நேர்கோட்டை வரைந்து (P யில் ஓர் ஆரையை வரைந்து அதற்குச் செங்குத்தாக P யில் ஒரு கோட்டை வரைவதன் மூலம் இதனைச் செய்யலாம்) அதனை AB எனப் பெயரிடுக.

- புள்ளி P யிலிருந்து ஒரு நாணை வரைந்து அதனை PQ எனப் பெயரிடுக.
- நாண் PQ வின் இருபக்கங்களிலும் அமையுமாறு வட்டத்தின் மீது இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து R, S எனப் பெயரிடுக.
- QR, QS, PS, PR ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களை வரைக.
- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி $B\hat{P}Q$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்டத் துண்டக் கோணமான $P\hat{R}Q$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.
- அவ்வாறே, $A\hat{P}Q$ மற்றும் அதற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணமாகிய $P\hat{S}Q$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை அளந்து அவை சமனாகின்றனவா என ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

ஒரு வட்டத்தின் தொடலிக்கும் தொடுபுள்ளியிலுள்ள நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணமானது ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணத்துக்குச் சமனாகின்றது என்பதை மேற்குறித்த செயற்பாட்டின் மூலம் விளங்கிக் கொண்டிருப்பீர்கள்.

உதாரணம் 1



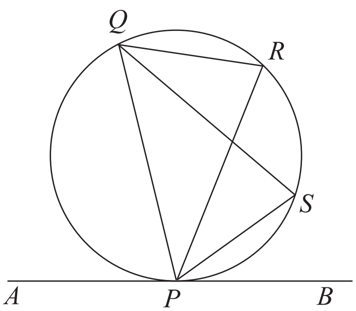
மேலே காட்டப்பட்டுள்ள உருவில் கோடு PQ ஆனது வட்டத்தை A யில் தொடுகின்றது. மேலும் B, C, D ஆகிய புள்ளிகளும் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. $P\hat{A}B = 55^\circ$ யும் $A\hat{D}C = 120^\circ$ யும் ஆகும். $B\hat{A}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.
முதலில் $P\hat{A}C$ பெறுமானம் காண்போம்.

$P\hat{A}C = A\hat{D}C$ (ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்)

$$P\hat{A}B + B\hat{A}C = 120^\circ$$
$$55^\circ + B\hat{A}C = 120^\circ$$
$$B\hat{A}C = 120^\circ - 55^\circ$$
$$= 65^\circ$$

உதாரணம் 2

நேர்கோடு AB ஆனது வட்டத்தை P யில் தொடுகின்றது. Q வும் R உம் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன. கோணம் $P\hat{Q}R$ இன் இருசமகூறாக்கி வட்டத்தை S இல் சந்திக்கின்றது. PS ஆனது $B\hat{P}R$ இன் இருசமகூறாக்கி எனக் காட்டுக.



$B\hat{P}S = P\hat{Q}S$ (ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டக் கோணங்கள்)

$R\hat{P}S = R\hat{Q}S$ (ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)

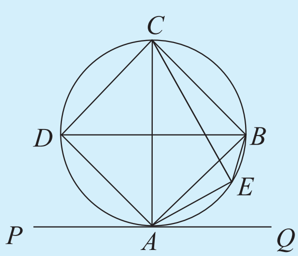
$P\hat{Q}S = R\hat{Q}S$ (தரவு QS ஆனது $P\hat{Q}R$ இல் இருசமகூறாக்கி)

$\therefore\ B\hat{P}S = R\hat{P}S$

$\therefore$ PS ஆனது $B\hat{P}R$ இன் இருசமகூறாக்கியாகும்.

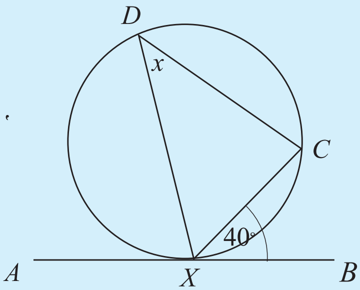
பயிற்சி 22.3

1. கோடு PQ ஆனது புள்ளி A யில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. B, C, D, E ஆகிய புள்ளிகள் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன.

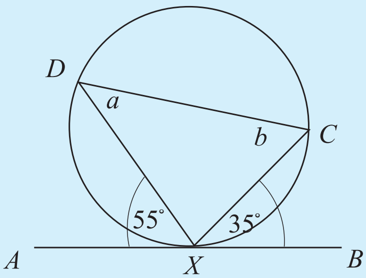


தொடலிக்கும் நாணுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம்	ஒன்றுவிட்ட துண்டக் கோணங்கள்
$B\hat{A}Q$	....
$P\hat{A}B$	....
$P\hat{A}D$	....
$E\hat{A}Q$	....
....	$D\hat{B}A$
....	$D\hat{C}A$

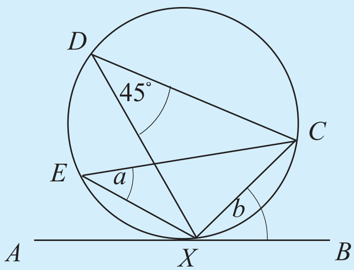
2. ஒவ்வோர் உருவிலும் AB எனக் காட்டப்படுவது புள்ளி X இல் வரையப்பட்டுள்ள தொடலி ஆகும். அட்சரகணிதக் குறியீடுகளால் தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களைக் காண்க.



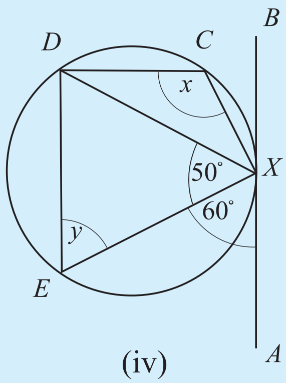
(i)



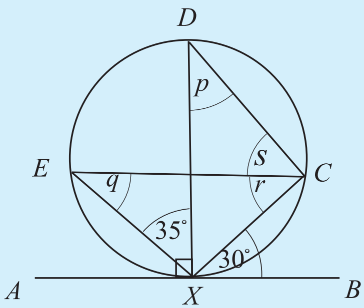
(ii)



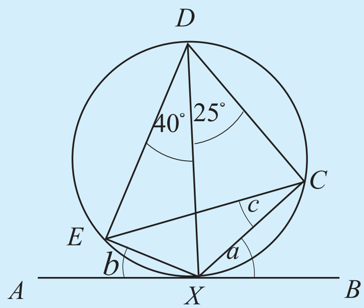
(iii)



(iv)

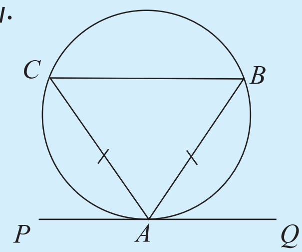


(v)



(vi)

3. PQ ஆனது வட்டத்தைப் புள்ளி A யில் தொடுக்கின்றது.
$AC = AB$ ஆயின்
(i) $C\hat{A}P = B\hat{A}Q$ எனவும்
(ii) $PQ \,//\, CB$ எனவும்
காட்டுக.



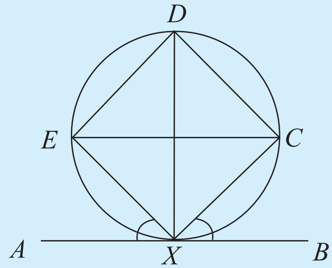
4. AB ஆனது புள்ளி X இல் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலி ஆகும். C, E ஆகிய புள்ளிகள் $B\hat{X}C = A\hat{X}E$ ஆகுமாறு வட்டத்தில் அமைந்துள்ளன D என்பது வட்டத்தின் மீதுள்ள இன்னுமொரு புள்ளியாகும்.

(i) XD ஆனது $E\hat{D}C$ யின் கோண இருசமகூறாக்கி எனவும்

(ii) $EX = CX$ எனவும்

(iii) $AB \,//\, EC$ எனவும்

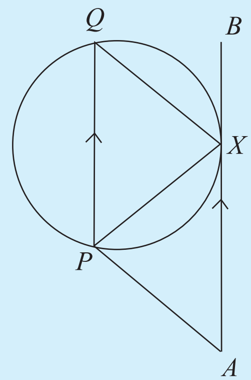
காட்டுக.



5. கோடு AB ஆனது வட்டத்தை X தொடுகின்றது. $PQ \,//\, AB$ ஆகுமாறு நாண் PQ வரையப்பட்டுள்ளது.

(i) $B\hat{X}Q = A\hat{X}P$ என நிறுவுக.

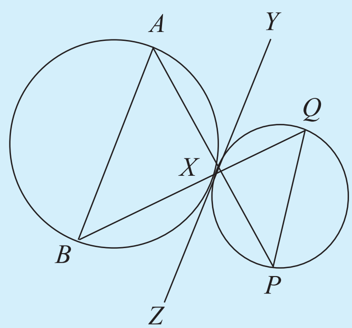
(ii) $PX = PA$ ஆயின் $AXQP$ ஓர் இணைகரம் எனக் காட்டுக.



6. இரண்டு வட்டங்கள் வெளிப் புறமாக புள்ளி X இல் தொடுகின்றன. YZ ஆனது பொதுத் தொடலி ஆகும். AB ஆனது ஒரு வட்டத்தின் நாண் ஆகும். நீட்டப்பட்ட AX, BX ஆகியவை மற்றைய வட்டத்தை முறையே P, Q என்பவற்றில் சந்திக்கின்றன.

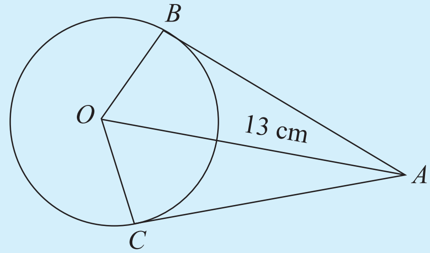
(i) $B\hat{X}Z = X\hat{P}Q$ எனக் காட்டுக.

(ii) $AB \,//\, PQ$ எனக் காட்டுக.

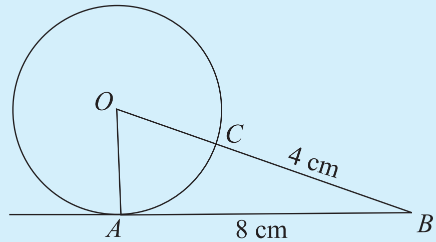


பலவினப் பயிற்சி

1. O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு A இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகள் B, C ஆகியவற்றில் வட்டத்தைத் தொடுகின்றன. வட்டத்தின் ஆரை 5 cm, $OA = 13$ cm ஆயின் நாற்பக்கல் $OBAC$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.



2. O வை மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கு A இல் வரையப்பட்டுள்ள தொடலி AB ஆகும். OB ஆனது C யில் வட்டத்தை இடைவெட்டுகின்றது. $CB = 4$ cm, $AB = 8$ cm ஆகும். வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

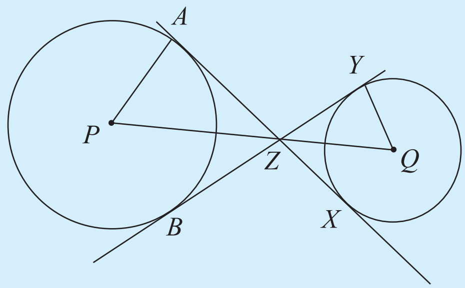


3. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள இரண்டு வட்டங்களிலும் மையங்கள் P, Q ஆகும். P யை மையமாகவுடைய பெரிய வட்டதிற்கு A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாக வரைந்த இரண்டு தொடலிகள் சிறிய வட்டத்தை முறையே X, Y இல் தொடுகின்றது. மேலும் அவை இரண்டும் ஒன்றையொன்று Z இல் சந்திக்கின்றது எனின்

(i) $AX = BY$ எனவும்

(ii) $A\hat{P}Z = Y\hat{Q}Z$ எனவும்

நிறுவுக.



4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தொடலிகள் PX உம் QX உம் வட்டங்களை P, R, Q, S என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. வட்டங்களின் மையங்கள் A, B ஆகும்.

(i) $PR = QS$ எனவும்

(ii) PQ // RS எனவும்

(iii) A, B, X ஒரு நேர் கோட்டில் அமைந்துள்ளன எனவும்

காட்டுக.