8 சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள தளஉருவங்களின் பரப்பளவு

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே ஒரே அடியில் இருக்கும் முக்கோணியின் பரப்பளவுக்கும் இணைகரத்தின் பரப்பளவுக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை பற்றிய தேற்றங்களை இனங்காண்பதற்கும் அவற்றுடன் தொடர்புபட்ட பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும்

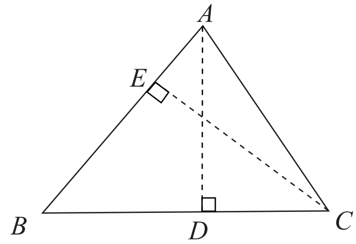
தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

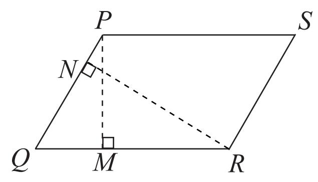
அறிமுகம்

பல்வேறு தள உருவங்களைப் பற்றியும் சில விசேட விதத்தில் உள்ள தள உருவங்களின் பரப்பளவுகளைக் காணும் விதம் பற்றியும் நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். அவற்றில் முக்கோணிகளினதும் இணைகரங்களினதும் பரப்பளவைப் பெற்றுள்ள விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

முக்கோணிகளினதும் இணைகரங்களினதும் பரப்பளவுகளைக் காணும்போது **செங்குத்துயரம், அடி** என்னும் பதங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இப்பதங்களினால் கருதப்படுபவற்றை முதலில் நினைவுகூர்வோம்.

கீழே முக்கோணி ABC உம் இணைகரம் $PQRS$ உம் தரப்பட்டுள்ளன.





முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் காணும்போது விருப்பமான ஒரு பக்கத்தை அடியாகக் கருதலாம். உதாரணமாகப் பக்கம் BC யை அடியாகக் கொள்ளலாம். அப்போது ஒத்த செங்குத்துயரமாகக் கோட்டுத் துண்டம் AD கருதப்படுகின்றது. அதாவது, A யிலிருந்து BC யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தாகும்.

இப்போது

முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$ எனக் கற்றுள்ளோம்.

பக்கம் AB யை அடியாகக் கருதினால், ஒத்த குத்துயரம் கோடு CE ஆகும்.

அதற்கேற்ப முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times AB \times CE$ எனவும் கருதலாம். இவ்வாறே AC யை அடியாகக் கருதி B யிலிருந்து ஒத்த செங்குத்துயரத்தை வரையும் போது முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் காணலாம்'

இப்போது இணைகரம் $PQRS$ ஐக் கருதுவோம். இங்கும் எந்தவொரு பக்கத்தையும் அடியாகக் கொண்டு பரப்பளவைக் காணலாம். அதில் பக்கம் QR ஐ அடியாகக் கருதினால், ஒத்த செங்குத்துயரம் கோடு PM ஆகும். அதாவது, QR இற்கும் அதன் எதிர்ப் பக்கம் PS இற்குமிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம்.

அப்போது இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= QR \times PM$ என நாம் கற்றுள்ளோம்.

பக்கம் PQ வை அடியாகக் கருதினால் ஒத்த செங்குத்துயரம் RN ஆகும்.

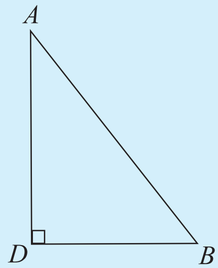
அப்போது இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு $= PQ \times RN$ எனவும் எழுதலாம்.

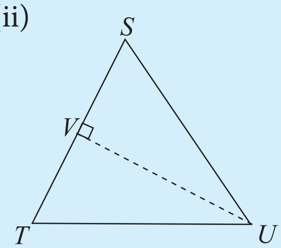
குறிப்பு

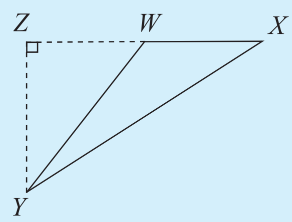
ஒரு முக்கோணியின் அல்லது இணைகரத்தின் செங்குத்துயரத்தின் நீளமும் பெரும்பாலும் செங்குத்துயரம் எனப்படும். இவ்விடயங்களைக் கொண்டு முன்னர் கற்ற முக்கோணிகளினதும் இணைகரங்களினதும் பரப்பளவைக் காணல் பற்றிக் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.

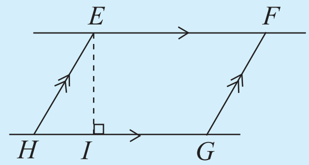
(i)


(ii)


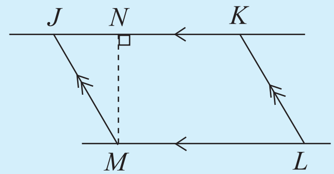
(iii)


(iv)

(v)



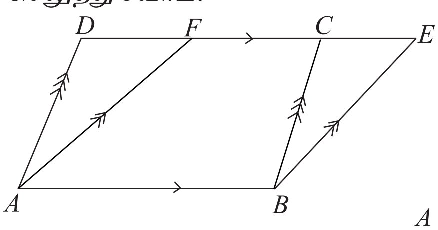
(vi)



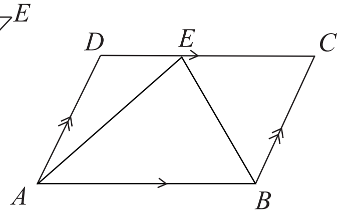
உருவம்	அடி	செங்குத்து உயரம்	பரப்பளவு (பக்கங்களின் பெருக்கமாக)
(i) முக்கோணி ABD			
(ii) முக்கோணி STU			
(iii) முக்கோணி WXY			
(iv) செவ்வகம் $ABCD$			
(v) இணைகரம் $EFGH$			
(vi) இணைகரம் $JKLM$			

8.1 ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே ஒரே அடியைக் கொண்ட இணைகரங்களும் முக்கோணிகளும்

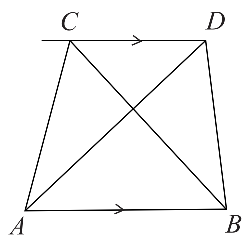
முதலில் ஒரே சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே, ஒரே அடி மீது உள்ள இணைகரங்களும் முக்கோணிகளும் என்பதன் கருத்தை அறிவதற்குப் பின்வரும் வரிப்படங்களில் கவனம் செலுத்துவோம்.



உரு (i)



உரு (ii)



உரு (iii)

உரு (i) இல் காணப்படும் $ABCD$, $ABEF$ ஆகிய இரு இணைகரங்களும் AB, DE என்னும் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே உள்ளன. இங்கு ''இடையே'' என்பதன் கருத்து ஒவ்வோர் இணைகரத்தினதும் இரு எதிர்ப் பக்கங்களும் இரு சமாந்தரக் கோடுகளின் மீது உள்ளன என்பதாகும். மேலும் அவ்விரு இணைகரங்களுக்கும் பக்கம் AB பொதுவாகும். இத்தகைய ஓர் அமைவில் அவ்விரு இணைகரங்களும் ஒரே சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையேயும் ஒரே அடியிலும் இருக்கின்றன எனப்படும். இங்கு பொதுப் பக்கம் AB ஆனது இரு இணைகரங்களுக்கும் அடியாகக் கருதப்பட்டுள்ளது.

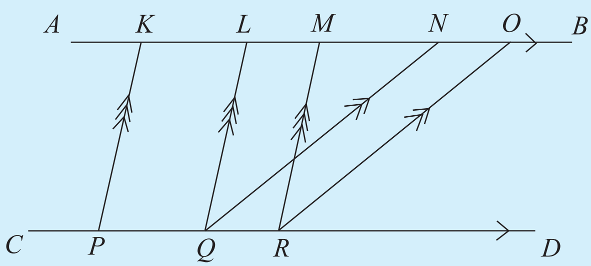
அப்பொது அடிக்கு ஒத்ததாக இரு இணைகரங்களும் ஒரே செங்குத்துத் தூரத்தில் இருக்கின்றன என்பது தெளிவாகும். அச்செங்குத்துத் தூரம் AB, DE ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரமாகும்.

உரு (ii) இல் ஓர் இணைகரமும் ஒரு முக்கோணியும் ஒரே சமாந்தரச் சோடிகளுக்கிடையே ஒரே அடியில் இருக்கும் விதம் காணப்படுகின்றது. அவை இணைகரம் $ABCD$ யும் முக்கோணி ABE யும் ஆகும். இங்கு பொதுப் பக்கம் AB ஆகும். இங்கு முக்கோணியின் ஒரு பக்கமும் அதற்கு எதிரான உச்சியும் இரண்டு சமாந்தரக் கோடுகளின் மீது அமைவதை அவதானிக்க.

உரு (iii) இல் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே ஒரே அடி மீது இருக்கும் இரு முக்கோணிகள் உள்ளன. அவை ABC, ABD ஆகிய முக்கோணிகளுமாகும்.

பயிற்சி 8.1

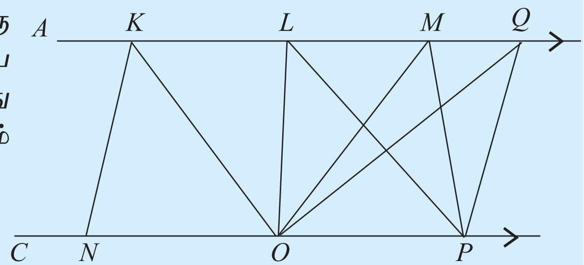
1. தரப்பட்டுள்ள உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப



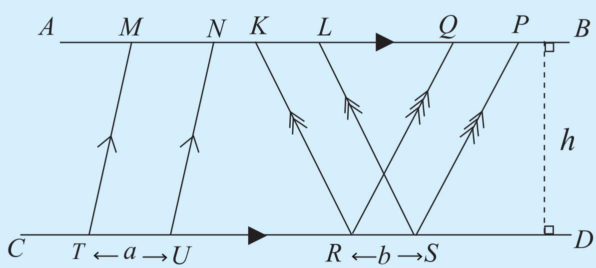
(i) நான்கு இணைகரங் களைப் பெயரிடுக.

(ii) AB, CD ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக் கிடையே இருக்கும் பக்கம் QR ஐ அடியாகக் கொண்ட இரண்டு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.

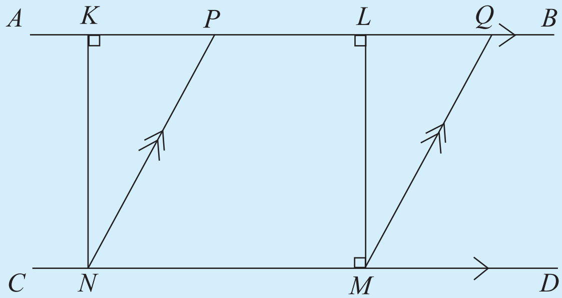
2. உருவில் AQ, CP ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கு மிடையே இருக்கும் ஒரே அடி OP இன் மீது உள்ள எல்லா முக்கோணிகளையும் எழுதுக.



3. உருவில் தரப்பட்டுள்ள AB, CD என்னும் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம் h இனாலும் ஒவ்வோர் இணைகரத்தினதும் அடியின் நீளங்கள் a, b யினாலும் காட்டப்பட்டுள்ளன. அக்குறியீடுகளைக் கொண்டு $PQRS$, $KLSR$, $MNUT$ ஆகிய இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.



4. உருவில் AB, CD ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே செவ்வகம் $KLMN$ உம் இணைகரம் $PQMN$ உம் அமைந்துள்ளன. $NM = 10$ cm உம் $LM = 8$ cm உம் ஆகும்.



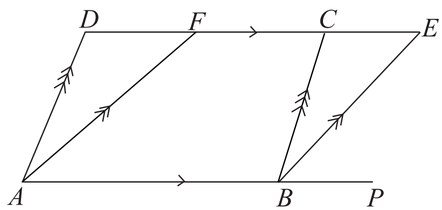
(i) செவ்வகம் $KLMN$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) இணைகரம் $PQMN$ இன் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) செவ்வகம் $KLMN$ இன் பரப்பளவுக்கும் இணைகரம் $PQMN$ இன் பரப்பளவுக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை யாது?

8.2 ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே ஒரே அடி மீது இருக்கும் இணைகரங்களின் பரப்பளவு

அடுத்ததாக நாம் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே அடியின்மீது இருக்கும் இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பைக் கருதுவோம். உருவில் தரப்பட்டுள்ள இரு இணைகரங்களையும் கருதுவோம்.



இங்கு $ABCD$, $ABEF$ ஆகிய இரு இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமமாவெனப் பார்ப்போம். அதற்காக முதலில்

இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = சரிவகம் $ABCF$ இன் பரப்பளவு + முக்கோணி AFD யின் பரப்பளவு

என்பதையும்

இணைகரம் $ABEF$ யின் பரப்பளவு = சரிவகம் $ABCF$ இன் பரப்பளவு + முக்கோணி BEC யின் பரப்பளவு

என்பதையும் அவதானிக்க.

ஆகவே, முக்கோணி AFD யின் பரப்பளவு = முக்கோணி BEC யின் பரப்பளவு ஆக இருந்தால் இரு இணைகரங்களினதும் பரப்பளவுகள் சமமாக இருத்தல் வேண்டுமெனக் காண்பீர்கள்.

உண்மையில் இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றன. ஆகவே அவற்றின் பரப்பளவுகளும் சமமாகும். இவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றனவென ப.கோ.ப சந்தர்ப்பத்தைக் கருதி இவ்வாறு காட்டலாம்.

முக்கோணிகள் AFD, BEC என்பவற்றில்

$AD = BC$ (இணைகரத்தின் $ABCD$ இன் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$AF = BE$ (இணைகரத்தின் $ABEF$ இன் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

மேலும் $D\hat{A}B = C\hat{B}P$ (ஒத்த கோணங்கள் $AD \,//\, BC$)

$F\hat{A}B = E\hat{B}P$ (ஒத்த கோணங்கள் $AF \,//\, BE$ ஆகையால்)

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கழிக்கும்போது $D\hat{A}F = C\hat{B}E$

இதற்கேற்ப, ப.கோ.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ், AFD, BEC ஆகிய இரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றன. இதிலிருந்து, மேலே ஆராய்ந்தவாறு

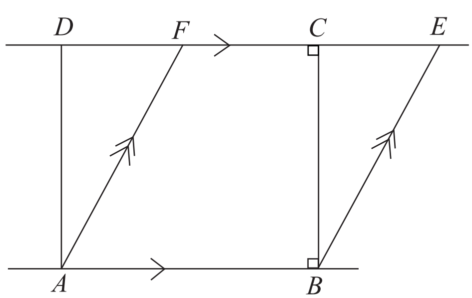
இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABEF$ இன் பரப்பளவு எனக் கிடைக்கும். இப்பேற்றை ஒரு தேற்றமாகப் பின்வருமாறு எழுதிக் காட்டுவோம்.

தேற்றம் : ஒரே அடியின் மீது, ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் இணைகரங்கள் பரப்பளவில் சமமாகும்.

இப்போது இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கியமான பேறைப் பெறுவோம் ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் சூத்திரத்தை நீங்கள் முன்னைய தரங்களில் பயன்படுத்தியுள்ளீர்கள்.

ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவு = அடி × செங்குத்து உயரம்.

இப்போது இப்பேறு எங்ஙனம் கிடைத்தது என்பது பற்றி நீங்கள் முன்னர் சிந்தித்துப் பார்த்திருக்கிறீர்களா? இப்போது நாம் மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி இச்சூத்திரத்தை நிறுவிக் காட்டலாம்.



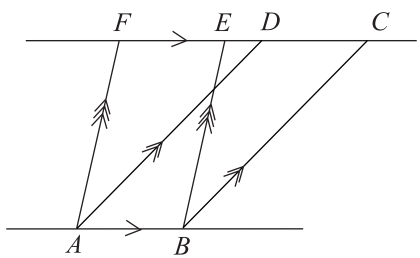
இங்கே ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே, ஒரே அடி மீது இருக்கும் செவ்வகம் $ABCD$ யும் (அதாவது அது ஓர் இணைகரம்) ஓர் இணைகரம் $ABEF$ உம் உள்ளன. மேற்குறித்த தேற்றத்திற்கேற்ப அவற்றின் பரப்பளவுகள் சமம்.

ஆயினும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = நீளம் × அகலம் என நாம் அறிவோம்.
இதற்கேற்ப இணைகரத்தின் பரப்பளவு = செவ்வகத்தின் பரப்பளவு
$= AB \times AD$
$= AB \times$ இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம்
= இணைகரத்தின் அடி × செங்குத்துத் தூரம்

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகள் நடைபெறும் விதத்தை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABEF$ இன் பரப்பளவு 80cm^2 உம் $AB = 8$ cm உம் ஆகும்.

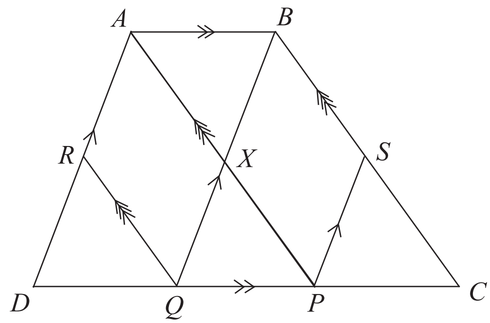


(i) உருவில் ஒரே அடி மீது ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.
(ii) இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு யாது?
(iii) AB, FC ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.

(i) $ABEF$, $ABCD$
(ii) $ABEF$, $ABCD$ ஆகியன ஒரே அடி AB மீதும் AB, FC என்னும் இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையேயும் இருப்பதனால் இணைகரங்கள் $ABEF$ இனதும் $ABCD$ யினதும் பரப்பளவுகள் சமமாகும்.
$\therefore$ இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு 80cm^2 ஆகும்.
(iii) சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்து உயரம் h எனக் கொள்வோம்.
அப்போது $ABEF$ இன் பரப்பளவு $= AB \times h$
$80 = 8 \times h$
$h = 10$

$\therefore$ சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்து உயரம் 10 cm ஆகும்.
இனி, இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவல்கள் செய்யப்படும் முறையை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2



உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

(i) $ABQD$, $ABCP$ ஆகியன இணைகரங்களெனக் காட்டுக.

(ii) $ABQD$, $ABCP$ ஆகியன பரப்பளவில் சமமான இணைகரங்களெனக் காட்டுக.

(iii) $\Delta SPC \equiv \Delta DQR$ என நிறுவுக.

(iv) இணைகரம் $AXQR$ இன் பரப்பளவு = இணைகரம் $BXPS$ இன் பரப்பளவு என நிறுவுக.

(i) நாற்பக்கல் $ABQD$ யில்

$AB//DQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AD//BQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரம் ஆகையால் $ABQD$ ஓர் இணைகரமாகும். அவ்வாறே $AB//PC$, $AP//BC$ ஆகையால் $ABCP$ உம் ஓர் இணைகரமாகும்.

(ii) $ABQD$, $ABCP$ ஆகிய இரு இணைகரங்களும் ஒரே அடி AB மீது, AB, DC ஆகிய ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருப்பதனால், மேற்குறித்த தேற்றத்திற்கேற்ப அவை பரப்பளவில் சமமாகும்.

$\therefore$ இணைகரம் $ABQD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABCP$ யின் பரப்பளவு

(iii) உருவில் SPC, RDQ ஆகிய முக்கோணிகளில்

$S\hat{P}C = R\hat{D}Q$ ($SP//AD$, ஒத்த கோணங்கள்)

$S\hat{C}P = R\hat{Q}D$ ($SC//RQ$, ஒத்த கோணங்கள்)

$AB = PC$ (இணைகரம் $ABCP$ யின் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$AB = DQ$ (இணைகரம் $ABQD$ யின் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$PC = DQ$

$\therefore \Delta SPC \equiv \Delta DQR$ (கோ.கோ.ப.)

(iv) இணைகரம் $ABQD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABCP$ யின் பரப்பளவு (நிறுவப்பட்டது)

ΔRDQ இன் பரப்பளவு = ΔSPC யின் பரப்பளவு ($\Delta RDQ \equiv \Delta SPC$ ஆகையால்)

இணைகரம் $ABQD$ யின் பரப்பளவு $-$ ΔRDQ வின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABCP$ யின் பரப்பளவு $- \Delta SPC$ யின் பரப்பளவு

அப்போது உருவிற்கேற்பச் சரிவகம் $ABQR$ இன் பரப்பளவு = சரிவகம் $ABSP$ யின் பரப்பளவு

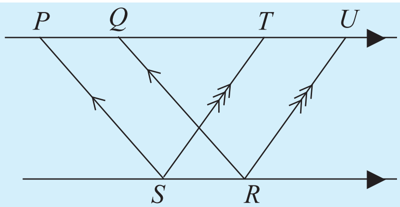
இருபக்கமும் ΔABX இன் பரப்பளவைக் கழிக்கும்போது

சரிவகம் $ABQR$ இன் பரப்பளவு $-$ ΔABX இன் பரப்பளவு = $ABSP$ யின் பரப்பளவு $-$ ΔABX இன் பரப்பளவு

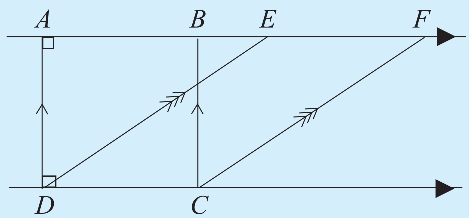
இணைகரம் $AXQR$ இன் பரப்பளவு = இணைகரம் $BXPS$ இன் பரப்பளவு

பயிற்சி 8.2

1. உருவில் PU, SR என்னும் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் இரு இணை கரங்கள் உள்ளன. இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு 40 cm^2 ஆகும். இணைகரம் $TURS$ இன் பரப்பளவைக் கண்டு உங்கள் விடைக்குக் காரணங் காட்டுக.



2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $ABCD$ ஒரு செவ்வகமும் $CDEF$ ஓர் இணைகரமும் ஆகும். $AD = 7$ cm, $CD = 9$ cm எனின், $CDEF$ இன் பரப்பளவைக் காரணங் களுடன் எழுதுக.

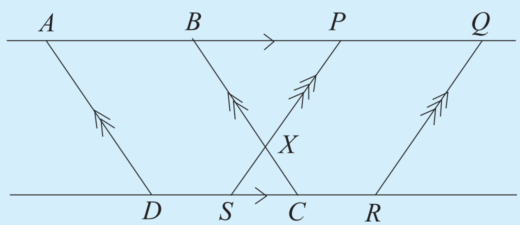


3. உருவில் AQ, DR ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே இருக்கும் $ABCD$, $PQRS$ என்னும் இரு இணை கரங்களில் $DS = CR$ எனின்,

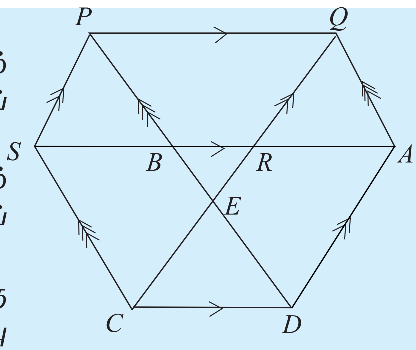
(i) $DC = SR$ எனக் காட்டுக.

(ii) ஐங்கோணி $ABXSD$ யின் பரப்பளவு ஐங்கோணி $PQRCX$ இன் பரப்பளவுக்குச் சமமென நிறுவுக.

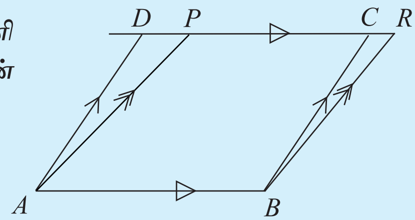
(iii) சரிவகம் $APSD$ யின் பரப்பளவு சரிவம் $BQRC$ யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.



4. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,
   (i) இணைகரம் $PQRS$ இற்குப் பரப்பளவிற் சமமான இரு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.
   (ii) இணைகரம் $ADCR$ இற்குப் பரப்பளவிற் சமமான இரு இணைகரங்களைப் பெயரிடுக.
   (iii) இணைகரம் $PECS$ இன் பரப்பளவிற்கு இணைகரம் $QADE$ யின் பரப்பளவு சமமென நிறுவுக.



5. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப முக்கோணி ADP யின் பரப்பளவு முக்கோணி BRC யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.



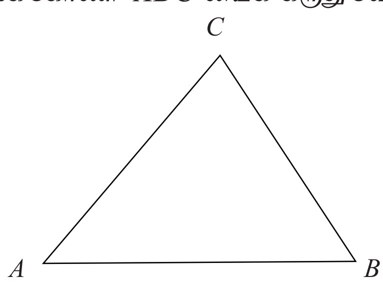
6. $AB = 6$ cm, $D\hat{A}B = 60^0$, $AD = 5$ cm ஆகவுள்ள இணைகரம் $ABCD$ யை அமைக்க. கோடு AB யில் இணைகரம் இருக்கும் பக்கத்தில் இருக்குமாறும் அதன் பரப்பளவிற்குச் சமமாக இருக்குமாறும் சாய்சதுரம் $ABEF$ ஐ அமைக்க. உங்கள் அமைப்பிற்கு நீங்கள் பயன்படுத்திய கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தைக் குறிப்பிடுக.

8.3 ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே ஒரே அடி மீது இருக்கும் இணைகரத்தினதும் முக்கோணியினதும் பரப்பளவுகள்

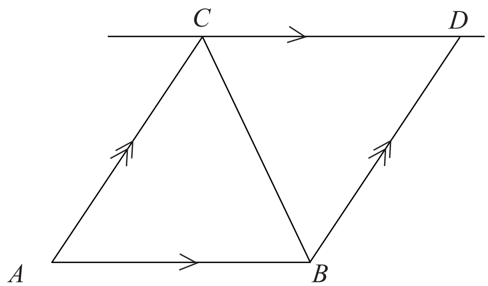
ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள சூத்திரத்தை முன்னைய தரங்களிலிருந்தே பயன்படுத்தியுள்ளீர்கள்.

$$\text{ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவு} = \frac{1}{2} \times \text{அடி} \times \text{செங்குத்து உயரம்}$$

இப்போது நாம் இச்சூத்திரம் ஏன் பொருத்தமானது என்பதை விளக்கத் தயாராகின்றோம். கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC யைக் கருதுவோம்.



அடுத்த உருவில் தரப்பட்டுள்ளவாறு C இற்கூடாக AB யிற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு கோட்டை வரைந்து $ABDC$ இணைகரமாகுமாறு அச்சமாந்தரக் கோட்டின் மீது புள்ளி D ஐக் குறிப்போம். வேறுவிதமாக கூறுவதாயின் AB யிற்குச் சமந்தரமாக C யினூடாக வரையப்படும் கோடும் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரையப்படும் கோடும் இடைவெட்டும் புள்ளியை C எனப் பெயரிடுவோம்.



இப்போது முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவின் அரைமடங்காகும். ஓர் இணைகரத்தில் மூலைவிட்டத்தினால் இணைகரமானது ஒருங்கிசைவான இரண்டு முக்கோணிகளாகப் பிரிக்கப்படுவதே இதற்குக் காரணமாகும். இது பற்றித் தரம் 10 இல் இணைகரங்கள் பாடத்தில் கற்றோம்.எனவே,

முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2} \times AB \times$ (AB, CD கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம்)

$= \frac{1}{2} \times AB \times$ செங்குத்துத் தூரம்

அதாவது முக்கோணியின் பரப்பளவுக்காக நமக்குப் பரிச்சயமான சூத்திரம் கிடைத்துள்ளது.

இங்கு நாம் அவதானித்த முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவு

என்னும் பேற்றைத் திரும்பவும் கவனிக்க. இப்பாடத்தில் 8.2 இல் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோடுகள் இரண்டிற்கிடையே ஒரே அடியின் மீதுள்ள இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமம் எனக் கற்றோம். எனவே மேற்குறித்த உருவிற்கேற்ப, AB, CD ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே அடி AB இன் மீதுள்ள வேறு எந்த இணைகரத்தினதும் பரப்பளவும் இணைகரம் $ABDC$ இன் பரப்பளவுக்குச் சமனாகும் அதாவது,

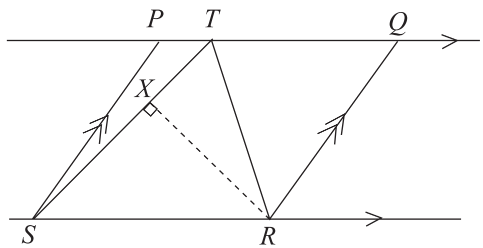
முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ (AB, CD சாமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே அடி AB மீதுள்ள எந்வோர் இணைகரத் தினதும் பரப்பளவு)

இப்பேறு ஒரு தேற்றமாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம்: ஒரு முக்கோணியும் ஓர் இணைகரமும் ஒரே அடியின் மீதும் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருப்பின், முக்கோணியின் பரப்பளவு அவ்விணைகரத்தின் பரப்பளவில் அரைப்பங்காகும்.

இத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கணிப்புகள் செய்யப்படும் விதம்பற்றி இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1



உருவில் ஓர் இணைகரம் $PQRS$ உம் ஒரு முக்கோணி STR உம் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே ஒரே அடி மீது உள்ளன. இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு 60 cm^2 ஆகும்.

(i) முக்கோணி STR இன் பரப்பளவைக் காண்க. உங்கள் விடைக்குக் காரணம் தருக.
(ii) $ST = 6$ cm எனின், R இலிருந்து ST இற்கான செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க.

(i) இணைகரம் $PQRS$ உம் முக்கோணி STR உம் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருப்பதோடு அதே வேளை ஒரே அடி மீதும் உள்ளன. ஆகவே முக்கோணி STR இன் பரப்பளவு இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவில் அரைப்பங்காகும்.

$\therefore$ $\Delta\, STR$ இன் பரப்பளவு $= 30 \text{ cm}^2$

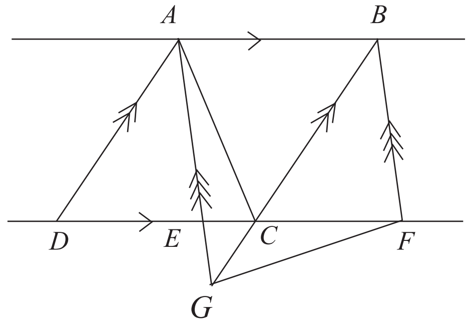
(ii) முக்கோணி STR இன் பரப்பளவு $= \dfrac{1}{2} \times ST \times RX$

$$30 = \frac{1}{2} \times 6 \times RX$$

$$RX = 10 \text{ cm}$$

$\therefore$ R இதிலிருந்து ST இற்கான செங்குத்துத் தூரம் 10 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2



E ஆனது இணைகரம் $ABCD$ இன் பக்கம் DC மீது உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். AE யிற்குச் சமாந்தரமாக B யிலிருந்து வரைந்த கோடு நீட்டப்பட்ட பக்கம் DC யை F இல் சந்திக்கின்றது. நீட்டப்பட்ட AE ஆனது நீட்டப்பட்ட கோடு BC யை G யிற் சந்திக்கின்றது.

(i) $ABFE$ ஓர் இணைகரம் எனவும்
(ii) $ABCD$, $ABFE$ ஆகிய இணைகரங்கள் பரப்பளவிற் சமம் எனவும்
(iii) முக்கோணி ACD யின் பரப்பளவு = முக்கோணி BFG யின் பரப்பளவு எனவும் நிறுவுக.

நிறுவல்

(i) நாற்பக்கல் $ABFE$ யில்

$AE//BF$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AB//EF$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore$ $ABFE$ ஓர் இணைகரம் (எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரம் ஆகையால்)

(ii) $ABCD$, $ABFE$ ஆகிய இரு இணைகரங்களும் AB, DF ஆகிய ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையேயும் ஒரே அடி AB இன் மீதும் உள்ளன.
$\therefore$ தேற்றத்திற்கேற்ப இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு

(iii) இணைகரம் $ABCD$ யும் முக்கோணி ACD யும் DC, AB ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்குமிடையேயும் ஒரே அடி DC மீதும் உள்ளன.
$\therefore$ தேற்றத்திற்கேற்ப $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $= \Delta\, ACD$ யின் பரப்பளவு

அவ்வாறே இணைகரம் $ABFE$ யும் முக்கோணி BFG யும் BF, AG ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையேயும் ஒரே அடி BF மீதும் உள்ளன.

அப்போது $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு $= \Delta\, BFG$ யின் பரப்பளவு

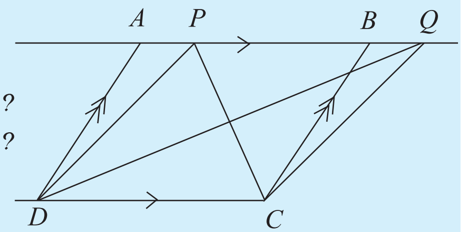
ஆனால், இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு

ஆகையால், $\frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $ABFE$ யின் பரப்பளவு

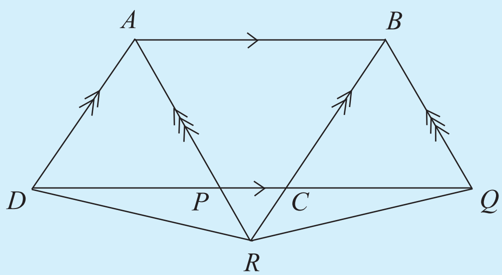
$\therefore$ முக்கோணி ACD யின் பரப்பளவு = முக்கோணி BFG யின் பரப்பளவு

பயிற்சி 8.3

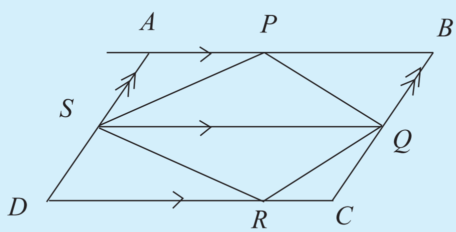
1. உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $50\ \text{cm}^2$ ஆகும்.
   (i) முக்கோணி PDC யின் பரப்பளவு யாது ?
   (ii) முக்கோணி DCQ வின் பரப்பளவு யாது ?



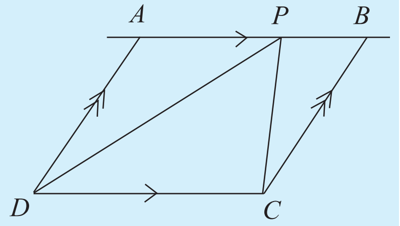
2. இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் DC மீது புள்ளி P உள்ளது. AP யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாக வரையப் பட்டுள்ள கோடு நீட்டப்பட்ட பக்கம் DC யை Q இற் சந்திக்கின்றது. நீட்டப் பட்ட AP யும் நீட்டப்பட்ட பக்கம் BC யும் R இற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி ADR இன் பரப்பளவு முக்கோணி BQR இன் பரப்பளவுக்குச் சமமென நிறுவுக.



3. உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AD யை S இலும் பக்கம் BC யை Q இலும் சந்திக்குமாறு AB யிற்குச் சமாந்தரமாக SQ வரையப்பட்டுள்ளது. நாற்பக்கல் $PQRS$ இன் பரப்பளவு இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவின் அரைப்பங்கு என நிறுவுக.

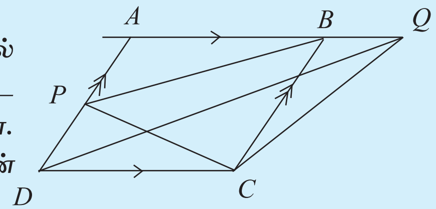


4. P ஆனது உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யின் பக்கம் AB மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாகும்.

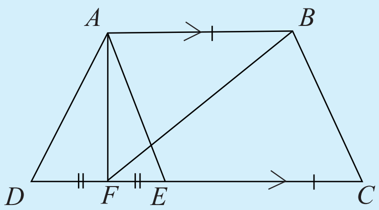


ΔAPD யின் பரப்பளவு $+$ ΔBPC யின் பரப்பளவு $=$ ΔDPC யின் பரப்பளவு என நிறுவுக.

5. உருவில் உள்ள இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AD மீது புள்ளி P யும் நீட்டப்பட்ட பக்கம் AB மீது புள்ளி Q வும் உள்ளன. ΔCPB யின் பரப்பளவு $=$ ΔCQD யின் பரப்பளவு என நிறுவுக.



6. சரிவகம் $ABCD$ யில் $AB \,//\, CD$, $DC > AB$ ஆகும். $AB = CE$ ஆக இருக்குமாறு பக்கம் DC மீது புள்ளி E உள்ளது. முக்கோணி AFE யின் பரப்பளவு முக்கோணி ADF இன் பரப்பளவுக்குச் சமமாக இருக்குமாறு பக்கம் DE மீது புள்ளி F உள்ளது. சரிவகம் $ABFD$ யின் பரப்பளவு சரிவகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவின் அரைப்பங்கென நிறுவுக.

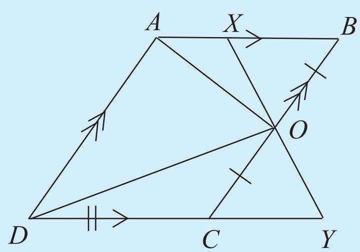


7. இணைகரம் $ABCD$ யின் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி O ஆகும். X என்பது பக்கம் AB மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாகும் நீட்டப்பட்ட XO வும் நீட்டப்பட்ட DC யும் Y யிற் சந்திக்கின்றன.

(i) ΔBOX இன் பரப்பளவு $=$ ΔCOY யின் பரப்பளவு எனவும்

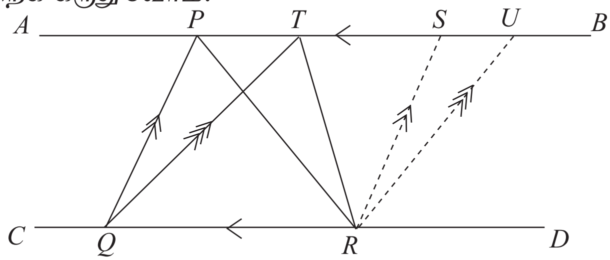
(ii) சரிவகம் $AXYD$ யின் பரப்பளவு $=$ சரிவகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு எனவும்

(iii) சரிவகம் $AXYD$ யின் பரப்பளவு முக்கோணி ADO வின் பரப்பளவின் இரு மடங்கு எனவும் நிறுவுக.



8.4 ஒரே சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே, ஒரே அடி மீது உள்ள முக்கோணிகளின் பரபப்ளவு

தரப்பட்டுள்ள AB, CD உருவில் ஆகிய சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையில் QR என்னும் ஒரே அடியைக் கொண்டு அமைந்திருக்கும் எந்தவொரு முக்கோணிகளுமான PQR, TQR என்பவற்றைக் கருதுவோம்.



முக்கோணி PQR இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு

முக்கோணி TQR இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $TQRU$ இன் பரப்பளவு

ஆனால் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையேயும் QR ஒரே அடி மீதும் அமைந்துள்ளதால் தேற்றத்துக்கமைய

இணைகரம் $PQRS$ இன் பரப்பளவு = இணைகரம் $TQRU$ இன் பரப்பளவு

$\therefore \frac{1}{2}$ இணைகரம் $PQRS$ யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் $TQRU$ யின் பரப்பளவு

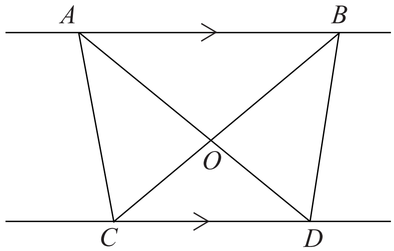
$\therefore$ முக்கோணி PQR இன் பரப்பளவு = முக்கோணி TQR இன் பரப்பளவு

QR ஒரே அடியைக் கொண்டு PU, QR என்னும் ஒரே இரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே அமைந்த முக்கோணி PQR, முக்கோணி TQR எனபவற்றின் பரப்பளவுகள் சமனாகின்றன. இதனைப் பின்வருமாறு ஒரு தேற்றமாகக் காட்டலாம்.

தேற்றம்: ஒரே அடி மீதும் ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்குமிடையே இருக்கும் முக்கோணிகள் பரப்பளவிற் சமமாகும்.

இங்கு இனங்கண்ட தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1



உருவில் $AB//CD$ ஆகும்.

(i) முக்கோணி ACD யிற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுவதற்கு ஏதுவான கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தை எழுதுக.

(ii) முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு 30 cm^2 எனின், முக்கோணி ABD யின் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) முக்கோணி AOC யின் பரப்பளவு, முக்கோணி BOD யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

(i) முக்கோணி BCD

ஒரே சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகள் சமம்.

(ii) முக்கோணி ABD யின் பரப்பளவு $= 30 \text{ cm}^2$

(iii) $\Delta ACD = \Delta BCD$ (ஒரே அடி CD ; $AB//CD$)

உருவிற்கேற்ப இவ்விரு முக்கோணிகளுக்கும் ΔCOD பொதுவாகும். அப்பகுதியை நீக்கும்போது

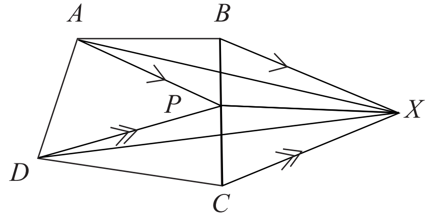
$$\Delta ACD - \Delta COD = \Delta BCD - \Delta COD$$

$$\therefore \Delta AOC = \Delta BOD$$

உதாரணம் 2

நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் பக்கம் BC மீது புள்ளி P உள்ளது. AP யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடும் DP யிற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடும் X இற் சந்திக்கின்றன.

ΔADX இன் பரப்பளவு நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.



நிறுவல் : AP, BX ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கிடையே இருக்கும் அதேவேளை அடி AP மீது APB, APX ஆகிய முக்கோணிகள் இருக்கின்றமையால், தேற்றத்திற்கேற்ப

$\Delta APB = \Delta APX$ ———— (1)

அவ்வாறே $DP//CX$ ஆகையால்,

$\Delta DPC = \Delta DPX$ ———— (2)

(1) + (2), $\Delta ABP + \Delta DPC = \Delta APX + \Delta DPX$

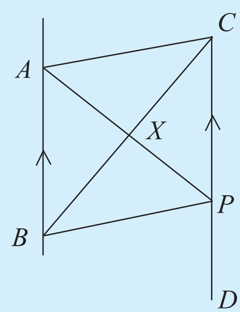
இரு பக்கங்களுடனும் ΔADP இன் பரப்பளவைக் கூட்டுவோம்.

அப்போது $\Delta ABP + \Delta DPC + \Delta ADP = \Delta APX + \Delta DPX + \Delta ADP$

நாற்பக்கல் $ABCD = \Delta ADX$

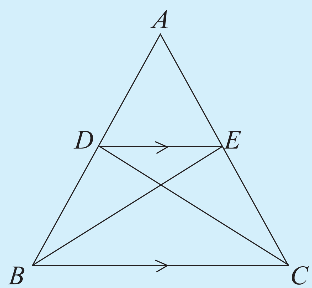
பயிற்சி 8.4

1. உருவில் உள்ள AB, CD ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே இருக்கும் முக்கோணி ABP யின் பரப்பளவு 25 cm^2 ஆகும்.



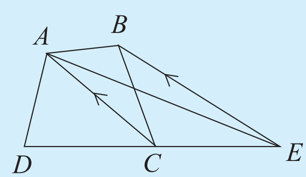
   (i) முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு யாது ?
   (ii) முக்கோணி ABX இன் பரப்பளவு 10 cm^2 எனின், முக்கோணி ACX இன் பரப்பளவு யாது ?
   (iii) ACX, BPX ஆகிய முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகளுக் கிடையே உள்ள தொடர்பு யாது?

2. முக்கோணி ABC யில் பக்கம் AB யை D யிலும் பக்கம் AC யை E யிலும் சந்திக்குமாறு BC யிற்குச் சமாந்தரமாக DE வரையப்பட்டுள்ளது.



   (i) ΔBED யிற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுக.
   (ii) ΔABE யும் ΔADC யும் பரப்பளவிற் சமமென நிறுவுக.

3. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் மூலைவிட்டம் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாக வரையப்பட்டுள்ள கோடு நீட்டப்பட்ட DC யை E யிற் சந்திக்கின்றது.

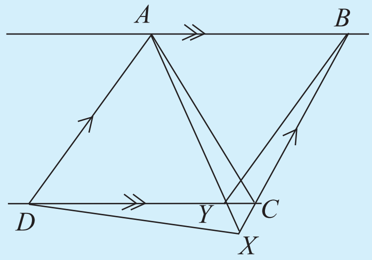


   (i) ΔABC யிற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணியைப் பெயரிடுக. விடைக்குக் காரணங் காட்டுக.
   (ii) நாற்பக்கல் $ABCD$ யின் பரப்பளவு முக்கோணி ADE யின் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

4. இணைகரம் $ABCD$ யில் A யிலிருந்து வரையப்பட்டுள்ள யாதாயினும் ஒரு கோடு பக்கம் DC யை Y யிலும் நீட்டப்பட்ட பக்கம் BC யை X இலும் இடைவெட்டுகின்றது.

(i) ΔDYX, ΔAYC ஆகியன பரப்பளவிற் சமம் என நிறுவுக.

(ii) ΔBCY, ΔDYX ஆகியன பரப்பளவிற் சமம் என நிறுவுக.



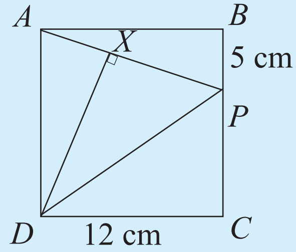
5. இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் BC மீது புள்ளி Y உள்ளது. நீட்டப்பட்ட கோடு AB யும் நீட்டப்பட்ட கோடு DY யும் X இற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி AXY இன் பரப்பளவு முக்கோணி BCX இன் பரப்பளவிற்குச் சமமென நிறுவுக.

6. BC என்பது 8 cm நீளமுள்ள ஒரு நிலைத்த நேர்கோட்டுத் துண்டமாகும். முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு 40 cm^2 ஆக இருக்குமாறு புள்ளி A யின் ஒழுக்கை ஒரு பரும்படிப் படத்தின் மூலம் விவரிக்க.

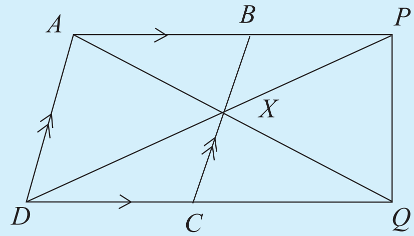
7. $AB = 8$ cm, $AC = 7$ cm, $BC = 4$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைக்க. AB யிலிருந்து C இருக்கும் பக்கத்தில் P இருக்குமாறும் பரப்பளவில் முக்கோணி ABC யிற்குச் சமமாக இருக்குமாறும் $PA = PB$ ஆக இருக்குமாறும் உள்ள முக்கோணி PAB யை அமைக்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. சதுரம் $ABCD$ யின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 cm ஆகும். $BP = 5$ cm ஆக இருக்குமாறு பக்கம் BC மீது புள்ளி P உள்ளது. D யில் இருந்து AP யிற்கு வரைந்த செங்குத்தின் அடி X ஆகும். DX இன் நீளத்தைக் காண்க.



2. X என்பது இணைகரம் $ABCD$ யின் பக்கம் BC மீது உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். நீட்டப் பட்ட DX ஆனது நீட்டப்பட்ட பக்கம் AB யை P யிலும் நீட்டப்பட்ட AX ஆனது நீட்டப்பட்ட DC யை Q விலும் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி PXQ வின் பரப்பளவு இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவில் அரைப்பங்கென நிறுவுக.



3. இணைகரம் $PQRS$ இன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று O இல் இடைவெட்டுகின்றன. பக்கம் SR மீது புள்ளி A உள்ளது. முக்கோணி POQ வினதும் முக்கோணி PAQ வினதும் பரப்பளவுகளுக்கிடையே உள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

4. $ABCD$, $ABEF$ ஆகியன பக்கம் AB யின் இரு பக்கங்களிலும் வரையப்பட்ட பரப்பளவிற் சமமற்ற இரு இணைகரங்களாகும்.

(i) $DCEF$ ஓர் இணைகரம் எனவும்

(ii) இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $DCEF$, $ABEF$ ஆகிய இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் எனவும்

நிறுவுக.

5. இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AB யை E யிலும் பக்கம் AD யை F இலும் இடைவெட்டுமாறு BD யிற்குச் சமாந்தரமாக EF வரையப்பட்டுள்ளது.

(i) ΔBEC யும் ΔDFC யும் பரப்பளவிற் சமம் எனவும்

(ii) ΔAEC யும் ΔAFC யும் பரப்பளவிற் சமம் எனவும்

நிறுவுக