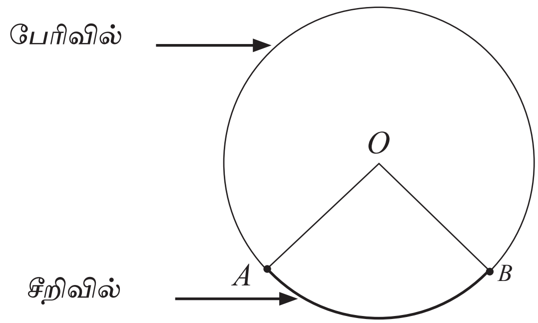
31 வட்டத்தின் கோணங்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,

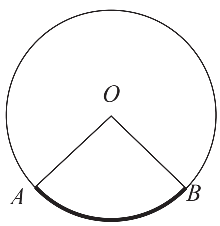
- வட்டத்தின் கோணங்கள் தொடர்பான தேற்றங்களை அறியவும் அவற்றைப் பிரயோகித்து ஏறிகளை நிறுவவும்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

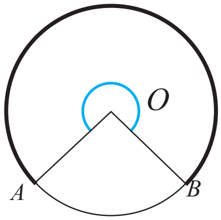
31.1 வட்ட வில்லொன்றினால் வட்டத்தின் மையத்திலும் வட்டத்தின் பரிதியின் மீதும் எதிரமைக்கும் கோணங்கள்



வட்டத்தின் மீதுள்ள A , B ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளினால் வட்டத்தின் பரிதி இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. இப்பகுதிகள் விற்கள் எனப்படும். A ஐயும் B ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோடானது வட்டத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்லும்போது, அதாவது வட்டத்தின் விட்டமாகும்போது இவ்விற்கள் நீளத்தில் சமனானவை ஆகும். அவ்வாறு செல்லாதபோது இரண்டு விற்களும் நீளத்தில் சமனற்றவை ஆகும். நீளத்தில் சிறிய வில் **சீறிவில்** எனவும் நீளத்தில் பெரிய வில் **பேரிவில்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

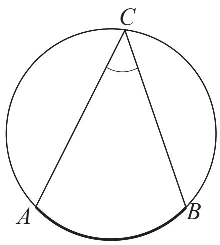


மேலேயுள்ள உருவில் கடும் நிறத்தினால் காட்டப்பட்டுள்ள சீறிவில்லின் இரு அந்தங்களையும் வட்டத்தின் மையத்துடன் இணைப்பதால் உருவாகும் கோணம் $A\hat{O}B$ ஆனது சீறிவில் AB இனால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் என அழைக்கப்படும்.

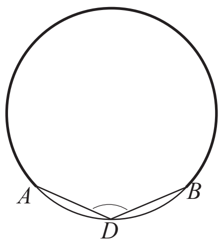


அருகிலுள்ள உருவில் கடும் நிறத்தினால் காட்டப்பட்டுள்ள பேரி வில்லின் இரு அந்தங்களையும் வட்டத்தின் மையத்துடன் இணைப்பதால் உருவாகும் கோணமாகிய பின்வளைகோணம் $A\hat{O}B$ ஆனது பேரிவில் AB இனால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் என அழைக்கப்படும்.

குறிப்பு : பேரிவில்லினால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் எப்போதும் பின்வளை கோணமாகும்.

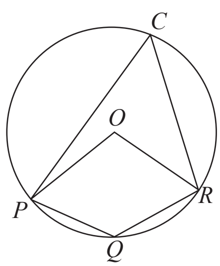


C என்பது பேரிவில் AB இன் மீதுள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளி எனக் கொள்வோம். சீறிவில் AB இன் இரு அந்தங்களையும் பேரிவில்லின் மீதுள்ள புள்ளி C உடன் இணைப்பதன்மூலம் $A\hat{C}B$ பெறப்படும்.



அதாவது $A\hat{C}B$ என்பது சீறிவில் AB இனால் பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணமாகும். இவ்வாறே, இங்கே தரப்பட்டுள்ள உருவில் $A\hat{D}B$ ஆனது பேரிவில் AB இனால் பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணம் என அழைக்கப்படும்.

உதாரணம் 1



O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டம் உருவில் காணப்படுகின்றது.

(i) சீறிவில் PR இன்மூலம்

(a) பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கும் கோணத்தையும்

(b) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தையும் எழுதுக.

(ii) பேரிவில் PR இன்மூலம்

(a) பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கும் கோணத்தையும்

(b) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தையும் எழுதுக.

(i) (a) $P\hat{C}R$

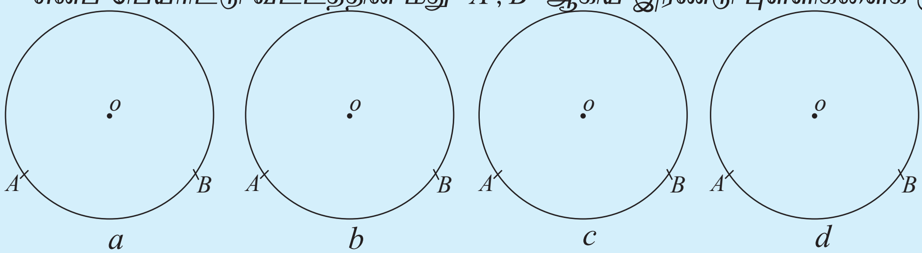
(b) $P\hat{O}R$

(ii) (a) $P\hat{Q}R$

(b) பின்வளைகோணம் $P\hat{O}R$

பயிற்சி 31.1

1. தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள 4 வட்டங்களையும் உங்களது அப்பியாசப் புத்தகத்தில் பிரதிசெய்துகொள்க. ஒவ்வொரு வட்டத்தினதும் மையத்தை O எனப் பெயரிட்டு வட்டத்தின் மீது A , B ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளைக் குறிக்க.



கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சந்தர்பத்திலும் கேட்க்கப்பட்டுள்ள கோணத்தைக் குறிக்க.

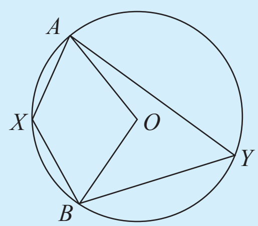
(i) உரு a இல் சீறிவில் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணத்தைக் குறிக்க.

(ii) உரு b இல் சீறிவில் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணத்தைக் குறிக்க.

(iii) உரு c இல் பேரிவில் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணம்

(iv) உரு d இல் பேரிவில் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம்

2. தரப்பட்டுள்ள உருவிலிருந்து



(i) சீறிவில் AB

(a) வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணம்

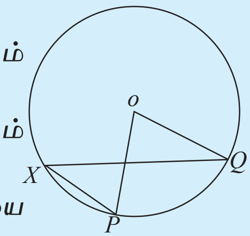
(b) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் ஆகியவற்றை எழுதுக.

(ii) பேரிவில் AB

(a) வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணம்

(b) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் ஆகியவற்றை எழுதுக.

3. தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள வட்டத்தின் மையம் O ஆகும். பேரிவில் PQ இன் மீது புள்ளி X அமைந்துள்ளது.



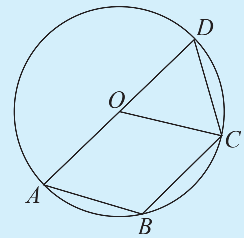
(i) சீறிவில் PQ வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

(ii) சீறிவில் PQ வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

(iii) சீறிவில் PQ இலுள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியை Y எனப் பெயரிடுக. கோணம் PYQ ஐ விபரிக்க.

(iv) பேரிவில் $P\,Q$ வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

4. தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள வட்டத்தின் மையம் O ஆகும்.



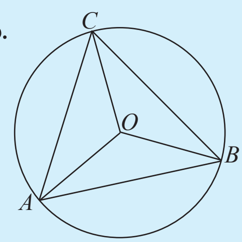
(i) சீறிவில் AC வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணத்தைக் எழுதுக.

(ii) சீறிவில் AC மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

(iii) பேரிவில் AC வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தைக் எழுதுக.

(iv) பேரிவில் AC வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்தை எழுதுக.

5. தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள வட்டத்தின் மையம் O ஆகும்.



(i) சீறிவில் AB

(a) வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணம்.

(b) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் ஆகியவற்றை எழுதுக.

(ii) சீறிவில் BC

(a) வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் ஒரு கோணம்

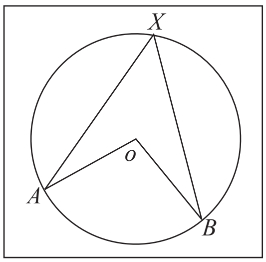
(b) வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் ஆகியவற்றை எழுதுக.

31.2 வட்டமொன்றின் மையக் கோணத்திற்கும் பரிதிக் கோணத்திற்கும் இடையேயான தொடர்பு

ஒரு வட்ட வில்லானது மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணத்திற்கும் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கும் கோணத்திற்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பை ஓர் எளிய செயற்பாட்டினூடாக அறிந்து கொள்வோம்.

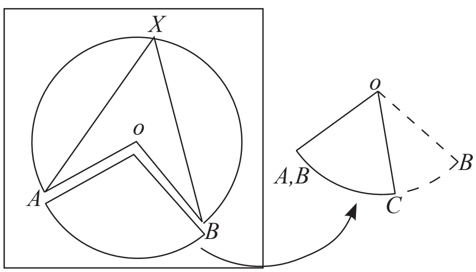
செயற்பாடு

ஒரு திசுத் தாளில் வட்டமொன்றை வரைந்து மையத்தை O எனப் பெயரிடுக. ஒரு சீறிவில்லும் ஒரு பேரிவில்லும் பெறப்படுமாறு வட்டத்தின் மீது இரண்டு புள்ளிகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளை AB எனப் பெயரிடுக.



பேரிவில்லின் மீது ஒரு புள்ளியைக் குறித்து அதனை X எனப் பெயரிடுக.

சீறிவில் ABஇனால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தை அறிந்து கொள்க. அது $A\hat{O}B$ ஆகும். கீழே உள்ள உருவில் தரப்பட்டுள்ளவாறு ஆரைச்சிறை AOB ஐ வெட்டி வேறாக்கிக் கொள்க.



- $A\hat{O}B$ இன் அரைவாசியைப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக வேறாக்கிய ஆரைச்சிறை AOB ஐ OA இன் மீது OB பொருந்துமாறு இரண்டாக மடிக்க.
- மடித்த ஆரையை $A\hat{X}B$ இன்மீது வைத்து அவதானிக்க.

அதாவது சீறிவில் AB இனால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணமாகிய $A\hat{O}B$ ஆனது அவ்வில்லினால் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் எதிரமைக்கப்படும் $A\hat{X}B$ இன் இருமடங்காகிறது என்பது செயற்பாட்டின் மூலம் நிரூபிக்கப்பட்டிருக்கும் .

மேற்குறித்தவாறே வெவ்வேறு ஆரைகளையுடைய வட்டங்களில் வெவ்வேறு நீளங்களிலான விற்களைக் குறித்து மேற்குறித்த செயற்பாட்டை மீண்டும் செய்க.

மேற்குறித்த செயற்பாடுகளில் ஒரு வட்ட வில்லினால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணமானது அவ்வில்லினால் வட்டத்தின் எஞ்சிய வில்லின்மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இரண்டு மடங்காகும் என்பதை அவதானிக்கக் கூடியதாயிருக்கும்.

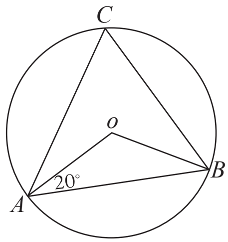
இப்பேறானது ஒரு கேத்திரகணித முடிவாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம்

ஒரு வட்டவில்லினால் வட்டத்தின் மையத்தின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணம், அவ்வில்லினால் வட்டத்தின் எஞ்சிய பரிதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இரண்டு மடங்காகும்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கணித்தல்களைச் செய்யும் முறைபற்றி கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்கள் மூலம் ஆராய்வோம்.

O ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $O\hat{A}B = 20^\circ$ ஆயின் $A\hat{C}B$ இன் பெறுமானம் காண்போம்.



$OA = OB$ (ஒரு வட்டத்தின் ஆரைகள் சமனானவை.)

$\therefore$ முக்கோணி OAB ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும். ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமனானவை என்பதால்

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A$$

$$\therefore\ O\hat{B}A = 20^\circ \text{ (} O\hat{A}B = 20^\circ \text{ என்பதால்)}$$

ஒரு முக்கோணியின் 3 அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்

$$A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = 180^\circ \text{ ஆகும்.}$$

$O\hat{A}B = 20^\circ,\ O\hat{B}A = 20^\circ$ என்பவற்றை சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவதால்,

$$A\hat{O}B + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$A\hat{O}B + 40^\circ = 180^\circ$$

$$A\hat{O}B = 180^\circ - 40^\circ$$

$$A\hat{O}B = 140^\circ$$

சீறிவில் AB இனால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் $A\hat{O}B$ ஆகும். இவ்வில்லினால் வட்டத்தின் வில்லின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணம் $A\hat{C}B$ என்பதால் தேற்றத்தின்படி

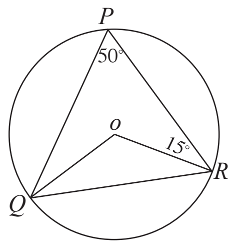
$$2\,A\hat{C}B = A\hat{O}B$$

$$\therefore A\hat{C}B = \frac{140^\circ}{2}$$

$$\therefore A\hat{C}B = 70^\circ$$

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் மையம் O ஆகும். தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து $P\hat{Q}R$ ஐக் காண்க.



$Q\hat{O}\mathrm{R} = 2\,Q\hat{P}R$ (ஒரு வட்டத்தின் வில்லினால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் அவ்வில்லினால் வட்டத்தின் எஞ்சிய வில்லின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்.)

$$\therefore Q\hat{O}R = 2 \times 50^\circ$$
$$= 100^\circ$$

$\Delta\, OQR$ இல்

$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q + Q\hat{O}R = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் மூன்று அகக் கோணங்களினதும் கூட்டுதொகை 180° என்பதால்)

$$O\hat{Q}R + O\hat{R}\mathrm{Q} + 100^\circ = 180^\circ$$

$$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q = 80^\circ \text{ —— } (1)$$

$OQ = OR$ (ஒரு வட்டத்தின் ஆரைகள் சமனாகும்)

$\therefore O\hat{Q}R = O\hat{R}Q$ (ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரான கோணங்கள் சமனானவை என்பதால்)

① இற்கேற்ப $2\,O\hat{R}Q = 80^\circ$

$$O\hat{R}Q = \frac{80}{2}$$

$$O\hat{R}Q = 40^\circ$$

$$P\hat{R}Q = P\hat{R}O + O\hat{R}Q$$

$$P\hat{R}Q = 15^\circ + 40^\circ$$

$$P\hat{R}Q = 55^\circ$$

$\Delta\, PQR$ இல்

$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் 3 அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்)

$$P\hat{Q}R + 50^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$

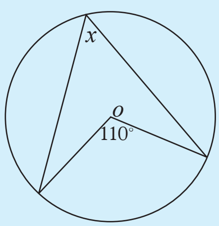
$$P\hat{Q}R + 105^\circ = 180^\circ$$

$$P\hat{Q}R = 180^\circ - 105^\circ$$

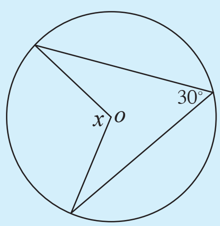
$$P\hat{Q}R = 75^\circ$$

பயிற்சி 31.2

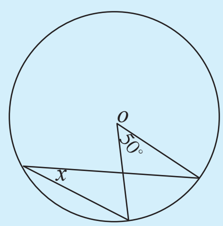
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் O இனால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப x இன் பெறுமானம் காண்க.



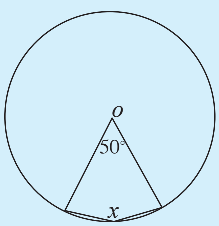
(i)



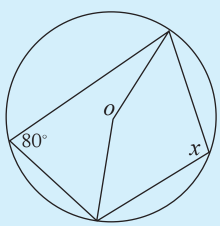
(ii)



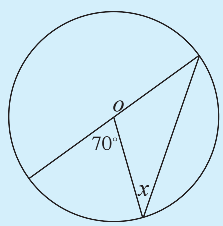
(iii)



(iv)



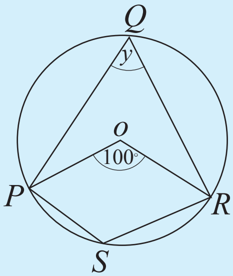
(v)



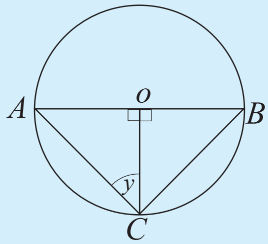
(vi)

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் O இனால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப காரணங்களைக் காட்டி y இன் பெறுமானம் காண்க.

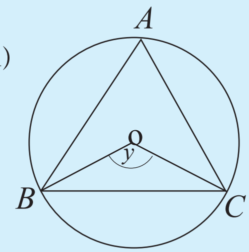
(i)



(ii)

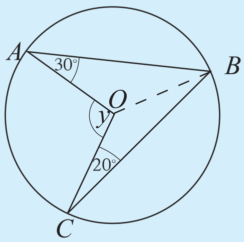


(iii)

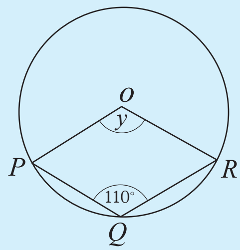


$A\hat{B}C = 70°$, $A\hat{C}B = 60°$

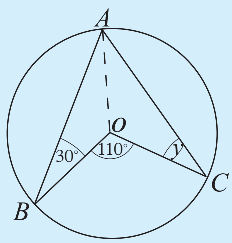
(iv)



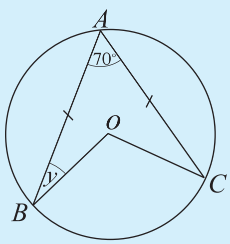
(v)



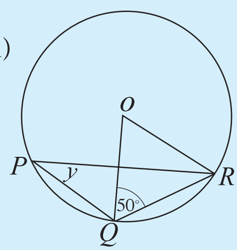
(vi)



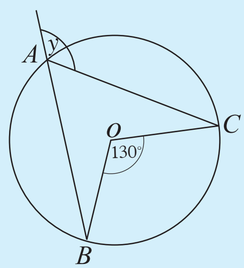
(vii)



(viii)

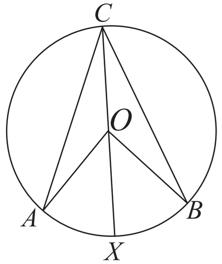


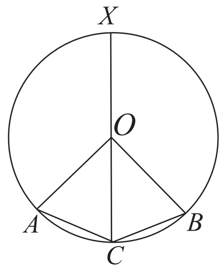
(ix)



"ஒரு வட்டத்தின் வில்லினால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் அவ்வில்லினால் பரிதியின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இருமடங்காகும் "

என்னும் தேற்றத்தின் முறையான நிறுவல்





தரவு :- O ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீது A,B,C ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.

நிறுவ வேண்டியது: $A\hat{O}B = 2\,A\hat{C}B$

அமைப்பு:- கோடு CO ஐ X வரை நீட்டுக.

நிறுவல் :- $OA = OC$ (ஒரே வட்டத்தின் ஆரைகள் சமன்)

$O\hat{A}C = O\hat{C}A$ ① (முக்கோணி ஒன்றின் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரான கோணங்கள்)

$O\hat{A}C + O\hat{C}A = X\hat{O}A$ —② (ஒரு முக்கோணியின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டுவதால் உண்டாகும் புறக்கோணம் அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் இரண்டினதும் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன் என்பதால்)

1 , 2 என்பவற்றால் $X\hat{O}A = 2\ O\hat{C}A$ — 3

இவ்வாறே $X\hat{O}B = 2\ O\hat{C}B$ — 4

3 , 4 இதற்கேற்ப $\underbrace{X\hat{O}A + X\hat{O}B} = 2\ O\hat{C}A + 2\ O\hat{C}B$

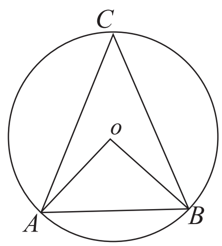
$$A\hat{O}B = 2\ \underbrace{(O\hat{C}A + O\hat{C}B)}$$

$$A\hat{O}B = 2\ A\hat{C}B$$

மேலே நிறுவிய தேற்றதிலிருந்து ஒத்த பிரசினங்களை நிறுவும் முறை பற்றி இனிப் பார்ப்போம்

உதாரணம் 2

O ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் மீது A,B,C ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $A\hat{C}B + A\hat{B}C = A\hat{O}B$ ஆயின் $AC = AB$ எனக் காட்டுக.



நிறுவல்- $A\hat{C}B + A\hat{B}C = A\hat{O}B$ — 1 (தரப்பட்டுள்ளது)

$2A\hat{C}B = A\hat{O}B$ — 2 (ஒரு வட்டவில்லானது மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் அவ்வில் வட்டத்தின் எஞ்சிய பரிதியின்மீது எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்).

1, 2 என்பவற்றிலிருந்து $2A\hat{C}B = A\hat{C}B + A\hat{B}C$

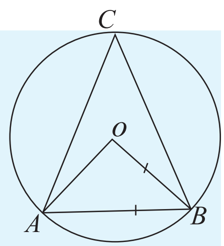
$$2A\hat{C}B - A\hat{C}B = A\hat{B}C$$

$$A\hat{C}B = A\hat{B}C$$

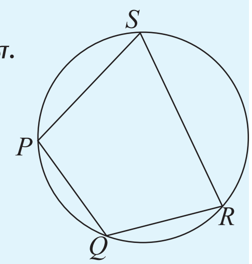
எனவே, $AC = AB$ (ஒரு இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான கோணங்களுக்கு எதிரான பக்கங்கள் சமனானவை என்பதால்)

பயிற்சி 31.3

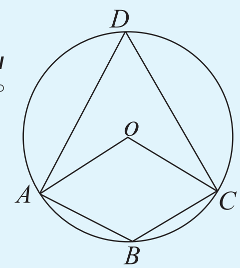
1. O மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $OB = AB$ ஆயின் $A\hat{C}B = 30^\circ$ எனக் காட்டுக.



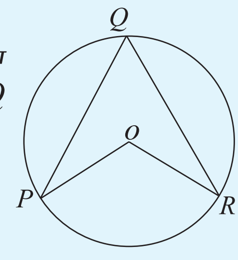
2. ஒரு வட்டத்தின் மீது P, Q, R, S ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $P\hat{Q}R + P\hat{S}R = 180^\circ$ என நிறுவுக.



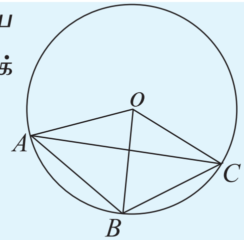
3. O ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $A\hat{O}C = A\hat{B}C$ ஆயின் $A\hat{D}C = 60^\circ$ எனக் காட்டுக.



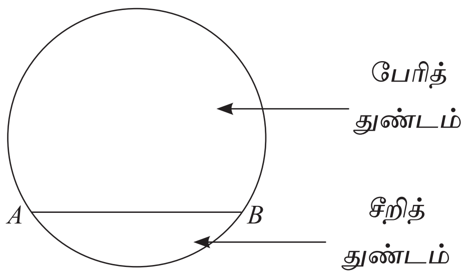
4. P, Q, R ஆகிய புள்ளிகள் O ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. $O\hat{P}Q = O\hat{R}Q$ ஆயின் $P\hat{O}R = 4\, O\hat{R}Q$ எனக் காட்டுக. (OQ ஐ இணைக்க.)



5. O ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் மீது A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. $A\hat{O}C = 2\,(B\hat{A}C + B\hat{C}A)$ எனக் காட்டுக.

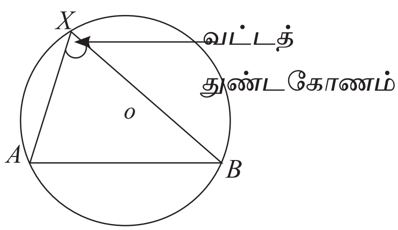


31.3 ஒரே வட்டத் துண்டத்திலுள்ள கோணங்களுக்கிடையிலான தொடர்பு



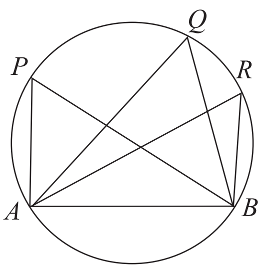
ஒரு வட்டமும் அவ்வட்டத்தில் வரையப்பட்ட நாண் AB உம் உருவில் தரப்பட்டுள்ளன. அந்நாணின் மூலம் வட்டமானது இரண்டு பிரதேசங்காளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒரு பிரதேசம் நாணினாலும் பேரிவில்லினாலும் அமைக்கப்பட்ட **பேரித்துண்டமாகும்.**

மற்றைய பிரதேசம் நாணினாலும் சீறி வில்லினாலும் அமைக்கப்பட்ட **சீறித் துண்டமாகும்.**

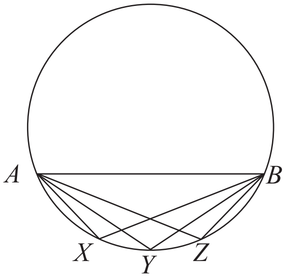


ஒரு நாணின் இரண்டு அந்தங்களையும் வட்டத் துண்டத்தின் வில்லின்மீது அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கும்போது உருவாகும் கோணம் வட்டத் துண்டக் கோணம் எனப்படும்.

வட்டத் துண்டம். AXB இலுள்ள துண்டக் கோணம் $A\hat{X}B$ ஆகும்.



$A\hat{P}B, A\hat{Q}B$, $A\hat{R}B$ ஆகியன வட்டத்தின் பேரித் துண்டத்தைச் சேர்ந்த வட்டத் துண்டக் கோணங்களாகும். எனவே $A\hat{P}B, A\hat{Q}B$, $A\hat{R}B$ ஆகியவை ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள் எனப்படும்.

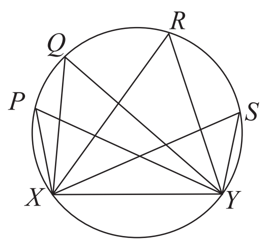


உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள $A\hat{X}B, A\hat{Y}B$, $A\hat{Z}B$ ஆகிய கோணங்கள் சீறித் துண்டத்தைச் சேர்ந்த ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்களாகும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாடுகளின் மூலம் ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்களுக்கு கிடையேயுள்ள தொடர்பை அறிந்து கொள்வோம்.

செயற்பாடு 1

- ஒரு தாளின்மீது வட்டமொன்றை வரைவோம். வட்டத்தின் மீது X , Y என்னும் இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து நாண் XY ஐ வரைக.
- பேரித் துண்டத்தின் வில்லின் மீது P, Q, R, S ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளை நாண் XY இன் இரண்டு அந்தங்களுடனும் தொடுக்க. அப்போது பேரித் துண்டத்தைச் சேர்ந்த $X\hat{P}Y, X\hat{Q}Y, X\hat{R}Y, X\hat{S}Y$ ஆகிய ஒரே துண்டக் கோணங்கள் பெறப்படும்.



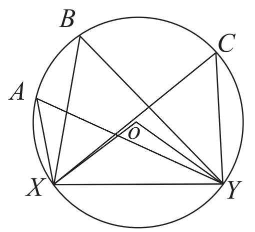
வரைந்த ஒரே துண்டக் கோணங்களைப் பாகைமானியால் அளக்க மேற்குறிப்பிட்டவாறு வட்டத்தின் சீறித் துண்டத்தைச் சேர்ந்த வட்டத் துண்டத்தில் சில கோணங்களை வரைந்து அக்கோணங்களை அளந்து பெறப்படும் பெறுமானங்களையும் பரீட்சித் துப் பாருங்கள்.

ஒரே வட்டத்துண்டத்திலுள்ள கோணங்கள் அளவில் சமனானவை என்பதை நீங்கள் அவதானிக்க முடியும்.

இச்செயற்பாடுகளில் ஈடுபடுவதன்மூலம் ஒரே வட்டத்துண்டத்திலுள்ள கோணங்கள் சமனானவை என்பதை அறிந்துகொண்டிருப்பீர்கள்.

தேற்றம் :- ஒரே வட்டத்துண்டக் கோணங்கள் சமனானவை ஆகும்.

இத்தேற்றத்தை கேத்திர கணித நிறுவலின் மூலம் உறுதிப்படுத்திக் கொள்வோம்.



தரவு:- O ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் நாண் XY அமைந்துள்ள அதே பக்கத்தில் வட்டத்தின் மீது A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.

நி. வே:- $X\hat{A}Y = X\hat{B}Y = X\hat{C}Y$

அமைப்பு:- OX ஐயும் OY ஐயும் இணைக்க.

நிறுவல்:- $X\hat{O}Y = 2\,X\hat{A}Y$ —— ① (ஒரு வட்டத்தின் வில்லினால் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் பரிதியின் மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணத்தின் இரு மடங்காகும்.)

$X\hat{O}Y = 2\,X\hat{A}Y$ —— ①

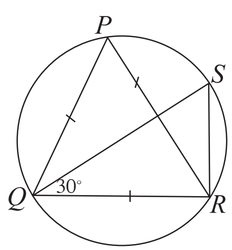
$X\hat{O}Y = 2\,X\hat{B}Y$

$X\hat{O}Y = 2\,X\hat{C}Y$ —— ②

①,②,③ என்பவற்றிலிருந்து $2\,X\hat{A}Y = 2\,X\hat{B}Y = 2\,X\hat{C}Y$

$X\hat{A}Y = X\hat{B}Y = X\hat{C}Y$

மேலே தரப்பட்டுள்ள தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி கணித்தல்கள் செய்யப்படும் முறையைக் கவனிப்போம்.



மேலேயுள்ள உருவில் $PQ = QR = PR$ உம் $R\hat{Q}S = 30^\circ$ உம் ஆகும். $Q\hat{R}S$ இன்

பெறுமானம் காண்போம்.

$PQ = QR = PR$ (தரப்பட்டுள்ளது)

முக்கோணி PQR ஒரு சமபக்கமுக்கோணியாகும்.

ஒரு சமபக்க முக்கோணியில் ஓர் அகக் கோணத்தின் பெறுமானம் 60^0 என்பதால்

$Q\hat{P}R = 60^\circ$

ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள் சமன் என்பதால்

$Q\hat{P}R = Q\hat{S}R$

$\therefore Q\hat{S}R = 60^\circ$

ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^0 என்பதால்

ΔQRS இல்

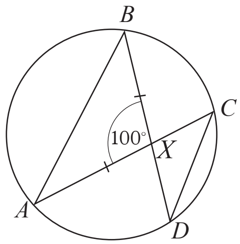
$Q\hat{R}S + R\hat{Q}S + Q\hat{S}R = 180^\circ$

$Q\hat{R}S = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ)$

$Q\hat{R}S = 90^\circ$

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கமைய $B\hat{D}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.



$XB = XA$ என்பதால், XAB என்பது ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணியாகும்.

$X\hat{B}A = X\hat{A}B$ —— ① (ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமனானவை ஆகும்).

முக்கோணி XAB இல்

$X\hat{B}A + X\hat{A}B + A\hat{X}B = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் மூன்று அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180^0 என்பதால்)

எனவே $X\hat{B}A + X\hat{A}B + 100^\circ = 180^\circ$

$$X\hat{B}A + X\hat{A}B = 180^\circ - 100^\circ$$

$$X\hat{B}A + X\hat{A}B = 80^\circ$$

1 இலிருந்து $2\,X\hat{A}B = 80^\circ$

$$X\hat{A}B = 40^\circ$$

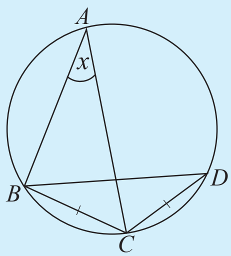
ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள் சமன் என்பதால்

$$X\hat{A}B = B\hat{D}C$$

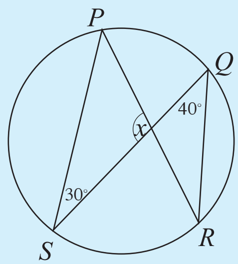
$$B\hat{D}C = 40^\circ$$

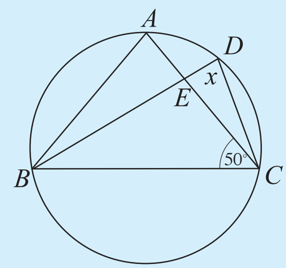
பயிற்சி 31.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள வினாக்களில் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

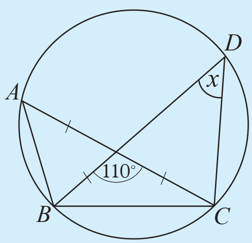
1. 

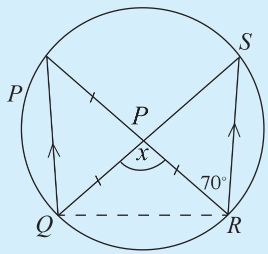
$B\hat{C}D = 110^\circ$

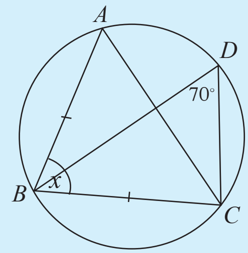
2. 

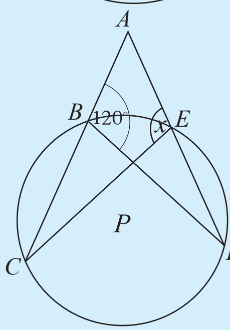
3. 

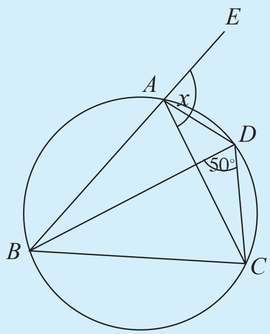
$AB = AC$

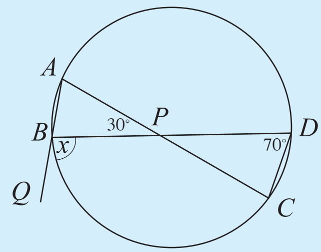
4. 

5. 

6. 

7. 

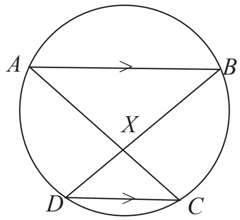
8. 

9. 

31.5 ஒரே வட்டத் துண்டக் கோணங்கள் சமனானவை என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவோம்

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப $AC = BD$ என நிறுவுக.



$A\hat{B}D = B\hat{D}C$ ($AB//CD$, ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$ (ஒரே வட்டத்தின் துண்டக் கோணங்கள்)

$\therefore B\hat{D}C = A\hat{C}D$

ஒரு முக்கோணியில் சமனான கோணங்களுக்கு எதிரான பக்கங்கள் சமனானவை

$\Delta\, CDX$ இல் $XD = XC$

$B\hat{A}C = A\hat{C}D$

$= A\hat{C}D$

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$ ($AB//CD$, ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$\therefore \quad B\hat{A}C = A\hat{B}D$

ஒரு முக்கோணியில் சமனான கோணங்களுக்கு எதிரான பக்கங்கள் சமனானவை

$\therefore \; XA = XB$

$\therefore \; \Delta\; ABX$ இல்

$XA = XB$ (நிறுவியது)

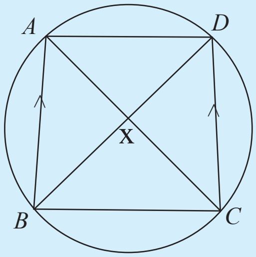
$XC = XD$ (நிறுவியது)

$\therefore \; \underbrace{XA + XC} = \underbrace{XB + XD}$

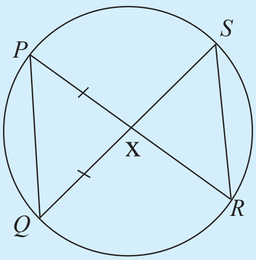
$AC = BD$

பயிற்சி 31.5

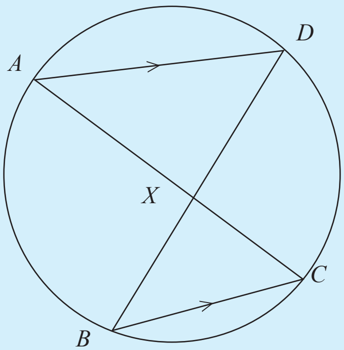
1. $AB//CD$ எனின் $A\hat{D}C = B\hat{C}D$ எனக் காட்டுக.



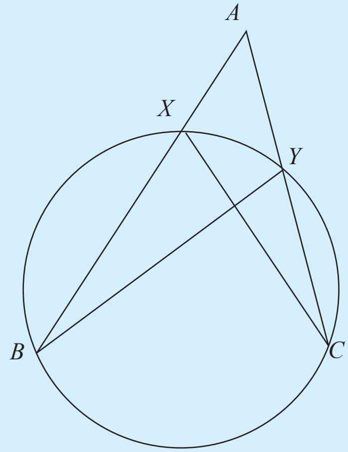
2. $PX = QX$ ஆயின் $PQ//SR$ எனக் காட்டுக.



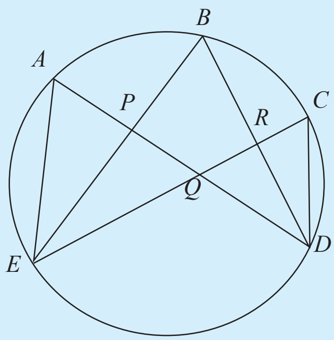
3. $AD // BC$ ஆயின் $AX = DX$ எனக் காட்டுக.



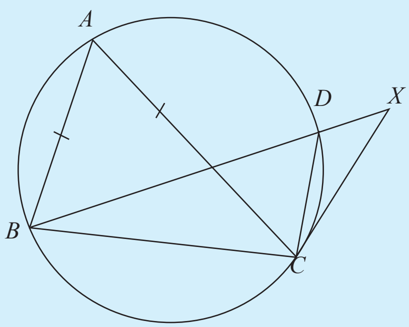
4. $A\hat{X}C = A\hat{Y}B$ எனக் காட்டுக.



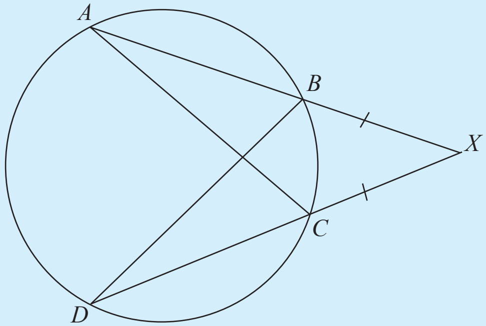
5. $B\hat{P}Q = B\hat{R}Q$ ஆயின் $A\hat{E}C$ இன் இருசமகூறாக்கி BE எனக் காட்டுக.



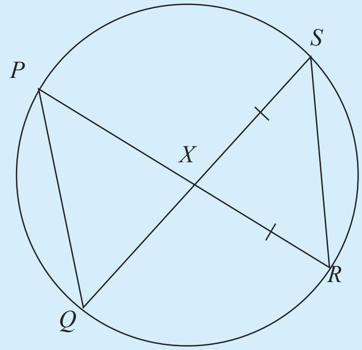
6. $AB = AC$ ஆயின் $C\hat{D}X = 2\,A\hat{B}C$ எனக் காட்டுக.



7. $XB=XC$ ஆயின் $AC=BD$ எனக் காட்டுக.

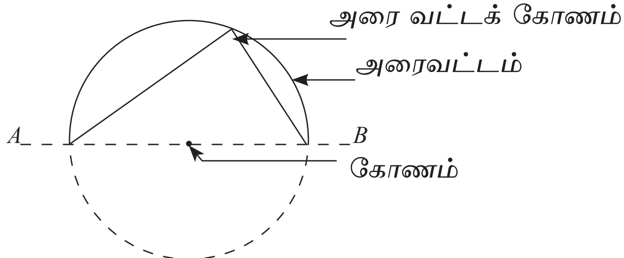


8. $XS=XR$ ஆயின் $XP=XQ$ எனக் காட்டுக.



31.5 அரை வட்டத்திலுள்ள கோணங்கள்

ஒரு வட்டத்தின் அரைவாசியாகவுள்ள வட்ட வில்லானது அரை வட்டமெனப்படும்



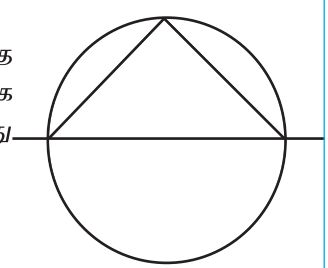
அரைவட்டத்தின்மீதுள்ள ஒரு புள்ளியை அரைவட்டத்தின் இரண்டு அந்தங்களுடனும் இணைப்பதன்மூலம் உருவாகும் கோணம் அரைவட்டக் கோணம் எனப்படும்.

வட்டத்தின் மையத்தினூடாக ஒரு கோட்டை வரைவதன் மூலம் வட்டமானது இரண்டு அரைவட்டப் பகுதிகளாக வேறுபடுத்தப்படுகின்றது.

அரைவட்டத்தில் கோணங்களில் பண்புகளை அறிந்து கொள்வதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ள செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 1

- கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு தாளின் மீது ஒரு வட்டத்தை வரைந்து கொள்வோம். அவ்வட்டத்தின் மையத்தினூடாக நேர்கோடொன்றை வரைவோம். அப்போது வட்டமானது இரண்டு அரைவட்டங்களாகப் பிரிக்கப்படும்.

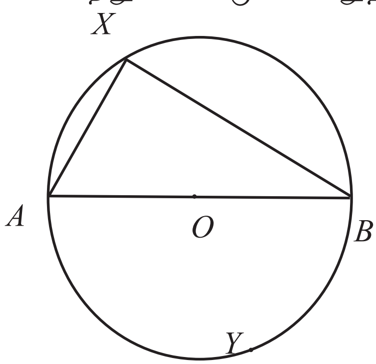


- ஓர் அரைவட்டத்தின்மீது ஒரு புள்ளியைக் குறிப்போம். அப்புள்ளியை அரை வட்டத்தின் இரண்டு அந்தங்களுக்கும் தொடுப்போம். அப்போது வட்டவில்லின்மீது அரைவட்டக் கோணம் பெறப்படும்.
- பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி அரைவட்டக் கோணத்தின் பருமனை அளக்க.

அரைவட்டக் கோணம் 90° எனக் கண்டிருப்பீர்கள். இவ்வாறே இன்னும் சில வட்டங்களை வரைந்து அவற்றின் அரைவட்டக் கோணங்களை வரைந்து பெறுமானத்தை அளக்க. மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் ஓர் அரைவட்டக் கோணம் எப்போதும் ஒரு செங்கோணம் என நீங்கள் அவதானிக்கக் கூடியதாயிருக்கும்.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டில் ஓர் அரைவட்டக் கோணம் எப்போதும் செங்கோணம் என்பதை நீங்கள் அவதானித்திருப்பீர்கள்.

மேலே தரப்பட்ட தொடர்பை நிறுவலின் மூலம் உறுதிபடுத்திக் கொள்வோம்.



தரவு :- O வை மையமாகவுடைய வட்டத்தில் X, Y ஆகியன உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு இரு புள்ளிகளாகும்.

நி.வே. :- $A\hat{X}B$ ஒரு செங்கோணம்.

நிறுவல் :- $A\hat{O}B$ என்பது வில் AYB இனால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணமாகும்.

அரைவட்டம் என்பதால் AOB விட்டமாகும்.

$A\hat{O}B = 2$ செங்கோணங்களாகும். ________ ①

வில் AYB இனால் வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியின்மீது எதிரமைக்கப்படும் கோணம் $A\hat{X}B$ ஆகும். ஒரு வட்டத்தில் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் அவ்வில் வட்டத்தின்மீது எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இரு மடங்காகும்.

$A\hat{O}B = 2\,A\hat{X}B$ ________ ②

② ,① என்பவற்றிலிருந்து

$2\ A\hat{X}B = 2$ செங்கோணங்களாகும்.

$\therefore A\hat{X}B$ ஒரு செங்கோணமாகும்.

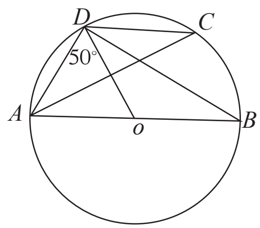
மேற்குறித்த நிறுவலின்மூலம் உறுபடுத்திய தொடர்பு ஒரு தேற்றமாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம்

ஓர் அரைவட்டக் கோணம் செங்கோணமாகும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்கள் மூலம், மேற்குறித்த தேற்றத்திலிருந்து கணித செய்கைகளைச் செய்யும் முறையை அறிந்து கொள்வோம்.

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து $A\hat{C}D$ இன் பெறுமானம் காண்போம்.



$A\hat{D}B = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

$A\hat{D}B = A\hat{D}O + O\hat{D}B$

$\therefore A\hat{D}O + O\hat{D}B = 90^\circ$

$50^\circ + O\hat{D}B = 90^\circ$

$O\hat{D}B = 90^\circ - 50^\circ$

$O\hat{D}B = 40^\circ$

ஒரே வட்டத்ததின் ஆரைகள் என்பதால்.

$DO = OB$

ஒரு முக்கோணியின் சமனான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமன் என்பதால்

$\Delta\, OBD$ இல்

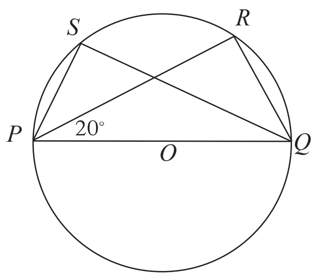
$D\hat{B}O = O\hat{D}B$

$\therefore D\hat{B}O = 40^\circ$

$D\hat{B}O = A\hat{C}D$ (வட்டத்தின் ஒரே துண்டக் கோணங்கள்)

$\therefore A\hat{C}D = 40^\circ$

உதாரணம் 1



வட்டம் $PQRS$ இல் PQ விட்டமாகும். $Q\hat{P}R = 20^\circ$ உம் $PS = QR$ உம் எனின் $R\hat{P}S$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$\Delta\ PQR$ இல்

$P\hat{R}Q = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியில் மூன்று அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்)

$P\hat{Q}R + 20^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$P\hat{Q}R = 180^\circ - 110^\circ$

$P\hat{Q}R = 70^\circ$

PQ (விட்டம் என்பதால்)

$P\hat{S}Q = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

$P\hat{R}Q = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

ΔPSQ, ΔPRQ என்பன செங்கோண முக்கோணிகளாகும்.

ΔPSQ, ΔPRQ என்பவற்றிலிருந்து

$SP = RQ$ (தரப்பட்டுள்ளது)

PQ (பொதுப் பக்கம்)

$\therefore \Delta PSQ \equiv \Delta PRQ$ (செ.ப.ப)

$\therefore S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ (ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த கோணங்கள்)

$\therefore S\hat{P}Q = 70^\circ$

$R\hat{P}S + Q\hat{P}R = 70^\circ$

$R\hat{P}S + 20^\circ = 70^\circ$

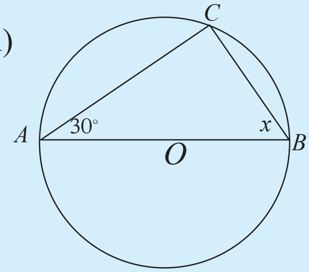
$R\hat{P}S = 70^\circ - 20^\circ$

$R\hat{P}S = 50^\circ$

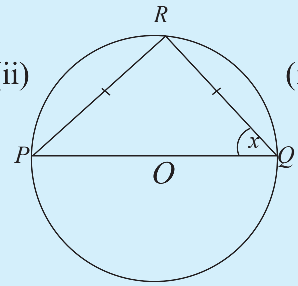
பயிற்சி 31.6

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்திலும் மையம் O இனால் காட்டடப்பட்டுள்ளது. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

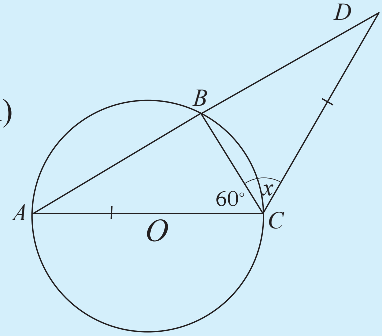
(i)



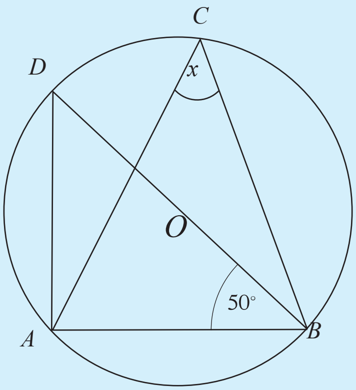
(ii)



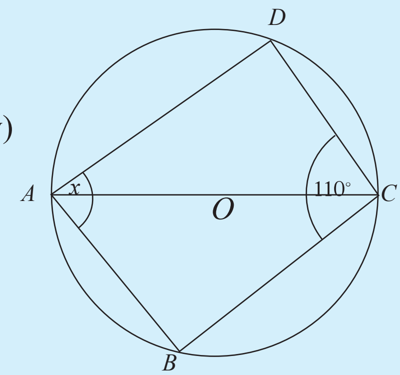
(iii)



(iv)



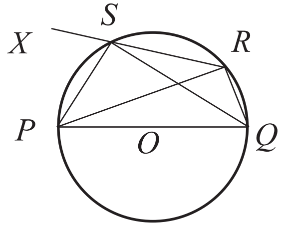
(v)



31.7 அரைவட்டக் கோணம் செங்கோணம் என்னும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவுதல் பற்றி அறிந்து கொள்வோம்

உதாரணம் 1

PQ என்பது வட்டம் $PQRS$ இல் ஒரு விட்டமாகும். RS ஆனது X வரை நீட்டப் பட்டுள்ளது. $R\hat{P}Q + P\hat{S}X = 90^\circ$ என நிறுவுக.



நிறுவல்

$Q\hat{S}R + P\hat{S}Q + P\hat{S}X = 180^\circ$ (நேர்கோட்டின் மீதுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை என்பதால்)

PQ விட்டமென்பதால் $PQRS$ ஓர் அரைவட்டமாகும்

$\therefore P\hat{S}Q = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம்)

$\therefore Q\hat{S}R + 90^\circ + P\hat{S}X = 180^\circ$

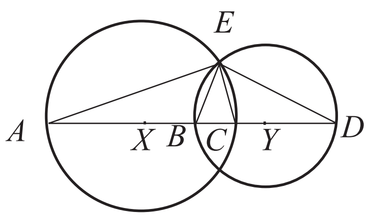
$Q\hat{S}R + P\hat{S}X = 180^\circ - 90^\circ$

$Q\hat{S}R + P\hat{S}X = 90^\circ$

$\therefore Q\hat{S}R = R\hat{P}Q$ (ஒரே வட்டத்துண்டக் கோணங்கள் சமனானவை ஆகும்).

$\therefore R\hat{P}Q + P\hat{S}X = 90^\circ$

உதாரணம் 2



இரண்டு வட்டங்களின் மையங்கள் X , Y ஆகும். $A\hat{E}B = C\hat{E}D$ எனக் காட்டுக

நிறுவல் :-

$A\,C$ ஆனது X இனூடாக செல்வதால் AC ஆனது X ஐ மையமாகடைய வட்டத்தின் விட்டமாகும்.

$\therefore$ வில் ACE ஆனது அரைவட்டமாகும்.

$\therefore A\hat{E}C = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம் செங்கோணம் என்பதால்)

$\therefore A\hat{E}B + B\hat{E}C = 90^\circ$ ———— ①

BD ஆனது Y இனூடாக செல்வதால், BD ஆனது Y ஐ மையமாகவுடைய விட்டமாகும்.

வில் $\therefore BED$ ஆனது அரைவட்டமாகும்

$\therefore B\hat{E}D = 90^\circ$ (அரைவட்டக் கோணம் செங்கோணம் என்பதால்)

$C\hat{E}D + B\hat{E}C = 90^\circ$ ——— ②

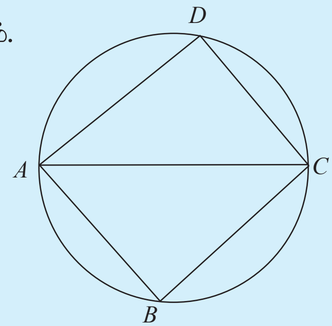
$A\hat{E}B + B\hat{E}C = C\hat{E}D + B\hat{E}C$

சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களிலுமிருந்து $B\hat{E}C$ நீக்குவதன் மூலம்

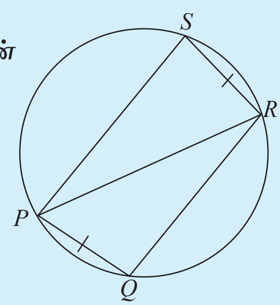
$A\hat{E}B = C\hat{E}D$

பயிற்சி 31.7

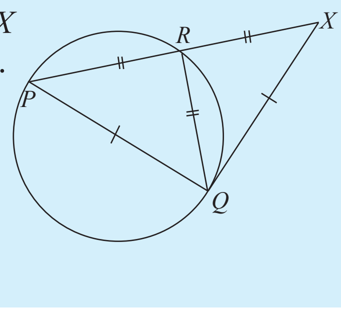
1. வட்டம் $ABCD$ இல் AC விட்டமாகும். $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^\circ$ எனக் காட்டுக.



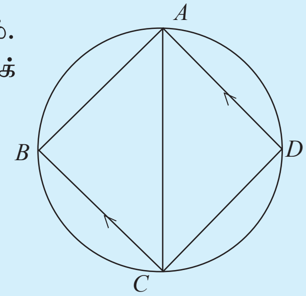
2. வட்டம் $PQRS$ இல் PR விட்டமாகும். $PQ = RS$ ஆயின் $PQRS$ என்பது ஒரு செவ்வகம் எனக் காட்டுக.



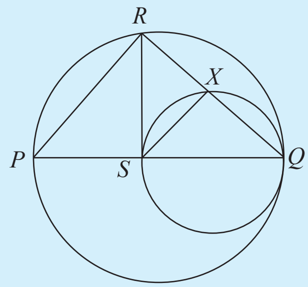
3. PQ என்பது விட்டம். PQR விட்டமாகும். $PQ = QX$ உம் $QR = RX$ உம் ஆயின் $P\hat{Q}X = 90$ எனக் காட்டுக.



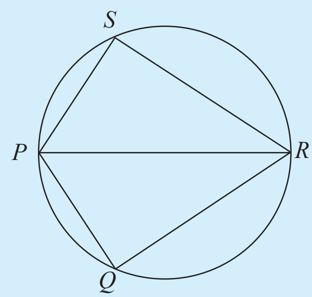
4. AC என்பது வட்டம் $ABCD$ இல் ஒரு விட்டமாகும். $BC//AD$ ஆகும். $ABCD$ என்பது ஒரு செவ்வகம் எனக் காட்டுக.



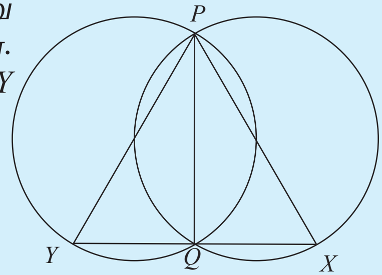
5. பெரிய வட்டத்தின் விட்டம் PSQ உம் சிறிய வட்டத்தின் விட்டம் SQ உம் ஆகும். RQ ஆனது வட்டத்தை X இல் இடைவெட்டுகின்றது. $P\hat{R}S = R\hat{S}X$ எனக் காட்டுக.



6. PR என்பது வட்டம் $PQRS$ இல் ஒரு விட்டமாகும். $S\hat{R}P = P\hat{Q}R$ ஆயின் $S\hat{P}R = Q\hat{R}P$ எனக் காட்டுக.

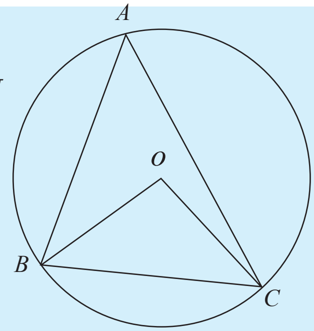


7. இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று P, Q ஆகிய புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றன. இரண்டு வட்டங்களிலும் விட்டங்கள் PX உம் PY உம் ஆகும். XQY ஒரு நேர்கோடு எனக் காட்டுக.

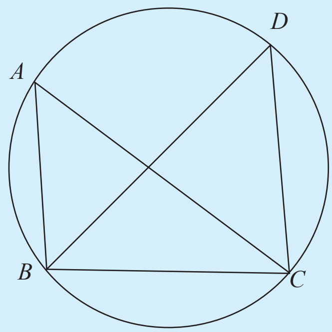


பலவினப் பயிற்சி

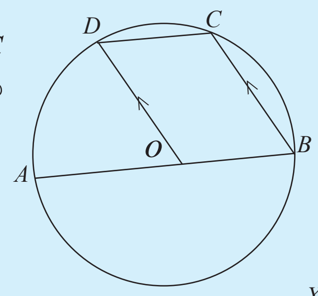
1. வட்டம் ABC இல் மையம் O ஆகும். $A\hat{B}O = O\hat{B}C$ உம் $A\hat{B}O = 40^\circ$ உம் ஆகும். $A\hat{C}O$ இன் பெறுமானம் காண்க.



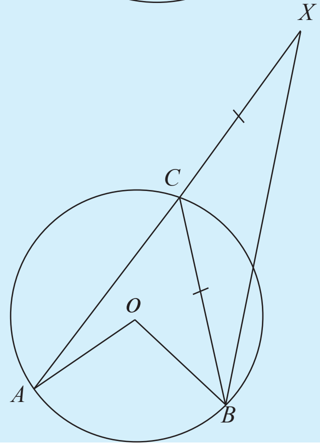
2. வட்டம் $ABCD$ இல் மையம் BD ஆகும். $BC = CD$ உம் $A\hat{C}B = 35^\circ$ உம் ஆயின் $A\hat{B}C$ இன் பெறுமானம் காண்க.



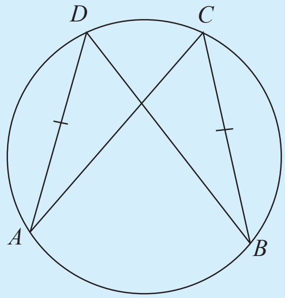
3. வட்டம் $ABCD$ இல் மையம் O ஆகும். $BC//OC$ உம் $A\hat{B}C = 60^\circ$ உம் ஆகும். $B\hat{C}D$ இன் பெறுமானம் காண்க.



4. வட்டம் ABC இல் மையம் O ஆகும். $BC = CX$ ஆகுமாறு AC ஆனது X வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. $A\hat{O}B = 4C\hat{B}X$ எனக் காட்டுக.



5. A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகள் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. $AD = BC$ ஆகும். $DB = CA$ எனக் காட்டுக.



6. PQ என்பது O ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும். $QR//SO$ ஆகும். $SR = SP$ எனக் காட்டுக.