19 மடக்கை 1

இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,

- மடக்கைகளைக் கொண்டு ஓர் எண் கோவையைச் சுருக்குவதற்குத் தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

சுட்டிகள்

2 ஐ நான்கு தடவை பெருக்கல் 2^4 என எழுதப்படும்.
அதாவது, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
ஆகவே 2^4 இன் பெறுமானம் 16 ஆகும்.

அவ்வாறே $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$.

2^4, 3^3 ஆகிய கோவைகள் வலுக்கள் எனப்படும். 2^4 இன் அடி 2 ஆக இருக்கும் அதே வேளை சுட்டி 4 ஆகும். நீங்கள் சுட்டிகள் பற்றி இதுவரை கற்ற விடயங்களை மீட்பதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

மீட்டற் பயிற்சி

1. கீழே அடைப்பு *A* யில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஒத்த உறுப்பை அடைப்பு *B* யிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து இணைக்குக.

A	***B***
$a \times a$	5^{-1}
a^{-2}	$a \times a \times b \times b$
a	5^5
a^2b^2	$\frac{a}{b}$
5^1	a^2
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{a^2}$
x°	1
$5^3 \times 5^2$	a^1
ab^{-1}	5

2. கீறிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

(i) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^{....}} = 2^{...}$ (ii) $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^{....}} = 10^{....}$ (iii) $\frac{1}{125} = \frac{1}{5^{....}} = 5^{....}$

(iv) $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^{....}} = 3^{....}$ (v) $0.01 = \frac{1}{....} = \frac{1}{10^{....}} = ...$ (vi) $0.001 = \frac{1}{....} = \frac{1}{....} = ...$

3. சுருக்குக.

(i) $a^2 \times a^3$ (ii) $x^5 \times x$ (iii) $\frac{x^5 \times x^7}{x^{11}}$

(iv) $\frac{a^3 \times a^5}{a^2 \times a^6}$ (v) $\frac{p^3 \times p^1}{p}$ (vi) $\frac{x^{\circ} \times x^5}{x}$

4. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் சுருக்கிப் பெறுமானம் காண்க.

(i) $2^2 \times 2^3$ (ii) $\frac{3^7}{3^4}$ (iii) $\frac{3^2 \times 3^8}{3^5}$

(iv) $\frac{5^3 \times 5^0}{5}$ (v) $\frac{10^2 \times 10^3}{10 \times 10^4}$ (vi) $\frac{2^5 \times 2^3}{2^6 \times 2^2}$

19.1 மடக்கைகள்

சுட்டிகளின் இயல்புகளைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கலை எளிதாக்கும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம். அதற்காக கீழே தரப்பட்டுள்ள 2 இன் அடியிலான அட்டவணையைக் கருதுக.

2 இன் வலு	2°	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
பெறுமானம்	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $\frac{64 \times 512}{128}$ இன் பெறுமானத்தைக் காணும் முறையை ஆராய்வோம்.

முதலில் இவ்வெண்களை ஒரே எண்ணின் வலுக்களாக எழுதுவோம்.

$$\frac{64 \times 512}{128} = \frac{2^6 \times 2^9}{2^7} \quad \text{(அட்டவணைக்கேற்ப)}$$

$$= 2^{6+9-7} \quad \text{(சுட்டி விதிகளுக்கேற்ப)}$$

$$= 2^8$$

$$= 256 \quad \text{(அட்டவணைக்கேற்ப)}$$

சுட்டி விதிகளைப் பயன்படுத்தி மேற்குறித்த சுருக்கலை எளிதாகவும் சுருக்கமாகவும் செய்யலாமெனத் தெரிகின்றது. இவ் உதாரணத்தில் உள்ள எண்களை 2 இன் வலுக்களாக எழுதலாம். மடக்கை அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தி எண்களின் பெருக்கமும் வகுத்தலும் அடங்கிய எந்தவொரு கோவையையும் எளிதாகச் சுருக்கலாம். ''மடக்கை'' என்பதால் ''குறுகியது'' எனக் கருதப்படும். மடக்கை அட்டவணைகளை முதன் முதலாக அறிமுகஞ்செய்த பெருமை இத்தாலியைச் சேர்ந்த ஜோன் நேப்பியர் (John Napier கி.பி. 1550 - கி.பி. 1617) என்ற கணிதவியலாளருக்கு உரியதாகும். அவருடைய சமகாலத்தவராகிய பிறிக்ஸ் என்ற கணிதவியலாளர் மடக்கைகளை மேலும் விருத்தி செய்து முன்வைத்தார். தற்காலத்தில் கணிகருவியின் பயன்பாடு அதிகரித்தமையால் நவீன யுகத்தில் மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவது அரிதாகி வருகின்றது. எனினும், இவற்றுடன் தொடர்புபட்ட கணித எண்ணக்கருக்களைக் கற்றல் மிக முக்கியமானதும் அவசியமானதுமாகும்.

சுட்டி வடிவமும் மடக்கை வடிவமும்

$2^3 = 8$ என்னும் சுட்டி வடிவில் இருக்கும் ஒரு கோவையைக் கருதுவோம்.
$2^3 = 8$ ஆக இருக்கும்போது அடி 2 இற்கு 8 இன் மடக்கை 3 என எழுதப்படும்.
அது $\log_2 8 = 3$ என எழுதப்படும்.
இந்த $2^3 = 8$ ஆனது **சுட்டி வடிவம்** எனவும் மேலும் $\log_2 8 = 3$ ஆனது **மடக்கை வடிவம்** எனவும் அழைக்கப்படும். ஒரு கோவையானது சுட்டி வடிவம் , மடக்கை வடிவம் என்னும் இரண்டு வடிவங்களில் எழுதப்படுகின்றது.

இதற்கேற்பச் சுட்டி வடிவம் $2^3 = 8$ எனின், மடக்கை வடிவம் $\log_2 8 = 3$. அதேபோல் மடக்கை வடிவம் $\log_2 8 = 3$ எனின் சுட்டி வடிவம் $2^3 = 8$ ஆகும்.
மேலும் சில உதாரணங்களைக் கருதுவோம்.

- $3^2 = 9$ ஆகையால் , அடி 3 இற்கு 9 இன் மடக்கை 2 , அதாவது $\log_3 9 = 2$.
- $5^1 = 5$ ஆகையால் , அடி 5 இற்கு 5 இன் மடக்கை 1 ஆகும். அதாவது $\log_5 5 = 1$.
- $10^3 = 1000$ ஆகையால் , அடி 10 இற்கு 1000 இன் மடக்கை 3 ஆகும். அதாவது. $\log_{10} 1000 = 3$.

இது பொதுவாக a ஒரு நேர் எண்ணாக இருக்கும்போது

$\boxed{a^x = N \text{ எனின் } \log_a N = x}$ அல்லது $\boxed{\log_a N = x \text{ எனின் } a^x = N}$ எனக் காட்டலாம்.

$a^x = N$ சுட்டி வடிவமாகவும் $\log_a N = x$ மடக்கை வடிவமாகவும் கருதப்படும். இங்கு a, N ஆகியவற்றின் நேர்ப் பெறுமானம் மாத்திரம் எடுக்கப்படும். (ஒரு நேர் எண்ணின் யாதாயினும் ஒரு வலு நேர் ஆகையால், மேற்குறித்த தொடர்பில் a நேராக இருக்கும் போது N உம் ஒரு நேர் எண்ணாகும்). இதற்கேற்ப மடக்கைகளைக் கருதும்போது எப்போதும் அடி நேரான எண்கள் மாத்திரம் எடுக்கப்படும்.

இப்போது மடக்கைகளின் சில இயல்புகளைக் காண்போம்.

(i) எந்தவோர் அடியிலும் அவ்வெண்ணின் மடக்கை 1 ஆகும்.
அதாவது $\log_a a = 1$ இதற்குக் காரணம் $a^1 = a$ ஆக இருப்பதாகும்.
உதாரணமாக, $\log_2 2 = 1$, $\log_{10} 10 = 1$.

(ii) எந்தவோர் அடிக்கும் 1 இன் மடக்கை 0 ஆகும். அதாவது $\log_a 1 = 0$
இதற்குக் காரணம் $a^0 = 1$ ஆக இருப்பதாகும்.
உதாரணமாக $\log_2 1 = 0$, $\log_{10} 1 = 0$.

இதுவரை மடக்கைகளாக ஒரு நேர்ப் பெறுமானம் பெறப்படும் உதாரணங்களை மாத்திரம் நாம் பார்த்தோம். எனினும், மடக்கையாக மறைப் பெறுமானங்களும் பெறப்படலாம். ஒன்றிலும் குறைந்த எண்களின் மடக்கைப் பெறுமானம் எப்போதும் மறையாகும்.

உதாரணமாக

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \text{ ஆகையால் } \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3.$$

$$0.01 = \frac{1}{100} = 10^{-2} \text{ ஆகையால் } \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2.$$

$$0.5 = \frac{5}{10} = 2^{-1} \text{ ஆகையால் } \log_2(0.5) = -1.$$

இனி மடக்கைகள் அடங்கிய சமன்பாடுகள் தீர்க்கப்படும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் x இனால் தரப்படும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $\log_2 64 = x$ (ii) $\log_x 81 = 4$ (iii) $\log_5 x = 2$

(i) $\log_2 64 = x$

$2^x = 64$ (சுட்டி வடிவம்)

$2^x = 2^6$

$\therefore x = 6$

(ii) $\log_x 81 = 4$

$x^4 = 81$

$x^4 = 3^4$

$x = \pm 3$

$x = +3$ அல்லது -3

மடக்கையின் அடியாக
மறைப் பெறுமானம்
இருக்க முடியாது என்பதால்

$\therefore x = +3$

(iii) $\log_5 x = 2$

$x = 5^2$

$x = 25$

பயிற்சி 19.1

1. பின்வரும் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றையும் மடக்கை வடிவத்தில் தருக.

(i) அடி 2 இல் 32 இன் மடக்கை 5 ஆகும்.

(ii) அடி 10 இல் 1000 இன் மடக்கை 3 ஆகும்.

(iii) அடி 5 இல் x இன் மடக்கை y ஆகும்.

(iv) அடி p இல் q வின் மடக்கை r ஆகும்.

(v) அடி q இல் r இன் மடக்கை p ஆகும்.

2. சுட்டி வடிவில் தருக.

(i) $\log_5 125 = 3$ (ii) $\log_{10} 100000 = 5$ (iii) $\log_a x = y$

(iv) $\log_p a = q$ (v) $\log_a 1 = 0$ (vi) $\log_m m = 1$

3. மடக்கை வடிவில் தருக.

(i) $2^8 = 256$ (ii) $10^4 = 10000$ (iii) $7^3 = 343$

(iv) $20^2 = 400$ (v) $a^x = y$ (vi) $p^a = q$

4. பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் x இன் பெறுமானம் காண்க.

(i) $\log_3 243 = x$ (ii) $\log_{10} 100 = x$ (iii) $\log_6 216 = x$

(iv) $\log_x 25 = 2$ (v) $\log_x 64 = 6$ (vi) $\log_x 10 = 1$

(vii) $\log_3 x = 2$ (viii) $\log_{10} x = 4$ (ix) $\log_8 x = 2$

5. (i) 64 ஐ ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்ட அடியிலான வலுக்களாக நான்கு விதங்களில் தருக.

(ii) $\log_x 64 = y$ இல் x இற்கும் y இற்கும் பொருத்தமான நான்கு சோடிகளைக் காண்க.

19.2 மடக்கை விதிகள்

16×32 இன் பெறுமானத்தைச் சுட்டி வடிவத்தில் எழுதத்தக்க விதத்தை நினைவு கூர்வோம்.

$$16 \times 32 = 2^4 \times 2^5 \quad \text{(இரண்டின் வலுவில் காட்டுதல்)}$$
$$= 2^{4+5} \quad \text{(சுட்டி விதியைப் பயன்படுத்தல்)}$$
$$= 2^9$$

இங்கு $16 \times 32 = 2^{4+5}$ என்பதைக் கவனிப்போம்.

இதனை மடக்கை வடிவத்திற்கு மாற்றுவோம்.

$$16 \times 32 = 2^{4+5} \quad \text{(சுட்டி வடிவம்)}$$
$$\therefore \log_2(16 \times 32) = 4+5 \quad \text{(மடக்கை வடிவம்)}$$
$$= \log_2 16 + \log_2 32 \quad (4 = \log_2 16\ ,\ 5 = \log_2 32 \text{ ஆகையால்})$$

அவ்வாறே $27 \times 81 = 3^3 \times 3^4 = 3^{3+4}$ ஆகையால்

$$\log_3(27 \times 81) = 3 + 4 \quad (3 = \log_3 27\ ,\ 4 = \log_3 81 \text{ ஆகையால்})$$
$$\log_3(27 \times 81) = \log_3 27 + \log_3 81$$

இவ்வாறே $\log_{10}(10 \times 100) = \log_{10}10 + \log_{10}100$
$\log_5(125 \times 25) = \log_5 125 + \log_5 25$ எனவும் எழுதலாம்.
வலுக்களைப் பெருக்கும்போது மடக்கைகளின் நடத்தை பற்றிய ஒரு முக்கியமான விடயம் தெளிவாகின்றது. அது பொதுவாக எந்த வலுப் பெருக்கலுக்கும் உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதனை பின்வருமாறு காட்டுவோம்.

$$\boxed{\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n}$$

இக்கோவையை ''பெருக்கத்தின் மடக்கையானது மடக்கைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்'' எனவும் எடுத்துரைக்கலாம்.
மடக்கைகளின் வகுத்தலுக்கு இவ்வாறான ஒரு சூத்திரத்தைப் பெறலாம். அது பற்றி தற்போது பார்ப்போம்.
பின்வரும் உதாரணங்களைக் கவனிப்போம்.

இப்போது $128 \div 16$ இன் பெறுமானம் பெறப்படத்தக்கதாகச் சுட்டி வடிவத்தில் எழுதிப் பெறப்படும் விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

$$\frac{128}{16} = \frac{2^7}{2^4} \quad \text{(இரண்டின் வலுக்களாகக் காட்டல்)}$$
$$= 2^{7-4} \quad \text{சுட்டி விதிகளைப் பயன்படுத்தல்}$$

$$\therefore \frac{128}{16} = 2^{7-4}$$
$$= 2^3$$

$$\therefore \log_2\left(\frac{128}{16}\right) = 7 - 4 \quad \text{(மடக்கை வடிவத்தில் எழுதும்போது)}$$

இப்போது $128 = 2^7$ ஆகையால், $7 = \log_2 128$ உம்
$16 = 2^4$ ஆகையால், $4 = \log_2 16$ உம் ஆகும்.

இதற்கேற்ப, $\log_2\left(\frac{128}{16}\right) = 7 - 4 = \log_2 128 - \log_2 16$ ஆகும்.

இவ்வாறே, $\log_5(125 \div 5) = \log_5 125 - \log_5 5$

$$\log_{10}\left(\frac{1000}{100}\right) = \log_{10}1000 - \log_{10}100$$

வலுக்களை வகுக்கும்போது மடக்கைகளின் நடத்தை பற்றிய ஒரு முக்கிய விடயம் இதிலிருந்து தெளிவாகின்றது. அது பொதுவாக எந்த வலு வகுத்தலுக்கும் உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அதனை பின்வருமாறு காட்டுவோம்.

$$\boxed{\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n}$$

இப்போது இம்மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதத்தை பின்வரும் உதாரணங்களின் மூலம் கற்போம்.

உதாரணம் 1

1. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானம் காண்க.
   (i) $\log_2 32 + \log_2 2$ (ii) $\log_5 15 - \log_5 3$

(i) $\log_4 32 + \log_4 2 = \log_4 (32 \times 2)$

$= \log_4 64$

$= 3 \quad (64 = 4^3$ என்பதால் $)$

(ii) $\log_5 15 - \log_5 3 = \log_5 \left(\frac{15}{3}\right)$

$= \log_5 5$

$= 1$

உதாரணம் 2

பெறுமானம் காண்க.

$\log_{10} 25 + \log_{10} 8 - \log_{10} 2$

$$\log_{10} 25 + \log_{10} 8 - \log_{10} 2 = \log_{10}\left(\frac{25 \times \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}^{1}}\right)$$

$$= \log_{10} 100$$

$$= 2$$

$$\log_{10} 100 = x$$
$$10^x = 100$$
$$10^x = 10^2$$
$$\therefore x = 2$$

உதாரணம் 3

(i) $\log_a 6$ (ii) $\log_a 18$ என்பவற்றை $\log_a 2$, $\log_a 3$ என்பவற்றில் தருக.

(i) $6 = 2 \times 3$

$\log_a 6 = \log_a (2 \times 3)$

$= \log_a 2 + \log_a 3$

(ii) $18 = 2 \times 3 \times 3$

$\log_a 18 = \log_a (2 \times 3 \times 3)$

$= \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 3$

$= \log_a 2 + 2 \log_a 3$

உதாரணம் 4

தீர்க்க $\log_a 5 + \log_a x = \log_a 3 + \log_a 10 - \log_a 2$

$$\begin{aligned} \log_a 5 + \log_a x &= \log_a 3 + \log_a 10 - \log_a 2 \\ \log_a (5 \times x) &= \log_a \left(\frac{3 \times 10}{2}\right) \\ \therefore \quad 5x &= \frac{3 \times \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}_{1}} \\ 5x &= 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

இப்போது மடக்கை விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க.

பயிற்சி 19.2

1. பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்கி விடையைத் தனி மடக்கை வடிவத்தில் தருக.

(i) $\log_2 10 + \log_2 5$ (ii) $\log_3 8 + \log_3 5$ (iii) $\log_2 7 + \log_2 3 + \log_2 5$

(iv) $\log_6 20 - \log_6 4$ (v) $\log_a 10 - \log_a 2 - \log_a 5$ (vi) $\log_{10} 6 + \log_{10} 2 - \log_{10} 3$

2. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $\log_2 4 + \log_2 8$ (ii) $\log_3 27 - \log_3 3$

(iii) $\log_{10} 20 + \log_{10} 2 - \log_{10} 4$ (iv) $\log_2 80 - \log_2 15 + \log_2 12$

(v) $\log_{10} 20 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2$ (vi) $\log_5 20 + \log_5 4 - \log_5 16$

3. பின்வரும் கோவைகளை $\log_a 3$, $\log_a 5$ என்பவற்றில் தருக.

(i) $\log_a 15$ (ii) $\log_a \left(\frac{5}{3}\right)$ (iii) $\log_a \left(\frac{25}{3}\right)$

(iv) $\log_a 45$ (v) $\log_a 75$ (vi) $\log_a 225$

4. தீர்க்க.

(i) $\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 x$ (ii) $\log_a 10 + \log_a x = \log_a 30$

(iii) $\log_3 20 + \log_3 x = \log_3 4 + \log_3 10$ (iv) $\log_a 15 - \log_a 3 = \log_a x$

(v) $\log_{10} 8 + \log_{10} x - \log_{10} 2 = \log_{10} 12$ (vi) $\log_5 24 - \log_5 4 = \log_5 2 + \log_5 x$

பொழிப்பு

- $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$
- $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
- $\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$

பலவினப் பயிற்சி

1. பின்வருவனவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

(i) $\log_3 27 + \log_2 8$ (ii) $\log_3 243 - \log_3 27$ (iii) $\log_2 16 \times \log_3 9$

(iv) $\dfrac{\log_{10} 10}{\log_2 32}$ (v) $\log_a 5 + \log_a 3 - \log_a 15$

2. $\log_2 24 = x$ எனின், $\log_2 48$ இன் பெறுமானத்தை x இன் சார்பில் தருக.

3. பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றையும் வாய்ப்புப் பார்க்க.

(i) $\log_a\left(\frac{9}{10}\right) + \log_a\left(\frac{25}{81}\right) = \log_a 5 - \log_a 18$

(ii) $\log_5 1 + \log_5 20 - \log_5 8 + \log_5 2 = 1$

(iii) $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1 = \log_{10} 0.6$

4. பெறுமானம் காண்க.

(i) $\log_{10} 200 + \log_{10} 300 - \log_{10} 60$

(ii) $\log_{10}\left(\frac{12}{5}\right) + \log_{10}\left(\frac{25}{21}\right) - \log_{10}\left(\frac{2}{7}\right)$

5. தீர்க்க.

(i) $\log_{10} x - \log_{10} 2 = \log_{10} 3 - \log_{10} 4 + 1$

(ii) $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 x + 1$