17 இணைகரங்கள் II

இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,

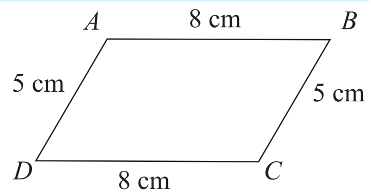
- ஒரு நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாவதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகளை அறிந்து கொள்வதற்குத்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமாகவுள்ள ஒரு நாற்பக்கல் இணைகரம் ஆகும். இணைகரங்களின் பண்புகள் பற்றிக் கடந்த பாடத்தில் கற்றோம்.

தேற்றம் : ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமமெனின், அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.

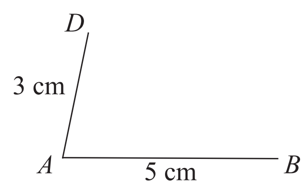
தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AB = DC$, $AD = BC$.
ஆகவே $ABCD$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.



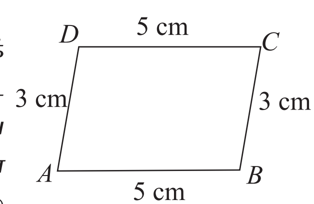
மேற்குறித்த தேற்றம் உண்மை என்பதை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 1

- புயங்களின் நீளங்கள் 5 cm , 3 cm ஆகவும் இருக்கும்போது உருவில் உள்ளவாறு $D\hat{A}B$ யை வரைக.
- B யிலிருந்து 3 cm தூரத்திலும் D யிலிருந்து 5 cm தூரத்திலும் உள்ள புள்ளி C யைப் பெறுக. இப்போது நாற்பக்கல் $ABCD$ யைப் பூரணப்படுத்துக.



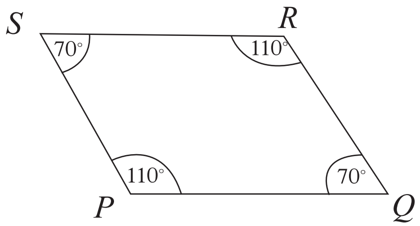
- அப்போது $AB = DC$, $AD = BC$ எனத் தெரிகின்றது.
- மூலைமட்டத்தையும் வரைகோலையும் பயன்படுத்தி அல்லது கோணங்களை அளப்பதன் மூலம் நேயக் கோணச் சோடி ஒன்றின் கூட்டுத்தொகை 180° எனக் காட்டுவதன்வதன்மூலமும் நாற்பக்கல் $ABCD$ யின் எதிர்ப் பக்கங்களுக்கிடையே சமாந்தரவியல்பு உள்ளதாவென ஆராய்க. அதிலிருந்து $AB//DC$ எனவும் $AD//BC$ எனவும் பெறுக.



- இதற்கேற்ப எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனாக உள்ள நாற்பக்கலின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமாந்தரமும் ஆகும். ஆகவே அவ்வாறான நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.

தேற்றம் : ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமெனின், அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

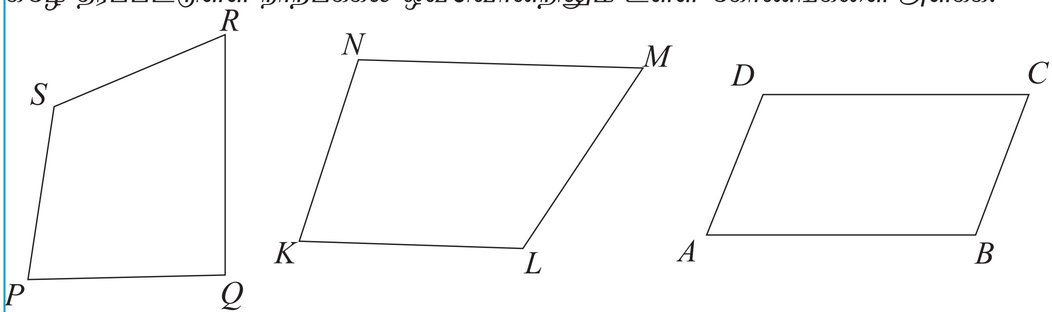
உதாரணமாக தரப்பட்டுள்ள உருவில் $P\hat{Q}R = P\hat{S}R$, $Q\hat{R}S = Q\hat{P}S$ ஆகையால், $PQRS$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.



மேற்குறித்தத் தேற்றம் உண்மையானது என்பதை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 2

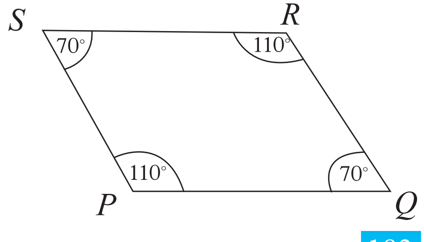
கீழே தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள கோணங்களை அளக்க.



- ஒவ்வொரு நாற்பக்கலினதும் எதிர்க் கோணச் சோடிகள் சமமாவெனப் பார்க்க.
- எதிர்க் கோணங்கள் சமமாக இருக்கும் நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கச் சோடி சமாந்தரமாவெனப் பார்க்க (நேயக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆக இருக்கின்றதாவெனப் பார்க்க).
- இதற்கேற்ப எதிர்க் கோணங்கள் சமமாக இருக்கும் நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமாக இருக்கும். எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமாகவுள்ள நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

தேற்றம் : ஒரு நாற்பக்கலின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுமெனின், அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

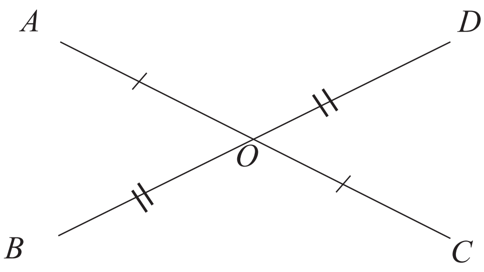
ஓர் உதாரணமாக நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் $AO = OC$, $BO = OD$ ஆகையால் $ABCD$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

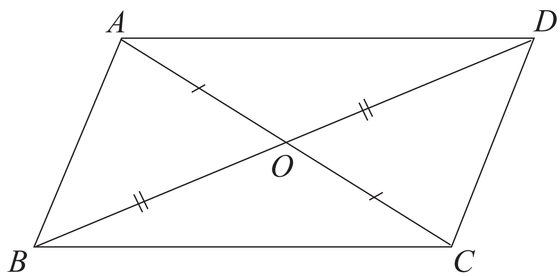


மேற்குறித்த தேற்றம் உண்மையானதா என்பதை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

செயற்பாடு 3

- AC யும் BD யும் மூலைவிட்டங்களாக இருக்கும் நாற்பக்கல் $ABCD$ யை வரைவதற்கு முதலில் மூலைவிட்டம் AC யை வரைந்து அதன் நடுப்புள்ளியை O எனக் குறிக்க.
- இப்போது மூலைவிட்டம் AC யை O இடைவெட்டுமாறு வேறோரு நேர் கோட்டுத் துண்டத்தை வரைக. $OB = OD$ ஆக இருக்குமாறு அக்கோட்டுத் துண்டத்தின் மீது B, D ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்க.

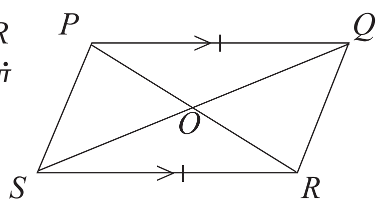




- இப்போது மேற்குறித்த நாற்பக்கல் $ABCD$ ஐப் பூரணப்படுத்துக.
- மூலைமட்டத்தையும் வரைகோலையும் பயன்படுத்தி அல்லது ஒன்றுவிட்டக் கோணங்களை அளந்து பார்ப்பதன் மூலம் நாற்பக்கல் $ABCD$ யின் AB , CD ஆகிய கோடுகளின் சமாந்தரத்தையும் BC , AD ஆகிய கோடுகளின் சமாந்தரத்தையும் பற்றி ஆராய்க.
- இதற்கேற்ப மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும் ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமெனத் தெரிகின்றது. ஆகவே அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.

தேற்றம்: ஒரு நாற்பக்கலின் ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனும் சமாந்தரமாகவும் இருப்பின், அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.

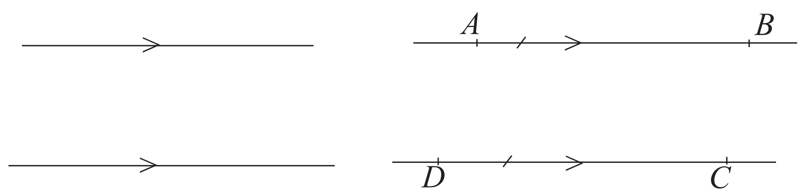
ஓர் உதாரணமாக நாற்பக்கல் $PQRS$ இல் $PQ = SR$ ஆகவும் $PQ//SR$ ஆகவும் இருப்பதனால் $PQRS$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.



மேற்குறித்த தேற்றம் உண்மையானது என்பதை உறுதிப்படுத்துவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுவோம்.

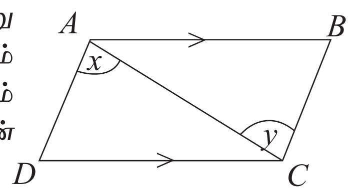
செயற்பாடு 4

- மூலைமட்டத்தையும் வரைகோலையும் பயன்படுத்தி அல்லது வேறொரு முறையினால் ஒரு சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடியை வரைக.
- அச்சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடியில் ஒன்று மீது A , B என இரு புள்ளிகளைக் குறிக்க.
- நீளம் AB யிற்குச் சமமான ஒரு நீளத்தை மற்றைய கோட்டின்மீது குறித்து DC எனப் பெயரிடுக.



- இப்போது நாற்பக்கல் $ABCD$ யைப் பூரணப்படுத்தி உருவில் உள்ளவாறு மூலைவிட்டம் AC யை வரைக.

பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி x , y ஆகிய ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடியை அளந்து பார்ப்பதன் மூலம் அல்லது மூலைமட்டத்தையும் வரைகோலையும் பயன்படுத்துவதன் மூலம் AD , BC பக்கங்களின் சமாந்தரம் பற்றி விளங்கிக் கொள்க.



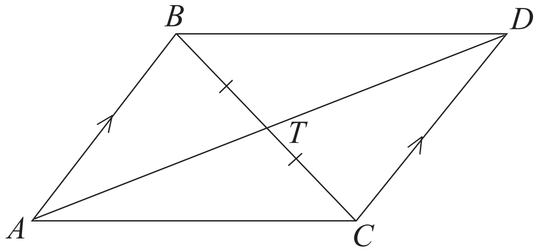
- இதறகேற்ப, ஓர் எதிர்ப் பக்கச் சோடி சமமும் சமாந்தரமுமாக இருக்கும் ஒரு நாற்பக்கலின் மற்றைய சோடி எதிர்ப் பக்கமும் சமாந்தரமாகும் ஆகவே அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

மேற்குறித்த தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி ஏறிகளை நிறுவும் முறை பற்றிக் கீழேயுள்ள உதாரணத்தின் மூலம் ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

முக்கோணி ABC யில் பக்கம் BC யின் நடுப் புள்ளி T ஆகும். AB இற்குச் சமாந்தரமாக C யினூடாக வரையப்பட்ட கோடு நீட்டப்பட்ட AT யை D யிற் சந்திக்கின்றது. $ABDC$ ஓர் இணைகரமென நிறுவுக.

முதலில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப உருவை வரைவோம்.



எதிர்ப் பக்கச் சோடி சமமும் சமாந்தரமுமாக இருக்கும் நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் என்பதை நாம் அறிவோம். ஆகவே, ஒரு பக்கச் சோடி சமமும் சமாந்தரமுமெனக் காட்டுவோம். $AB \,//\, CD$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $AB = CD$ எனக் காட்டுவோம்.

அதற்காக $\Delta\, ABT$ யும் $\Delta\, CTD$ யும் ஒருங்கிசைகின்றனவெனக் காட்டுவோம்.
$\Delta ABT, \Delta CTD$ ஆகியவற்றில்

$\Delta\, ABT \;,\; \Delta CTD$

$BT = TC$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$A\hat{T}B = C\hat{T}D$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

$A\hat{B}T = T\hat{C}D$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$\Delta\, ABT \equiv \Delta\, CTD$ (கோ.கோ.ப)

ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புக்கள் சமமாகையால்

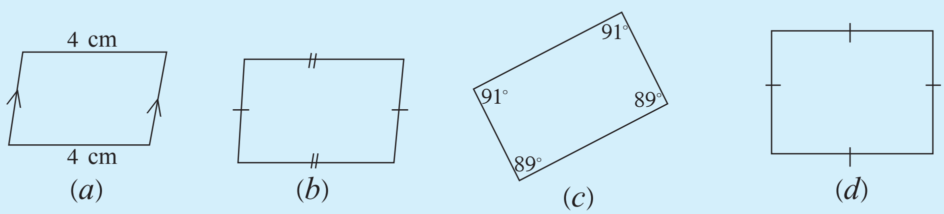
$AB = CD$

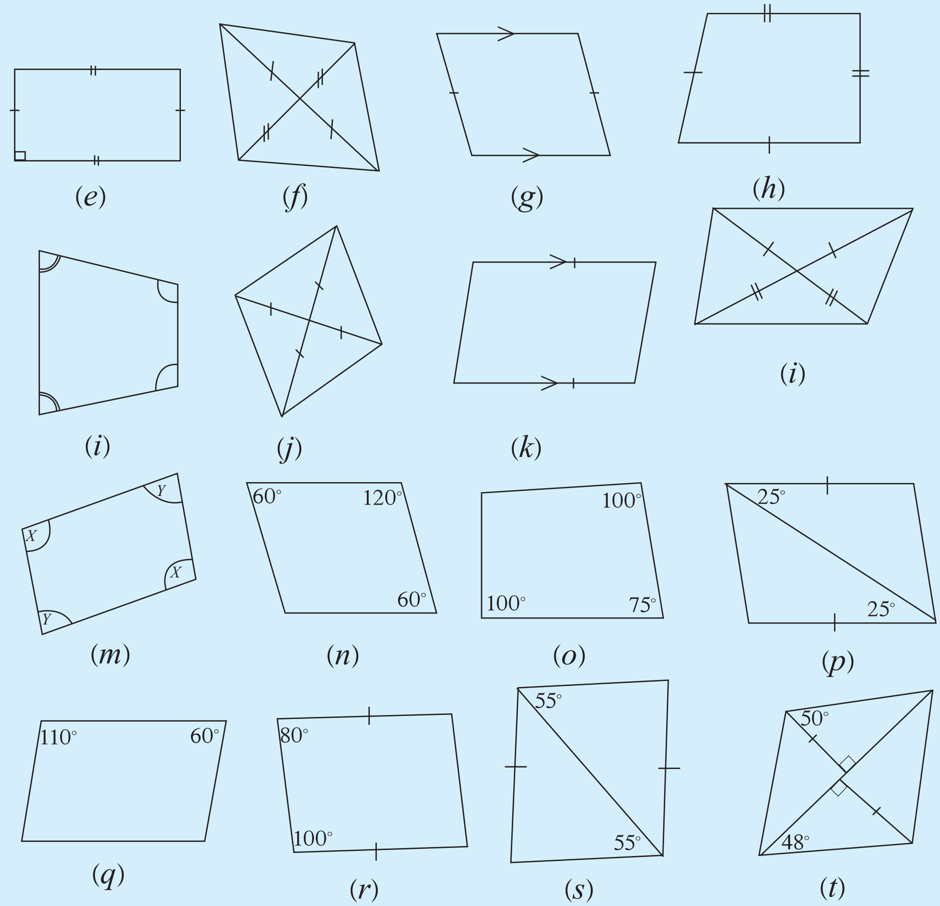
அத்துடன் $AB \,//\, CD$

$\therefore$ நாற்பக்கல் $ABDC$ ஓர் இணைகரமாகும்.

பயிற்சி 16.1

1. பின்வரும் நாற்பக்கல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களை மாத்திரம் கொண்டு இணைகரமென முடிவுசெய்யத்தக்க நாற்பக்கல்களைத் தெரிந்தெடுக்க.

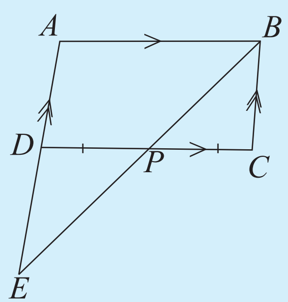




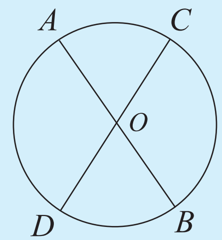
2. ஓர் இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் DC யின் நடுப் புள்ளி P ஆகும். நீட்டப்பட்ட AD யும் நீட்டப்பட்ட BP யும் E யிற் சந்திக்கின்றன.

(i) $\Delta\, BCP \equiv \Delta\, DPE$ எனவும்

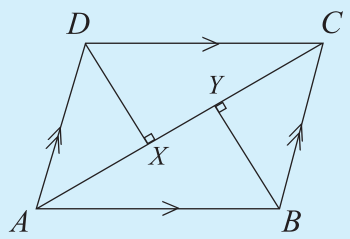
(ii) நாற்பக்கல் $BCED$ ஓர் இணைகரம் எனவும் நிறுவுக.



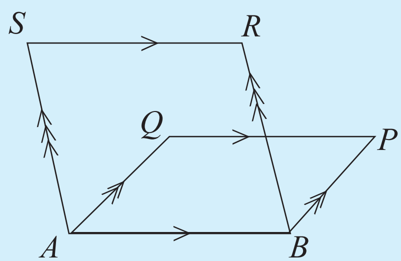
3. AB , CD என்பன O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் இரு விட்டங் களாகும். A, B, C , D ஆகிய புள்ளி கள் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளென நிறுவுக.



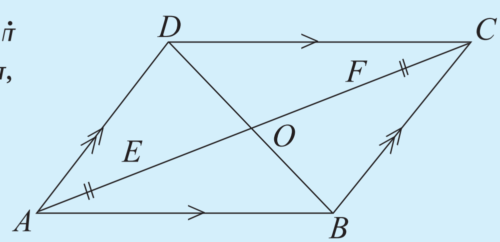
4. இணைகரம் $ABCD$ யில் D, B ஆகிய உச்சிகளில் இருந்து மூலைவிட்டம் AC யிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் X , Y ஆகும்.
   (i) $\Delta\, AXD \equiv \Delta\, BYC$ எனவும்
   (ii) $DX = BY$ எனவும்
   (iii) $BYDX$ ஓர் இணைகரம் எனவும்
   நிறுவுக.



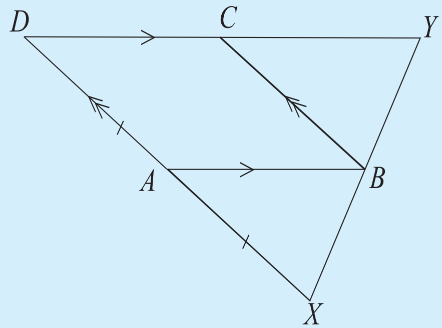
5. $ABPQ$, $ABRS$ என்னும் இரு இணை கரங்கள் உருவிற் காணப்படுன்றன. $QPRS$ ஓர் இணைகரமென நிறுவுக.



6. உருவில் $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும். $AE = FC$ எனின், $EBFD$ ஓர் இணைகரமென நிறுவுக.



7. உருவில் இணைகரம் $ABCD$ இல் $DA = AX$ ஆகுமாறு கோடு DA ஆனது X இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. நீட்டப்பட்ட DC ஆனது XB யை Y இல் சந்திக்கின்றது.



8. இணைகரம் $PQRS$ இன் மூலைவிட்டங்கள் O இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன. PR மீது M , T என்னும் புள்ளிகளும் QS மீது L , N என்னும் புள்ளிகளும், $PM = RT$, $SN = QL$ ஆக இருக்குமாறு உள்ளன.

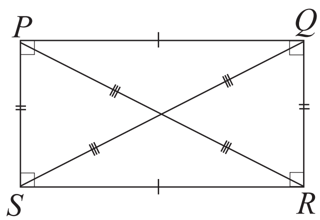
(i) $MO = OT$,

(ii) $LMNT$ ஓர் இணைகரம் எனவும்

(iii) $MSTQ$ ஓர் இணைகரம் எனவும் நிறுவுக.

சிறப்பியல்புகள் உள்ள இணைகரங்கள்

1. செவ்வகம்

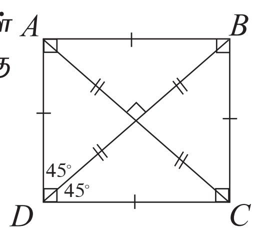


ஓர் இணைகரத்தின் ஒரு கோணம் செங்கோணமாக இருக்கும்போது எஞ்சிய கோணங்களும் செங்கோணங் களாகும். அத்தகைய ஓர் இணைகரம் செவ்வக மாகும். இணைகரத்தின் இயல்புகளுக்கு மேலதிகமாக செவ் வகத்திற்குப் பின்வரும் இயல்புகள் உண்டு.

(i) உச்சிக் கோணங்கள் எல்லாம் செங்கோணங்களாகும்.

(ii) மூலைவிட்டங்கள் நீளத்திற் சமன்

2. சதுரம்



இரு அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமான இருக்கும் செவ்வகங்கள் சதுரங்களாகும். ஓர் இணைகரத்தின் இயல்புகளுக்கு மேலதிகமாகப் பின்வரும் இயல்புகள் ஒரு சதுரத்தில் காணப்படுகின்றன.

(i) எல்லாப் பக்கங்களும் நீளத்திற் சமம்

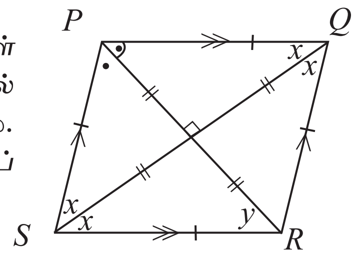
(ii) எல்லா உச்சிக் கோணங்களும் செங்கோணங்களாகும்.

(iii) மூலைவிட்டங்கள் நீளத்திற் சமம்.

(iv) மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணத்தில் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுகின்றன.

(v) உச்சியில் உளள கோணம் மூலைவிட்டத்தினால் இருசமகூறிடப்படுகின்றது.

3. ***சாய்சதுரம்***



ஓர் இணைகரத்தின் இரு அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக இருக்கும்போது நான்கு பக்கங்களும் நீளத்தில் சமமாகும். அத்தகைய இணைகரம் சாய்சதுரமாகும். ஓர் இணைகரத்தின் இயல்புகளுக்கு மேலதிகமாகப் பின்வரும் இயல்புகள் ஒரு சாய்சதுரத்திற்கு உள்ளன.

(i) எல்லாப் பக்கங்களும் சமம்.

(ii) மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணத்தில் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுன்றன

(iii) உச்சிக் கோணங்கள் மூலைவிட்டங்களினால் இருசமகூறிடப்படுகின்றன.

பலவினப் பயிற்சி

1. உருவில் தரப்பட்டுள்ள இணைகரம் $ABCD$ இல் $DF = EB$ எனின் $AECF$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

2. முக்கோணி ABC இல் $A\hat{B}C$ இன் இருசமகூறாக்கியானது பக்கம் AC ஐ P இல் இடைவெட்டுகின்றது. BC இற்குச் சமாந்தரமாக A இனூடாக வரைந்த கோட்டை நிட்டப்பட்ட BP ஆனது D இல் சந்திக்கின்றது. $BP = PD$ எனின்

(i) $\Delta\, BCP = \Delta\, ADP$ எனவும்

(ii) $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரம் எனவும் நிறுவுக.

(iii) $AC = 18$ cm $BD = 24$ cm ஆயின் AB இன் நீளத்தைக் காண்க.

3. ஒரு முக்கோணி ABC யில் AB , AC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் X, Y ஆகும். C யினூடாக AB யிற்குச் சமாந்தரமாக XY யும் Z இற் சந்திக்கின்றன.

(i) $\Delta AXY \equiv \Delta CXY$ எனவும்

(ii) $BCZX$ எனவும் நிறுவுக.

4. இணைகரம் $ABCD$ யில் AB, BC, CD , AD ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P, Q, R , S ஆகும்.

(i) $\Delta ASP \equiv \Delta CQR$ எனவும்

(ii) $PQRS$ ஓர் இணைகரம் எனவும் நிறுவுக.