16 இணைகரங்கள் I

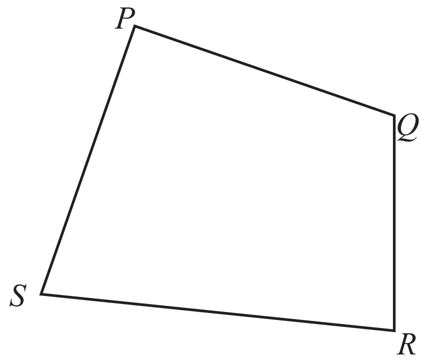
இப்பாடத்தைக் கற்பதன்மூலம் நீங்கள்,

- இணைகரங்களின் பண்புகள் பற்றி அறியத்

தேவையான ஆற்றலைப் பெறுவீர்கள்.

இணைகரங்கள்

நான்கு நேர்கோட்டுத் துண்டங்களினால் மூடப்பட்டுள்ள தள உருவம் ஒரு நாற்பக்கலாகும். ஒரு நாற்பக்கலின் எதிர்ப் பக்கங்கள் எதிர்க் கோணங்கள் பற்றி ஆராய்வோம்.

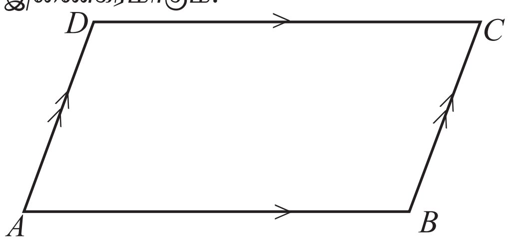


நாற்பக்கல் $PQRS$ இல்,

PQ, SR ஆகியன ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் ஆவதுடன் மற்றைய சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் PS, QR ஆகும்.

$S\hat{P}Q$, $S\hat{R}Q$ ஆகியன ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் ஆவதுடன் மற்றைய எதிர்க் கோணச் சோடி $P\hat{Q}R$, $P\hat{S}R$ ஆகும்.

நாற்பக்கல் ஒன்றின் இரண்டு சோடி எதிர்ப் பக்கங்களும் சமாந்தரமாயின் அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரமாகும்.



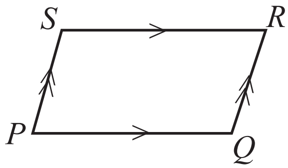
மேலேயுள்ள இணைகரத்தில் AB ,DC ஆகிய பக்கங்கள் சமாந்தரமானவை என்பதைக் காட்டுவதற்கு ஒரு அம்புக்குறி வீதமும் BC, AD ஆகிய பக்கங்கள் சமாந்தரமானவை என்பதைக் காட்டுவதற்கு இரண்டு அம்புக்குறிகள் வீதமும் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

முதலில் இணைகரங்களின் பண்புகளை அறிந்து கொள்வதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டில் ஈடுபடுக.

16.1 இணைகரத்தின் பண்புகள்

செயற்பாடு 1

மூலைமட்டத்தையும் நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி ஓர் இணைகரம் வரைக. அதற்கு உருவிலுள்ளவாறு $PQRS$ எனப் பெயரிடுக.



(1) நீங்கள் வரைந்த இணைகரம் $PQRS$ இல்,

(i) PQ, QR, SR , PS ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்களை அளக்க.

(ii) எதிர்ப் பக்கச் சோடிகளான PQ, SR இன் நீளங்கள் பற்றியும் PS, QR இன் நீளங்கள் பற்றியும் நீர் யாது கூறலாம்?

$PQ = SR$ எனவும் $PS = QR$ எனவும் தெளிவாகின்றது.

(2) மேலே நீங்கள் வரைந்த இணைகரத்தில்

$P\hat{Q}R$, $Q\hat{P}S$, $P\hat{S}R$, $Q\hat{R}S$ ஆகிய கோணங்களின் பெறுமானங்களை அளக்க.

எதிர்க் கோணங்களான $Q\hat{P}S$, $Q\hat{R}S$ என்பவற்றின் பருமன் பற்றியும் $R\hat{S}R$, $P\hat{Q}R$ என்பவற்றின் பருமன் பற்றியும் நீர் யாது கூறலாம்?

$Q\hat{P}S = Q\hat{R}S$ எனவும் $P\hat{S}R = P\hat{Q}R$ எனவும் தெளிவாகின்றது.

(3) இணைகரம் $PQRS$ ஐத் திசுத்தாளில் பிரதிசெய்து அதன் இரண்டு பிரதிகளை வரைந்து வெட்டி எடுத்துக் கொள்க. ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் PR ஐ வரைக. இனி மூலைவிட்டம் வழியே வெட்டியெடுத்துப் பெறப்படும் முக் கோணிகள் ஒன்றன்மீது ஒன்று பொருந்துகின்றதா எனப்பார்க்க.

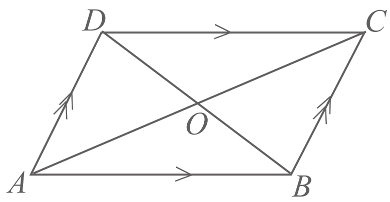
அம்முக்கோணிகள் ஒன்றன்மீது ஒன்று பொருந்துவது தெளிவாகும். அதாவது இரண்டு முக்கோணிகளினதும் பரப்பளவுகளும் சமனாகும். இவ்வாறே மற்றைய மூலைவிட்டம் வழியே வெட்டும்போது பெறப்படும் இரண்டு முக்கோணிகளினதும் பரப்பளவுகள் சமனாவதை அவதானிப்பதற்காக நீங்கள் வெட்டியெடுத்த மற்றையப பிரதிகளைப் பயன்படுத்துக.

மேலேயுள்ள செயற்பாட்டிற்கேற்ப,

ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனானவை என்பதும் எதிர்க் கோணங்கள் சமனானவை என்பதும் இணைகரத்தின் ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தினாலும் இணைகரத்தின் பரப்பளவானது இருசமகூறிடப்படுகின்றது என்பதும் தெளிவா கிறது.

செயற்பாடு 2

செயற்பாடு 1 இல் போன்று மூலைமட்டத்தையும் நேர்விளிம்பையும் பயன்படுத்தி ஓர் இணைகரம் வரைக. அதனை உருவில் உள்ளவாறு $ABCD$ எனப் பெயரிடுக.



இப்போது AC, BD ஆகிய மூலைவிட்டங்களை வரைக. அவை இடைவெட்டும் புள்ளியை O எனப் பெயரிடுக.

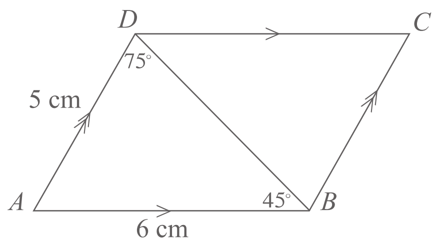
- AO, OC, OB , OD ஆகியவற்றின் நீளங்களை அளக்க.
- AO , OC நீளங்கள் பற்றி நீங்கள் யாது கூறுவீர்?
- OB , OD ஆகிய நீளங்கள் பற்றி நீங்கள் யாது கூறுவீர்?
- $AO = OC$ என்பதும் $OB = OD$ என்பதும் தெளிவாகிறது.

இதற்கேற்ப, ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுகின்றன என்பது தெளிவாகிறது.

இனி, ஓர் இணைகரத்தில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளிலிருந்து இணைகரத்தின் மற்றைய உறுப்புகளைக் கண்டுகொள்ளும் முறையினை ஆராய்வோம்.

இணைகரம் $ABCD$ இல் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப பின்வரும் பக்கங்களினதும் கோணங்களினதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) BC இன் நீளம்
(ii) DC இன் நீளம்
(iii) $B\hat{A}D$
(iv) $B\hat{C}D$
(v) $A\hat{B}C$
(vi) $A\hat{D}C$



(i) ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனானவை என்பதால்

$AD = BC$ உம் $AB = CD$ உம் ஆகும்.

$\therefore BC = 5$ cm

(ii) $DC = 6$ cm

(iii) ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° என்பதால்

$$B\hat{A}D = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ$$
$$= 60^\circ$$

(iv) ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்க் கோணங்கள் சமனானவை என்பதால்

$B\hat{A}D = B\hat{C}D$

$\therefore B\hat{C}D = 60^\circ$

(v) $A\hat{D}B = C\hat{B}D$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$\therefore C\hat{B}D = 75^\circ$

$A\hat{B}C = A\hat{B}D + C\hat{B}D$

$\therefore A\hat{B}C = 45^\circ + 75^\circ$

$= 120^\circ$

(vi) ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமனாவதால்

$A\hat{B}C = A\hat{D}C$

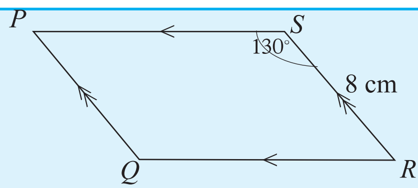
$\therefore A\hat{D}C = 120^\circ$

பயிற்சி 16.1

1. இணைகரம் $PQRS$ இல் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப

(i) பக்கம் PQ வின் நீளத்தைக் காண்க.

(ii) $Q\hat{P}S$, $P\hat{Q}R$, $Q\hat{R}S$ ஆகிய கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.

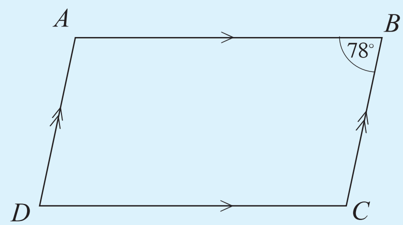


2. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

(i) $B\hat{C}D$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு 24 cm^2 ஆயின், முக்கோணி BCD இன் பரப்பளவு யாது?

(iii) முக்கோணி ACD இன் பரப்பளவு யாது?



3. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

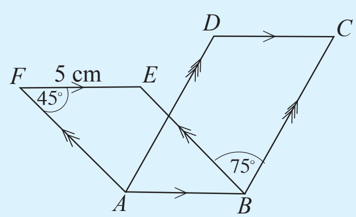
(i) DC இன் நீளத்தைக் காண்க.

(ii) $A\hat{B}E$ இன் பெறுமானம்

(iii) $A\hat{D}C$ இன் பெறுமானம்

(iv) $B\hat{C}D$ இன் பெறுமானம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.



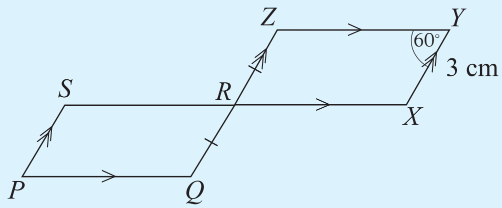
4. உருவிலுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

(i) PS இன் நீளம்

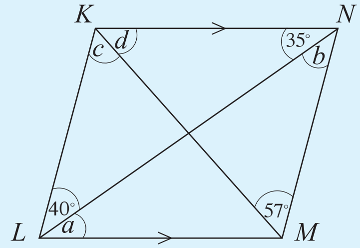
(ii) $Q\hat{P}S$ இன் பருமன்

(iii) $P\hat{Q}R$ இன் பருமன்

ஆகியவற்றைக் காண்க .



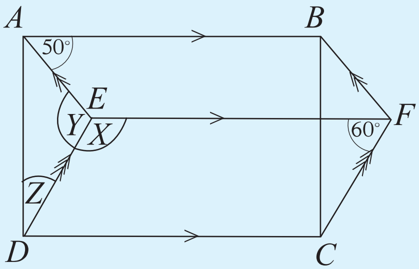
5. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப a, b, c, d ஆகியவற்றால் தரப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



6. உருவில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப,

(i) பக்கம் DC இன் நீளத்திற்குச் சமமான இரண்டு பக்கங்களைப் பெயரிடுக.

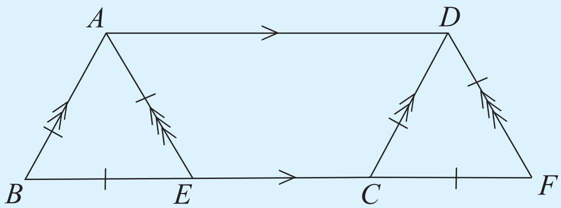
(ii) x, y, z ஆகியவற்றினால் தரப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



7. உருவில் $ABCD$, $ADFE$ ஆகியன இரண்டு இணைகரங்களாகும் இங்கு தரப்பட்டுள்ள தகவல் களுக்கேற்ப

(i) BC இன் நீளம்.

(ii) $A\hat{D}C$, $E\hat{C}D$, $C\hat{F}D$ ஆகிய கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



16.2 ஓர் இணைகரத்தின் பண்புகள் தொடர்பான தேற்றங்கள்

இணைகரங்களுக்காக நாம் அவதானிக்கும் பண்புகள் எல்லா இணைகரங்களுக்கும் பொதுவானவை என்பதால் அவற்றை பின்வருமாறு ஒரு தேற்றமாக முன்வைக்கலாம்.

தேற்றம் : ஓர் இணைகரத்தில்,

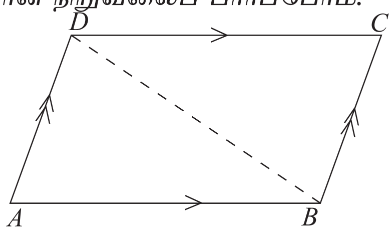
(i) எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனானவை ஆகும்.

(ii) எதிர்க் கோணங்கள் சமனானவை ஆகும்.

(iii) ஒவ்வொரு மூலைவிட்டமும் இணைகரத்தின் பரப்பளவை இருசமகூறிடும்.

(iv) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும்.

இத்தேற்றத்தின் முறையான நிறுவலைப் பார்ப்போம்.



தரவு : $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும்.

நி. வே. : (i) $AB = DC$, $AD = BC$

(ii) $B\hat{A}D = B\hat{C}D$, $A\hat{D}C = A\hat{B}C$

(iii) $\Delta\ ABD$ இன் பரப்பளவு = $\Delta\ BCD$ இன் பரப்பளவு

$\Delta\ ABC$ இன் பரப்பளவு = $\Delta\ ADC$ இன் பரப்பளவு

அமைப்பு : மூலைவிட்டம் BD ஐ வரைதல்

ABD , BCD ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளையும் ஒருங்கிசையச் செய்வதன் மூலம் தேவையான மூன்று விடைகளையும் பெற்றுக் கொள்ளலாம் இரண்டு முக்கோணிகளும் கோ.கோ.ப. நிபந்தனையின் கீழ் ஒருங்கிசைகின்றன என்பதை இவ்வாறு நிறுவோம்

நிறுவல் - ABD , BCD ஆகிய முக்கோணிகளில்

$A\hat{D}B = C\hat{B}D$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $AD//BC$)

$A\hat{B}D = B\hat{D}C$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் $AD//BC$)

BD பொது பக்கம்

$\therefore \Delta\ ABD \equiv \Delta\ BCD$ (கோ.கோ.ப.)

ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமன் என்பதால்

(i) $AB = DC$, $AD = BC$ ஆகும்

(ii) $B\hat{A}D = B\hat{C}D$ ஆகும்.

மேலும் $B\hat{D}A = D\hat{B}C$ யும்

$B\hat{D}C = D\hat{B}A$ யும் ஆகும்.

$$\underbrace{B\hat{D}A + B\hat{D}C}_{A\hat{D}C} = \underbrace{D\hat{B}C + D\hat{B}A}_{A\hat{B}C}$$

$A\hat{D}C = A\hat{B}C$

(iii) $\Delta\, ABD = \Delta\, BCD$ (ஒருங்கிசைவான Δ கள் பரப்பளவில் சமமானவை)

இவ்வாறே AC ஐ இணைப்பதன் மூலம்

$\Delta\, ACD \equiv \Delta\, ABC$ எனக் காட்டுவதன் மூலம்

$\Delta\, ABC$ இன் பரப்பளவு $= \Delta\, ACD$ இன் பரப்பளவு

மூலைவிட்டம் AC ஐ வரைவதன் மூலமும் மேலேயுள்ளவற்றை நிறுவலாம்.

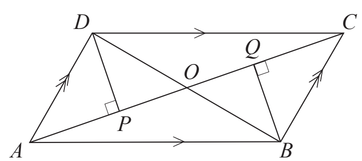
உதாரணம் 1

இணைகரம் $ABCD$ இல் மூலைவிட்டம் BD இன் மீது $BP = DQ$ ஆகுமாறு P, Q என்பன குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $\Delta\, ADQ \equiv \Delta\, BPC$ எனவும்

(ii) $AQ /\!/ PC$ எனவும்

நிறுவுக.



நிறுவல் (i) ADQ , BPC ஆகிய முக்கோணிகளில்

$DQ = BP$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AD = BC$ (இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமன் என்பதால்)

$A\hat{D}Q = P\hat{B}C$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$\therefore \Delta\, A\hat{D}Q \equiv \Delta\, B\hat{P}C$ (ப.கோ.ப.)

(ii) ADQ, BPC ஆகிய முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவதால் ஒத்த உறுப்புகளும் சமமாகும்.

$A\hat{Q}D = B\hat{P}C$

$$\therefore A\hat{Q}P = Q\hat{P}C \qquad \left(A\hat{Q}D + A\hat{Q}P = B\hat{P}C + C\hat{P}Q = 180^0\right)$$

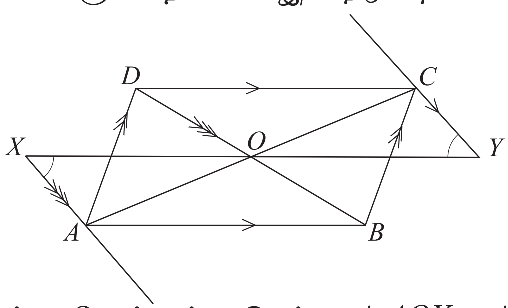
ஆனால் $A\hat{Q}P, Q\hat{P}C$ ஆகியன ஒன்றுவிட்ட கோணங்களாகும்.

ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமனாவதால்

$AQ /\!/ PC$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

கீழே தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப XY இன் நடுப்புள்ளி O எனக் காட்டுக.



$XO = YO$ எனக் காட்ட வேண்டும். இதற்கு $\Delta\, AQX = \Delta\, COY$ எனக் காட்டு வேண்டும்.

நிறுவல் :

$\Delta\, AOX, \Delta\, COY$ (என்பவற்றில்)

$A\hat{X}O = C\hat{Y}O$ ($AX//CY$, ஒன்றுவிட்டக் கோண்ங்கள்)

$A\hat{X}O = C\hat{Y}O$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)

$AO = AC$ (இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும்)

$AOX\Delta \equiv COY\Delta$ (கோ.கோ.ப.)

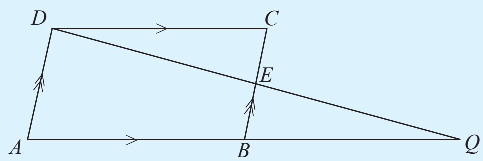
ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள் என்பதால்

$\therefore\ OX = OY$

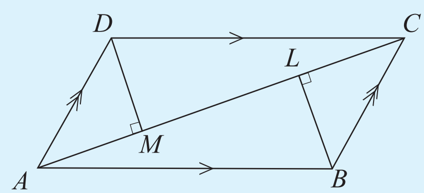
$\therefore\ O$ ஆனது xy இன் நடுப்புள்ளி ஆகும்.

பயிற்சி 16.2

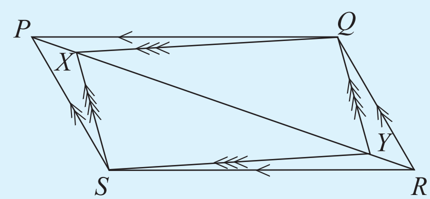
1. இணைகரம் $ABCD$ இல் பக்கம் BC இன் நடுப்புள்ளி E ஆகும். நீட்டப்பட்ட DE உம் AB உம் ஒன்றையொன்று Q வில் சந்திக்கின்றன. $AB = BQ$ என நிறுவுக.



2. இணைகரம் $ABCD$ இல் B, D ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் BL, DM ஆகும். $BL = DM$ எனக் காட்டுக.



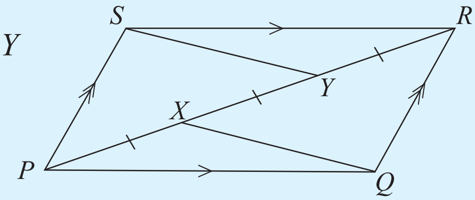
3. உருவில் $PQRS$, $QYSX$ ஆகிய இரண்டு இணைகரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.



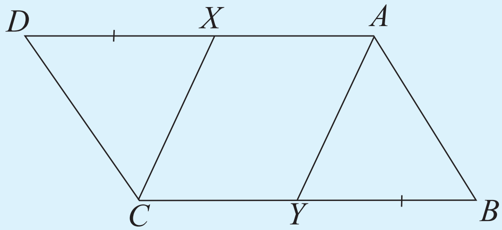
(i) $PY = RY$ என நிறுவுக.

(ii) நாற்பக்கல் $PSXQ$ இன் பரப்பளவு $=$ நாற்பக்கல் $SRQY$ இன் பரப்பளவு

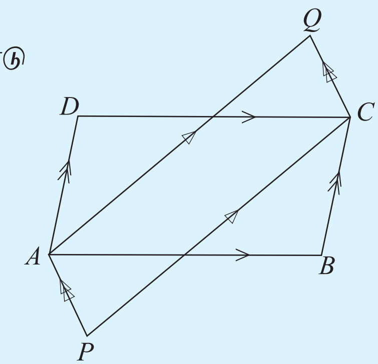
4. $PQRS$ ஓர் இணைகரமாகும்.
$PX = XY = YR$ ஆகுமாறு PR மீது X , Y ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.
(i) $QX = SY$ எனவும்.
(ii) QX // SY எனவும் நிறுவுக.



5. உருவிலுள்ள $ABCD$ ஓர் AD, BC ஆகிய பக்கங்களின் மீது $DX = BY$ ஆகுமாறு X, Y ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன.
(i) $\Delta ABY \equiv \Delta DCX$ என நிறுவுக.
(ii) AY // XC என காட்டுக.



6. உருவில் $ABCD$, $APCQ$ ஆகிய இரண்டு இணைகரங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன.
(i) AC, BD, PQ ஆகியன ஒரே புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றனவென நிறுவுக.



7. இணைகரம் $PQRS$ இல் $P\hat{S}R$, $Q\hat{R}S$ ஆகிய கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் PQ இன் மீதுள்ள புள்ளி X இல் இடைவெட்டுகின்றன.
(i) இத் தகவல்களை உள்ளடக்கிய உருவப்படமொன்று வரைக
(ii) $PX = PS$ என நிறுவுக.
(iii) X ஆனது PQ இன் நடுப்புள்ளி என நிறுவுக.
(iv) $PQ = 2PS$ என நிறுவுக.