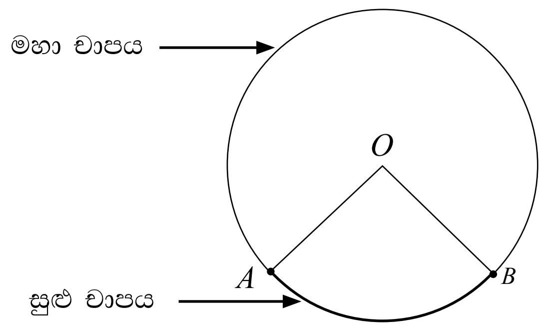
31 වෘත්තයක කෝණ

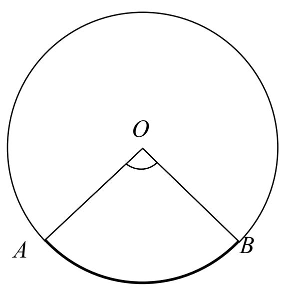
මෙම පාඩම හැදෑරීමෙන් ඔබට

වෘත්තයක කෝණ සම්බන්ධ ප්‍රමේය හඳුනා ගැනීමට හා ඒවා භාවිත කිරීමට හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

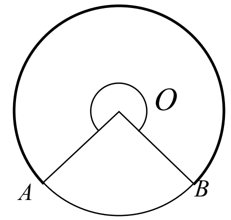
31.1 වෘත්ත චාපයකින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත සහ වෘත්තයේ පරිධිය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණ



ඉහත වෘත්තය මත පිහිටි A සහ B ලක්ෂ්‍ය දෙකෙන් වෘත්තය කොටස් දෙකකට වෙන්වේ. මෙම කොටස්වලට චාප යැයි කියනු ලැබේ. A හා B යා කරන රේඛාව වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරන විට, එනම් වෘත්තයේ විෂ්කම්භයක් වන විට මෙම චාප දෙක දිගින් සමාන වේ. එසේ ගමන් නොකරන විට චාප දෙක දිගින් අසමාන වේ. මෙවිට දිගින් අඩු චාපයට **සුළු චාපය** යැයි ද දිගින් වැඩි චාපයට **මහා චාපය** යැයි ද කියනු ලැබේ.

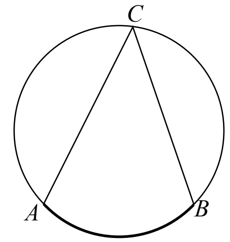


ඉහත රූපයේ තද පාටින් දැක්වෙන සුළු චාපයේ දෙකෙළවර වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයට යා කිරීමෙන් සෑදෙන සුළු කෝණය වන $A\hat{O}B$, AB සුළු චාපය මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලෙස හැඳින්වේ.

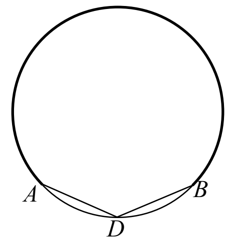


ඉහත රූපයේ තද පාටින් දැක්වෙන මහා චාපයේ දෙකෙළවර වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයට යා කිරීමෙන් සෑදෙන කෝණය වන $A\hat{O}B$ පරාවර්තන කෝණය, AB මහා චාපය මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලෙස හැඳින්වේ.

සටහන: මහා චාපය මගින් වෘත්තයක කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය සැම විටම පරාවර්තන කෝණයකි.

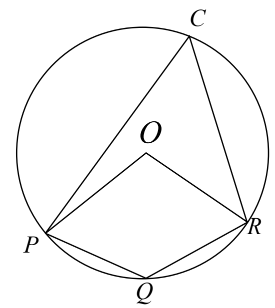


C යනු AB මහා චාපය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. AB සුළු චාපයේ දෙකෙළවර, මහා චාපය මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයට යා කිරීමෙන් $A\hat{C}B$ ලැබේ. එනම්, $A\hat{C}B$ යනු AB සුළු චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයකි.



මේ අයුරෙන්ම, පහත රූපයේ දැක්වෙන $A\hat{D}B$, AB මහා චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයක් ලෙස හැඳින්විය හැකි ය.

නිදසුන 1



දී ඇති රූප සටහනේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.

(a) PR සුළු චාපය මගින්

(i) වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයත්

(ii) වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයත් ලියා දක්වන්න.

(b) PR මහා චාපය මගින්

(i) වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයත්

(ii) වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයත් ලියා දක්වන්න.

(a) (i) $P\hat{C}R$

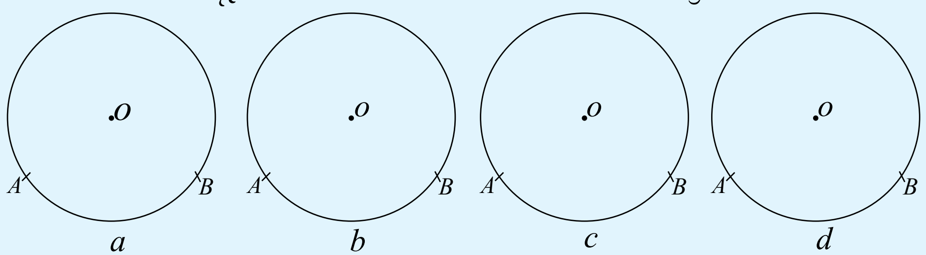
(ii) $P\hat{O}R$

(b) (i) $P\hat{Q}R$

(ii) $P\hat{O}R$ පරාවර්තන කෝණය

31.1 අභ්‍යාසය

1. දී ඇති රූප සටහනේ දැක්වෙන වෘත්ත හතර ඔබේ අභ්‍යාස පොතේ පිටපත් කර ගන්න. O මගින් දැක්වෙන්නේ එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි.



පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවේ දී අසා ඇති කෝණය ලකුණු කරන්න.

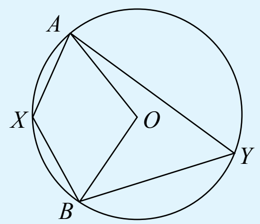
(i) a රූපයේ සුළු චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයක්

(ii) b රූපයේ සුළු චාපය මගින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය

(iii) c රූපයේ මහා චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයක්

(iv) d රූපයේ මහා චාපය මගින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය

2. රූපසටහන අනුව,



(i) AB සුළු චාපය මගින්

(a) වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයක්

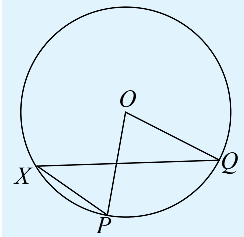
(b) වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලියන්න.

(ii) AB මහා චාපය මගින්

(a) වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයක්

(b) වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලියන්න.

3. දී ඇති රූපයේ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ. PQ මහා චාපය මත X ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත.



(i) PQ සුළු චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලියන්න.

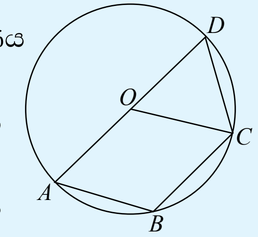
(ii) PQ සුළු චාපය මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලියන්න.

(iii) PQ සුළු චාපය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය Y ලෙස නම් කරන්න. $P\hat{Y}Q$ කෝණය හඳුන්වන්න.

(iv) PQ මහා චාපය මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලියන්න.

4. දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.

(i) AC සුළු චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයක් නම් කරන්න.

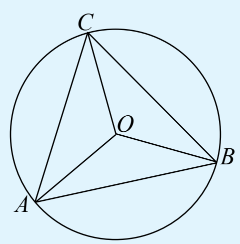


(ii) AC සුළු චාපය කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලියන්න.

(iii) AC මහා චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණයක් ලියන්න.

(iv) AC මහා චාපය මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලියන්න.

5. දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.



(i) AB සුළු චාපය මගින්

(a) වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය

(b) වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලියන්න.

(ii) BC සුළු චාපය මගින්

(a) වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය

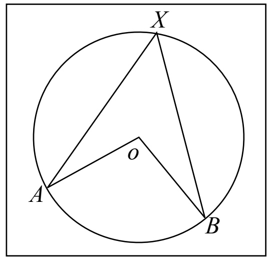
(b) වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය ලියන්න.

31.2 චාපයකින් කේන්ද්‍රය හා වෘත්තය මත ආපාතනය කරන කෝණ අතර සම්බන්ධය

වෘත්ත චාපයකින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය සහ එම චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය අතර සම්බන්ධය පිළිබඳ ව අවබෝධයක් ලබා ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි යෙදෙමු.

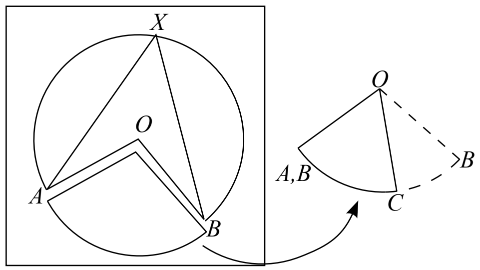
ක්‍රියාකාරකම

ටිෂූ කඩදාසියක වෘත්තයක් ඇඳ එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න. සුළු චාපයක් හා මහා චාපයක් ලැබෙන පරිදි වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කරන්න. එම ලක්ෂ්‍ය A හා B ලෙස නම් කරන්න.



මහා චාපය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය X ලෙස නම් කරන්න.

AB සුළු චාපයෙන් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය හඳුනා ගන්න. එය $A\hat{O}B$ වේ. පහත රූප සටහනේ දැක්වෙන පරිදි AOB කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩය කපා වෙන්කර ගන්න.



- $A\hat{O}B$ හරි අඩක් ලබා ගැනීම සඳහා වෙන් කරගත් AOB කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයේ OA මත OB සම්පාත වන සේ දෙකට නවන්න.
- නවන ලද කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩය $A\hat{X}B$ කෝණය මත තබා නිරීක්ෂණය කරන්න.

එනම්, AB සුළු චාපය මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය වන $A\hat{O}B$ එම චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කරන $A\hat{X}B$ මෙන් දෙගුණයක් බවට තහවුරු වන්නට ඇත. ඉහත ආකාරයටම වෙනස් අරවලින් යුත් වෘත්තවල වෙනස් දිගින් යුත් චාප කොටස් ලකුණු කර, ඉහත ක්‍රියාකාරකම නැවත කරන්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකම්වල දී වෘත්තයක චාපයකින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය එම චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් බව නිරීක්ෂණය කිරීමට හැකිවනු ඇත.

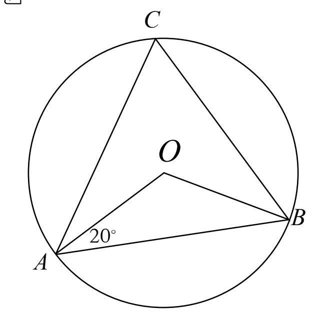
එම ප්‍රතිඵලය ජ්‍යාමිතික ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත දැක්වේ.

ප්‍රමේයය

වෘත්ත චාපයක් මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය, එම චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ.

ඉහත දැක්වූ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් කරන අයුරු පහත දැක්වෙන නිදසුන් මගින් විමසා බලමු.

කේන්ද්‍රය O වන වෘත්තයක් මත A, B සහ C ලෙස ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. $O\hat{A}B = 20^\circ$ නම්; $A\hat{C}B$ අගය සොයමු.



$OA = OB$ (එකම වෘත්තයේ අරය සමාන වේ.)

$\therefore OAB$ ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් වේ.

සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A$$

$$\therefore \; O\hat{B}A = 20^\circ \text{ වේ.}$$

ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ 3 හි එකතුව 180° වන නිසා

$$A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = 180^\circ \text{ වේ.}$$

$$A\hat{O}B + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$A\hat{O}B + 40^\circ = 180^\circ$$

$$A\hat{O}B = 180^\circ - 40^\circ$$

$$A\hat{O}B = 140^\circ$$

AB සුළු චාපය මගින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය $A\hat{O}B$ වේ. එම චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි චාපය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය $A\hat{C}B$ නිසා. ප්‍රමේයය අනුව

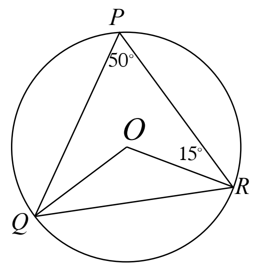
$$2\,A\hat{C}B = A\hat{O}B$$

$$\therefore A\hat{C}B = \frac{140^\circ}{2}$$

$$\therefore \underline{\underline{A\hat{C}B = 70^\circ}}$$

නිදසුන 1

රූප සටහනේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ. දී ඇති තොරතුරු ඇසුරින් $P\hat{Q}R$ සොයන්න.



$Q\hat{O}R = 2Q\hat{P}R$ (වෘත්තයක චාපයකින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය එම චාපයෙන් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කෙරෙන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ.)

$\therefore Q\hat{O}R = 2 \times 50^\circ$

$= 100^\circ$

$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q + Q\hat{O}R = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ තුනේ එකතුව 180°ක් නිසා)

$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q + 100^\circ = 180^\circ$

$O\hat{Q}R + O\hat{R}Q = 80^\circ$ —— ①

$OQ = OR$ (එකම වෘත්තයේ අර සමාන වේ.)

$\therefore O\hat{Q}R = O\hat{R}Q$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා)

① ට අනුව $2\,O\hat{R}Q = 80^\circ$

$O\hat{R}Q = \dfrac{80^\circ}{2}$

$O\hat{R}Q = 40^\circ$

$P\hat{R}Q = P\hat{R}O + O\hat{R}Q$

$P\hat{R}Q = 15^\circ + 40^\circ$

$P\hat{R}Q = 55^\circ$

$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක කෝණ 3 එකතුව 180° නිසා)

$P\hat{Q}R + 50^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

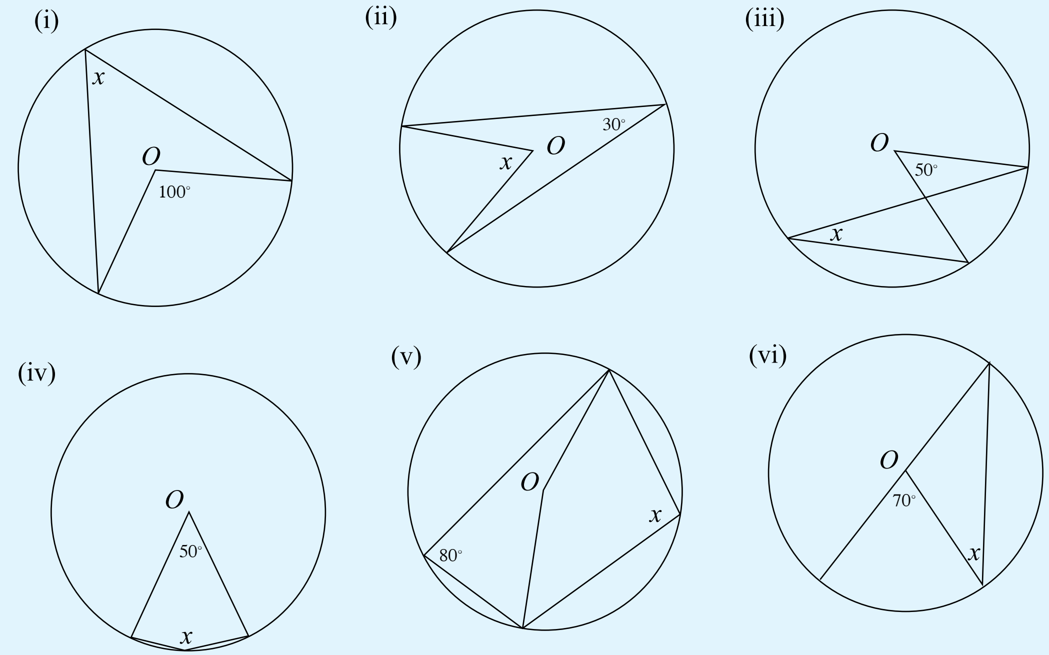
$P\hat{Q}R + 105^\circ = 180^\circ$

$P\hat{Q}R = 180^\circ - 105^\circ$

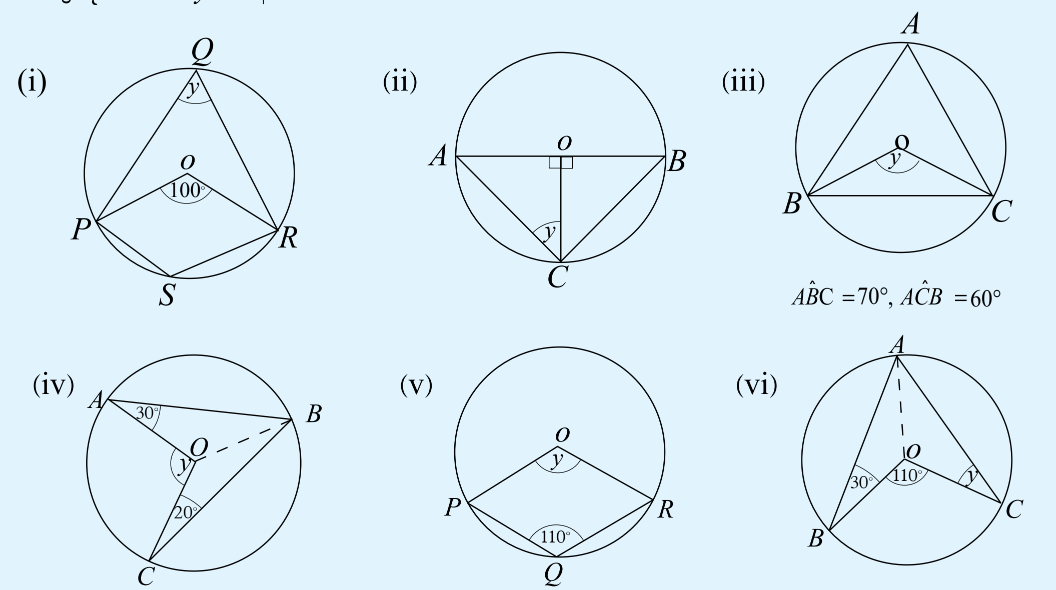
$\underline{\underline{P\hat{Q}R = 75^\circ}}$

31.2 අභ්‍යාසය

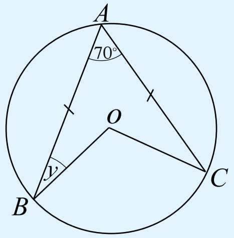
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය O මගින් දැක්වේ. දී ඇති දත්ත අනුව x හි අගය සොයන්න.



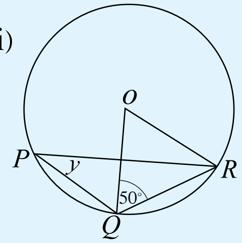
2. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O මගින් දැක්වේ. දී ඇති දත්ත අනුව, හේතු දක්වමින් y හි අගය සොයන්න.



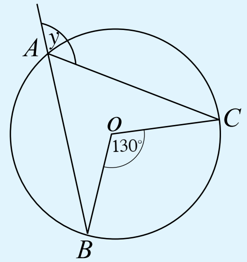
(vii)



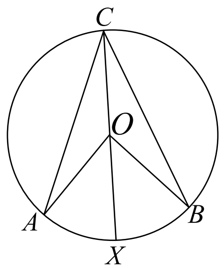
(viii)

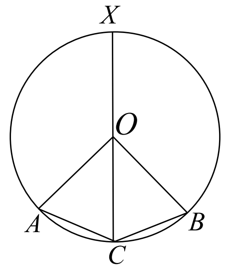


(ix)



31.3 "වෘත්තයක චාපයකින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය එම චාපයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ" යන ප්‍රමේයයේ විධිමත් සාධනය





දත්තය: O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත A,B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත.

සාධනය කළ යුත්ත: $A\hat{O}B = 2\,A\hat{C}B$ බව

නිර්මාණය: CO රේඛාව X දක්වා දික් කිරීම

සාධනය: $OA = OC$ (එකම වෘත්තයේ අර)

$O\hat{A}C = O\hat{C}A$ — (1) (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා)

$O\hat{A}C + O\hat{C}A = X\hat{O}A$ — (2) (ත්‍රිකෝණයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණ දෙකේ එකතුවට සමාන නිසා)

(1) සහ (2) නිසා $X\hat{O}A = 2\,O\hat{C}A$ — (3)

එසේම $X\hat{O}B = 2\,O\hat{C}B$ — (4)

(3) සහ (4) අනුව $\underbrace{X\hat{O}A + X\hat{O}B} = 2\,O\hat{C}A + 2\,O\hat{C}B$

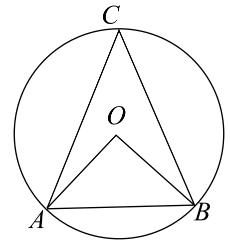
$A\hat{O}B = 2\,\underbrace{(O\hat{C}A + O\hat{C}B)}$

$A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$

ඉහත සාධනය කළ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් වෙනත් සාධනය කිරීමේ ගැටලු (අනුමේයය) සාධනය කරන ආකාරය දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 2

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. $A\hat{C}B + A\hat{B}C = A\hat{O}B$ නම් $AC = AB$ බව පෙන්වන්න.



සාධනය:

$A\hat{C}B + A\hat{B}C = A\hat{O}B$ — (1) (දී ඇත)

$2\,A\hat{C}B = A\hat{O}B$ — (2) (වෘත්තයක චාපයක් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය එම චාපයෙන් වෘත්තයේ ඉතිරි චාප කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ.)

(1) හා (2) නිසා $2A\hat{C}B = A\hat{C}B + A\hat{B}C$

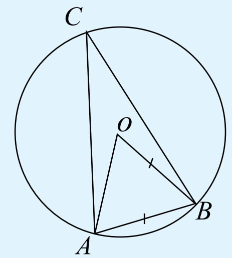
$2A\hat{C}B - A\hat{C}B = A\hat{B}C$

$A\hat{C}B = A\hat{B}C$

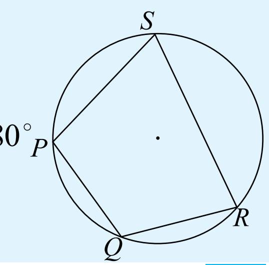
$AC = AB$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන කෝණවලට සම්මුඛ පාද සමාන බැවින්)

31.3 අභ්‍යාසය

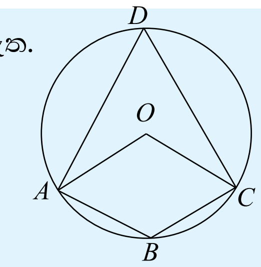
1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. $OB = AB$ නම් $A\hat{C}B = 30^\circ$ බව පෙන්වන්න.



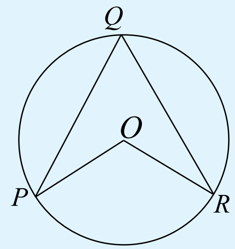
2. P, Q, R සහ S ලක්ෂ්‍ය වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත. $P\hat{Q}R + P\hat{S}R = 180^\circ$ බව සාධනය කරන්න.



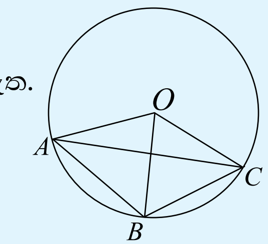
3. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත A, B, C සහ D ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. $A\hat{O}C = A\hat{B}C$ නම් $A\hat{D}C = 60^\circ$ බව පෙන්වන්න.



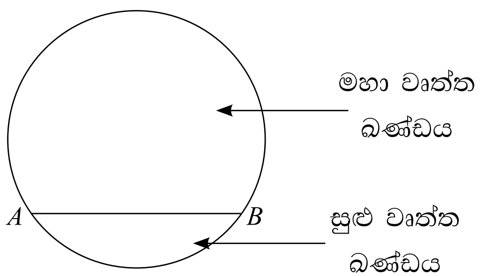
4. P, Q සහ R ලක්ෂ්‍ය O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ පරිධිය මත පිහිටා ඇත. $O\hat{P}Q = O\hat{R}Q$ නම් $P\hat{O}R = 4\,O\hat{R}Q$ බව පෙන්වන්න. (O හා Q යා කරන්න.)



5. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත $A, B,$ සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. $A\hat{O}C = 2\left(B\hat{A}C + B\hat{C}A\right)$ බව පෙන්වන්න.

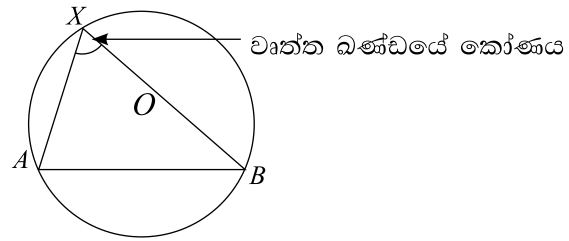


31.4 වෘත්තයක එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ අතර සම්බන්ධය

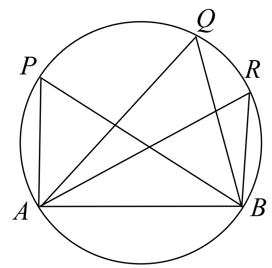


වෘත්තයක් සහ එම වෘත්තයට අඳින ලද AB ජ්‍යාය රූප සටහනේ දැක්වේ. එම ජ්‍යාය මගින් වෘත්තය පෙදෙස් දෙකකට වෙන් වේ. එක් පෙදෙසක් වන්නේ ජ්‍යායෙන් සහ මහා වෘත්ත චාපයෙන් වට වූ **මහා වෘත්ත ඛණ්ඩය යි.**

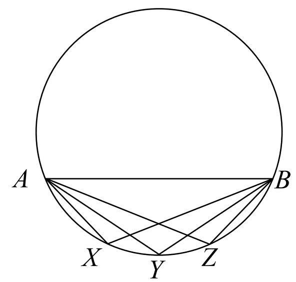
අනෙක් පෙදෙස ජ්‍යායෙන් සහ සුළු වෘත්ත චාපයෙන් වට වූ **සුළු වෘත්ත ඛණ්ඩය යි.**



AB ජ්‍යායේ දෙකෙළවර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ චාප කොටස මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට යා කිරීමෙන් සෑදෙන කෝණය වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය ලෙස හැඳින්වේ. රූපසටහනට අනුව AXB වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය $A\hat{X}B$ වේ.



$A\hat{P}B, A\hat{Q}B$ සහ $A\hat{R}B$ වෘත්තයේ මහා වෘත්ත ඛණ්ඩයට අයත් වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ වේ. ඒ නිසා $A\hat{P}B, A\hat{Q}B$ සහ $A\hat{R}B$ වලට එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ යැයි කියනු ලැබේ.

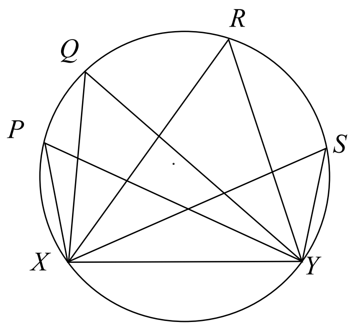


රූපයේ දැක්වෙන $A\hat{X}B, A\hat{Y}B$ සහ $A\hat{Z}B$ කෝණ වෘත්තයේ සුළු වෘත්ත ඛණ්ඩයට අයත් එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ වේ.

පහත දැක්වෙන ක්‍රියාකාරකම මගින් වෘත්තයේ එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ අතර සම්බන්ධය හඳුනා ගනිමු.

ක්‍රියාකාරකම 1

- කඩදාසියක වෘත්තයක් අඳිමු. වෘත්තය මත X සහ Y නම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කර XY ජ්‍යාය අඳින්න.
- XY මහා වෘත්ත ඛණ්ඩයේ චාපය මත P, Q, R සහ S ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කරන්න.
- එම ලක්ෂ්‍ය XY ජ්‍යායේ දෙකෙළවරට යා කරන්න. එවිට මහා වෘත්ත ඛණ්ඩයට අයත්, $X\hat{P}Y, X\hat{Q}Y, X\hat{R}Y$ සහ $X\hat{S}Y$ යන එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ ලැබේ.



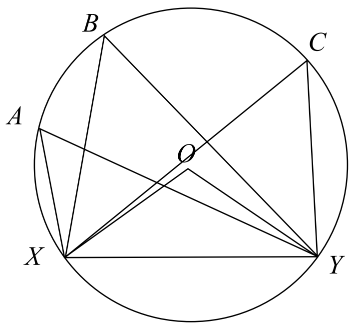
- අඳින ලද එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ කෝණමානයක ආධාරයෙන් මනින්න. එක් එක් කෝණයේ විශාලත්වය පරීක්ෂා කරන්න.

- ඉහත ආකාරයටම වෘත්තයේ සුළු වෘත්ත ඛණ්ඩයට අයත් වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ කිහිපයක් ඇඳ එම කෝණ මැන ලැබෙන අගයන් පරීක්ෂා කරන්න.

මෙම ක්‍රියාකාරකම්වල යෙදීමෙන් එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන බව හඳුනාගන්නට ඇත. එය ප්‍රමේයක් ලෙස පහත දැක්වේ.

ප්‍රමේයය : වෘත්තයක එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේ.

එසේ හඳුනාගත් ප්‍රමේයය ජ්‍යාමිතික සාධනයක් මගින් තහවුරු කර ගනිමු.



දත්තය: O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ XY ජ්‍යායේ එකම පැත්තේ වෘත්තය මත A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත.

සාධනය කළ යුත්ත: $X\hat{A}Y = X\hat{B}Y = X\hat{C}Y$

නිර්මාණය: OX සහ OY යා කිරීම.

සාධනය: වෘත්තයක ජ්‍යායකින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය පරිධිය මත ආපාතනය කරන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වේ.

$X\hat{O}Y = 2\,X\hat{A}Y$ —— ①

$X\hat{O}Y = 2\,X\hat{B}Y$ —— ②

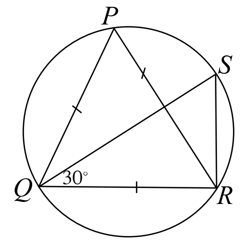
$X\hat{O}Y = 2\,X\hat{C}Y$ —— ③

① ② සහ ③ නිසා $2\,X\hat{A}Y = 2\,X\hat{B}Y = 2\,X\hat{C}Y$

$\therefore \underline{\underline{X\hat{A}Y = X\hat{B}Y = X\hat{C}Y}}$

ඉහත දැක්වූ ප්‍රමේය ගණනය කිරීම් සඳහා යොදාගන්නා ආකාරය විමසා බලමු.

රූපයේ දී ඇති තොරතුරු උපයෝගී කරගෙන $Q\hat{R}S$ සොයන්න.



ඉහත දැක්වෙන රූපයේ $PQ = QR = PR$ සහ $R\hat{Q}S = 30^\circ$ වේ. $Q\hat{R}S$ අගය සොයමු.

$PQ = QR = PR$ නිසා

PQR ත්‍රිකෝණය සමපාද ත්‍රිකෝණයකි.

සමපාද ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණයක අගය 60^0 නිසා.

$Q\hat{P}R = 60^\circ$

$Q\hat{P}R = Q\hat{S}R$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන නිසා)

$\therefore Q\hat{S}R = 60^\circ$

ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180^0 නිසා

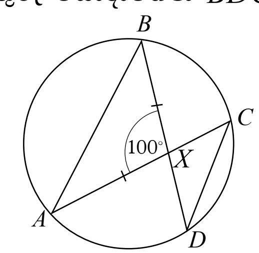
$Q\hat{R}S + R\hat{Q}S + Q\hat{S}R = 180^\circ$

$Q\hat{R}S = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ)$

$Q\hat{R}S = \underline{\underline{90^\circ}}$

නිදසුන 1

රූපයේ දී ඇති තොරතුරු යොදාගෙන $B\hat{D}C$ සොයන්න.



$XB = XA$ නිසා XAB ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයකි.

$\therefore \; X\hat{B}A = X\hat{A}B$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන වේ.)

ABX ත්‍රිකෝණයේ $X\hat{B}A + X\hat{A}B + A\hat{X}B = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක කෝණ 3 එකතුව 180^0 නිසා)

එනිසා $X\hat{B}A + X\hat{A}B + 100^\circ = 180^\circ$

$$X\hat{B}A + X\hat{A}B = 180^\circ - 100^\circ$$

$$X\hat{B}A + X\hat{A}B = 80^\circ$$

$$2\,X\hat{A}B = 80^\circ \quad (X\hat{B}A = X\hat{A}B \text{ නිසා})$$

$$X\hat{A}B = 40^\circ$$

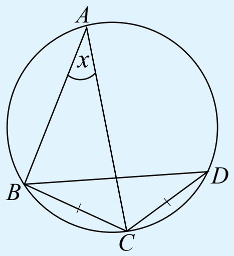
එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන නිසා

$$B\hat{D}C = X\hat{A}B$$

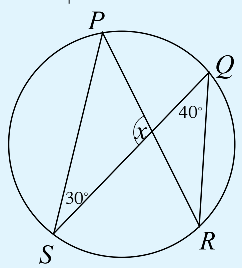
$$\underline{\underline{B\hat{D}C = 40^\circ}}$$

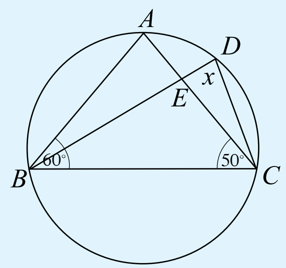
31.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන අභ්‍යාසවල x හි අගය සොයන්න.

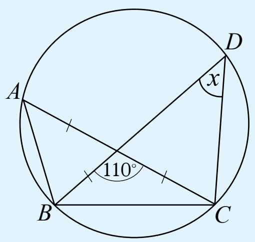
1.


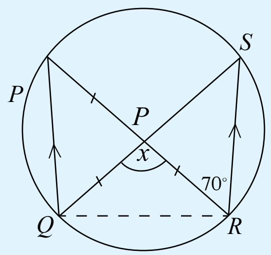
$B\hat{C}D = 110^\circ$

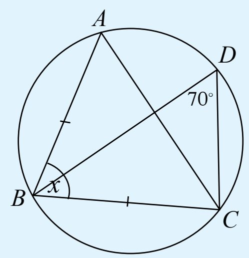
2.


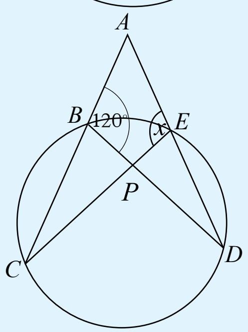
3.


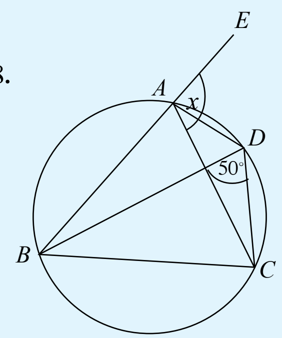
$AB = AC$

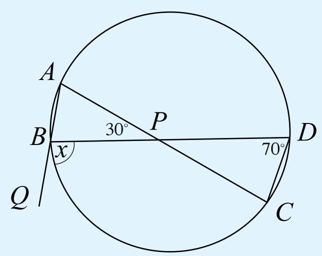
4.


5.


6.


7.


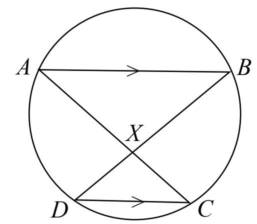
8.


9.


31.5 එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේ. ප්‍රමේය භාවිත කරමින් අනුමේය සාධනය

නිදසුන 1

රූපයේ දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $AC = BD$ බව පෙන්වන්න.



$A\hat{B}D = B\hat{D}C$ ($AB//DC$, ඒකාන්තර කෝණ)

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ)

$\therefore B\hat{D}C = A\hat{C}D$

ත්‍රිකෝණයක සමාන කෝණවලට සම්මුඛ පාද සමාන නිසා

$XD = XC$

$B\hat{A}C = A\hat{C}D$

$A\hat{B}D = A\hat{C}D$ ($AB//CD$, ඒකාන්තර කෝණ)

$B\hat{A}C = A\hat{B}D$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ)

ත්‍රිකෝණයක සමාන කෝණවලට සම්මුඛ පාද සමාන නිසා

$XA = XB$

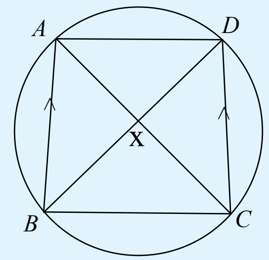
$XC = XD$ (සාධනය කර ඇත)

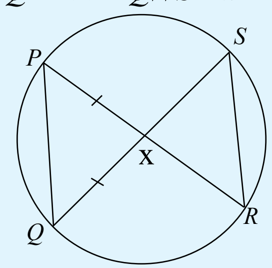
$\therefore \underbrace{XA + XC} = \underbrace{XB + XD}$

$\underline{\underline{AC = BD}}$

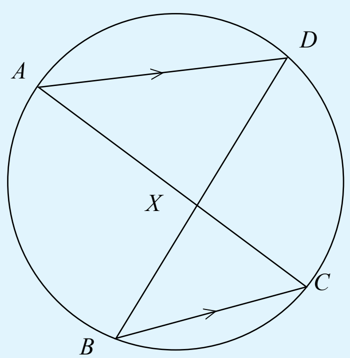
31.5 අභ්‍යාසය

1. $AB//CD$ නම් $A\hat{D}C = B\hat{C}D$ බව පෙන්වන්න. 2. $PX = QX$ නම් $PQ//SR$ බව පෙන්වන්න.

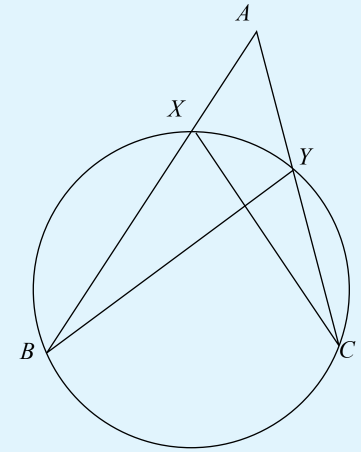




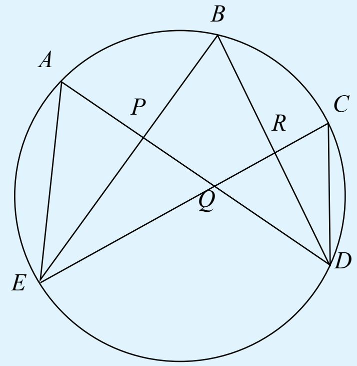
3. $AD // BC$ නම්, $AX = DX$ බව පෙන්වන්න.



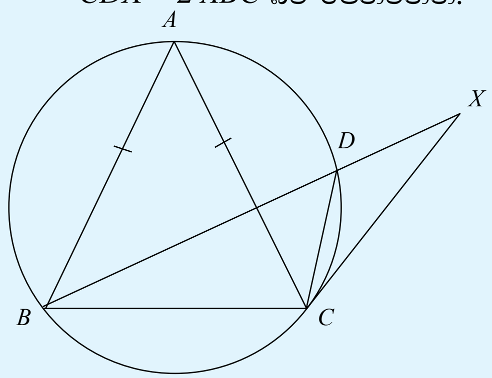
4. $A\hat{X}C = A\hat{Y}B$ බව පෙන්වන්න.



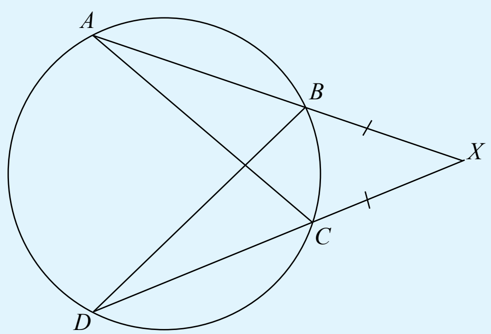
5. $B\hat{P}Q = B\hat{R}Q$ නම් $A\hat{E}C$ කෝණ සමච්ඡේදකය BE බව පෙන්වන්න.



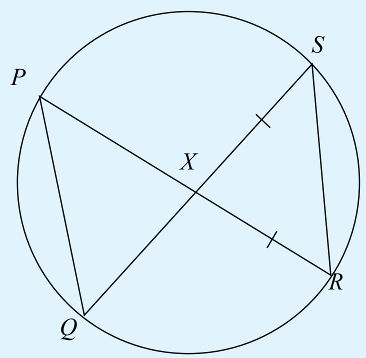
6. $AB = AC$ නම් $C\hat{D}X = 2\ ABC$ බව පෙන්වන්න.



7. $XB = XC$ නම් $AC = BD$ බව පෙන්වන්න.

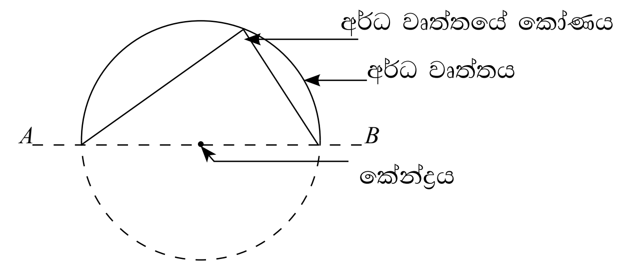


8. $XS = XR$ නම්, $XP = XQ$ බව පෙන්වන්න.



31.6 අර්ධ වෘත්තයේ කෝණ

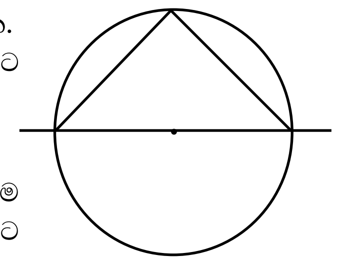
වෘත්තයෙන් හරි අඩක් වූ වෘත්ත චාපය අර්ධ වෘත්තයක් ලෙස හැඳින්වේ.



වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හරහා රේඛාවක් ඇඳීමෙන් වෘත්තය අර්ධ වෘත්ත දෙකකට වෙන්වේ. අර්ධ වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයක් අර්ධ වෘත්තයේ දෙකෙළවරට යා කිරීමෙන් සෑදෙන කෝණයට අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය යැයි කියනු ලැබේ.

අර්ධ වෘත්තයේ කෝණවල ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීම සඳහා පහත දැක්වෙන ක්‍රියාකාරකමෙහි යෙදෙන්න.

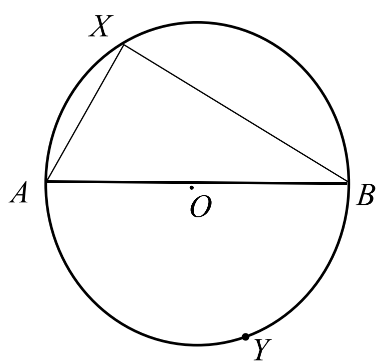
ක්‍රියාකාරකම 1



- කඩදාසියක් මත කවකටුව භාවිතා කරමින් වෘත්තයක් ඇඳින්න. එම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හරහා සරල රේඛාවක් අඳින්න. එවිට වෘත්තය, අර්ධ වෘත්ත දෙකකට වෙන් වේ.
- එක් අර්ධ වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. එම ලක්ෂ්‍යය අර්ධ වෘත්තයේ දෙකෙළවරට යා කරන්න. එවිට වෘත්ත චාපය මත අර්ධ වෘත්තයේ කෝණයක් ලැබේ.
- කෝණමානය භාවිතයෙන් අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය මනින්න.

අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය 90° බව ඔබට පෙනෙනු ඇත. මෙලෙසම තවත් වෘත්ත කිහිපයක් ඇඳ ඒවායේ අර්ධ වෘත්තයේ කෝණ ඇඳ අගය මනින්න. ඉහත සඳහන් ක්‍රියාකාරකමෙහි දී අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය හැම විටම සෘජුකෝණයක් වන බව ඔබට නිරීක්ෂණය කිරීමට හැකිවනු ඇත.

ඉහත දැක්වෙන සම්බන්ධය ජ්‍යාමිතික සාධනයක් මගින් තහවුරු කර ගනිමු.



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ AB විෂ්කම්භයක් වන අතර X හා Y යනු රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ.

සාධනය කළ යුත්ත: $A\hat{X}B$ සෘජුකෝණයක් බව.

සාධනය: $A\hat{O}B$ යනු AYB චාපය මගින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය වේ.

AYB අර්ධ වෘත්තයක් නිසා AOB විෂ්කම්භයක් වේ.

$A\hat{O}B =$ සෘජුකෝණ 2 ______ ①

AYB චාපය මගින් වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණය $A\hat{X}B$ වේ.

වෘත්ත චාපයක් මගින් කේන්ද්‍රය මත ආපාතනය කරන කෝණය, එම චාපයෙන් වෘත්තයේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතනය කරන කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වන නිසා,

$A\hat{O}B = 2\,A\hat{X}B$ ______ ②

① සහ ② නිසා

$2\ A\hat{X}B =$ සෘජුකෝණ 2

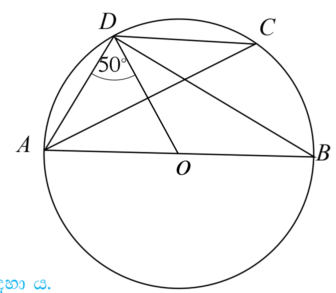
$\therefore A\hat{X}B$ සෘජුකෝණ 1

ඉහත සාධනය මගින් තහවුරු කළ සම්බන්ධය ප්‍රමේයක් ලෙස පහත දැක්වේ.

ප්‍රමේයය: අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය සෘජුකෝණයක් වේ.

පහත දැක්වෙන නිදසුන් මගින් ඉහත ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් ගණනය කිරීම් කරන ආකාරය හඳුනා ගනිමු.

රූප සටහනේ O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තයේ දක්වා ඇති දත්ත ඇසුරෙන් $A\hat{C}D$ අගය සොයමු.



$A\hat{D}B = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය)

$A\hat{D}B = A\hat{D}O + O\hat{D}B$

$\therefore A\hat{D}O + O\hat{D}B = 90^\circ$

$50^\circ + O\hat{D}B = 90^\circ$

$O\hat{D}B = 90^\circ - 50^\circ$

$O\hat{D}B = 40^\circ$

එකම වෘත්තයේ අර බැවින්

$DO = OB$

ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා

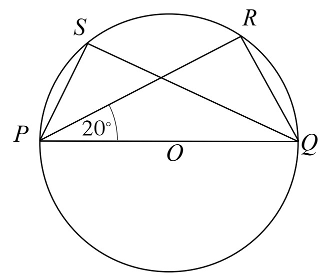
$D\hat{B}O = O\hat{D}B$

$\therefore D\hat{B}O = 40^\circ$

$D\hat{B}O = A\hat{C}D$ (වෘත්තයක එකම ඛණ්ඩයක කෝණ)

$\therefore \underline{\underline{A\hat{C}D = 40^\circ}}$

නිදසුන 1



දී ඇති වෘත්තයේ PQ යනු විෂ්කම්භයකි. $Q\hat{P}R = 20^\circ$ නම් හා $PS = QR$ නම් $R\hat{P}S$ අගය සොයන්න.

$P\hat{R}Q = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය)

$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක කෝණ තුනේ එකතුව 180° නිසා)

$P\hat{Q}R + 20^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$P\hat{Q}R = 180^\circ - 110^\circ$

$P\hat{Q}R = 70^\circ$

$P\hat{S}Q = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය)

$P\hat{R}Q = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය)

$\therefore PSQ$ සහ PRQ ත්‍රිකෝණ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ වේ.

$\therefore PSQ\Delta$ සහ $PRQ\ \Delta$

$SP = RQ$ (දී ඇත)

PQ (පොදු පාදය)

$\therefore PSQ\Delta \equiv PRQ\Delta$ (කර්ණ පා. අවස්ථාව)

$\therefore S\hat{P}Q = P\hat{Q}R$ (අංගසම ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප කෝණ)

$\therefore S\hat{P}Q = 70^\circ$

$R\hat{P}S + Q\hat{P}R = 70^\circ$

$R\hat{P}S + 20^\circ = 70^\circ$

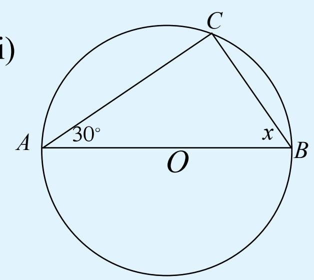
$R\hat{P}S = 70^\circ - 20^\circ$

$\underline{\underline{R\hat{P}S = 50^\circ}}$

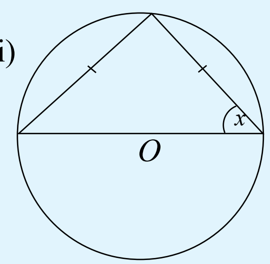
31.6 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වලින් දැක්වේ. දී ඇති දත්ත අනුව x හි අගය සොයන්න.

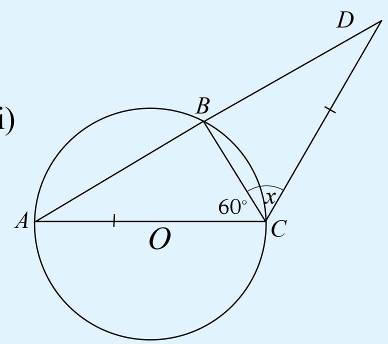
(i)



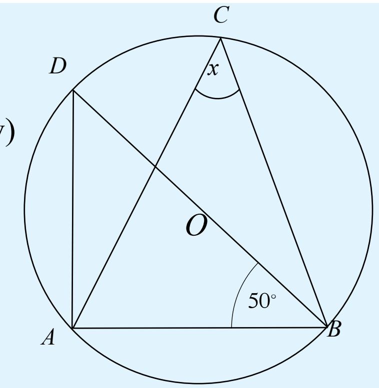
(ii)



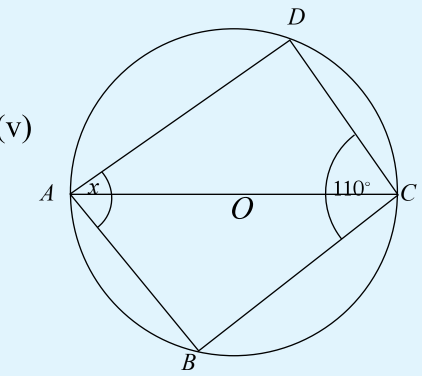
(iii)



(iv)



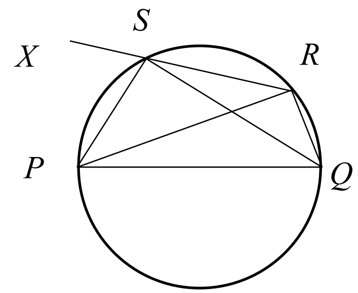
(v)



31.7 "අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය සෘජුකෝණයක් වේ" යන ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් අනුමේයන් සාධනය කිරීම

නිදසුන 1

PQ, $PQRS$ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. RS, X දක්වා දික් කර ඇත. $R\hat{P}Q + P\hat{S}X = 90^\circ$ බව සාධනය කරන්න.



සාධනය:-

$Q\hat{S}R + P\hat{S}Q + P\hat{S}X = 180^\circ$ (සරල රේඛාවක් මත පිහිටි කෝණවල එකතුව 180° නිසා)

$P\hat{S}Q = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණ සෘජුකෝණ වේ.)

$\therefore Q\hat{S}R + 90^\circ + P\hat{S}X = 180^\circ$

$Q\hat{S}R + P\hat{S}X = 180^\circ - 90^\circ$

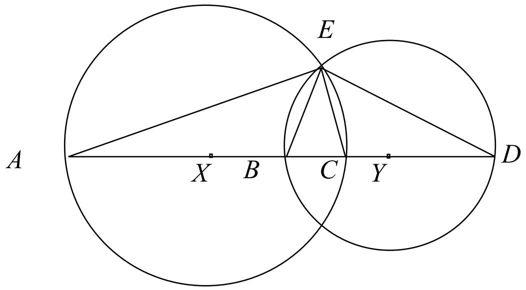
$Q\hat{S}R + P\hat{S}X = 90^\circ$

$Q\hat{S}R$ සහ $R\hat{P}Q$, $PSRQ$ වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ වේ.

$\therefore Q\hat{S}R = R\hat{P}Q$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේ.)

$\therefore \underline{\underline{R\hat{P}Q + P\hat{S}X = 90^\circ}}$

නිදසුන 2



දී ඇති රූපයේ වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර X සහ Y වේ. $A\hat{E}B = C\hat{E}D$ බව පෙන්වන්න.

සාධනය : AC, X හරහා යන බැවින් AC, X කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි.

$\therefore AEC$ චාපය අර්ධ වෘත්තයකි.

$\therefore A\hat{E}C = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය සෘජු කෝණයක් නිසා)

$\therefore A\hat{E}B + B\hat{E}C = 90^\circ$ ——— ①

BD, Y කේන්ද්‍රය හරහා යන බැවින් BD, Y කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි.

$\therefore BED$ චාපය අර්ධ වෘත්තයකි.

$\therefore B\hat{E}D = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය සෘජු කෝණයක් නිසා)

$C\hat{E}D + B\hat{E}C = 90^\circ$ ——— ②

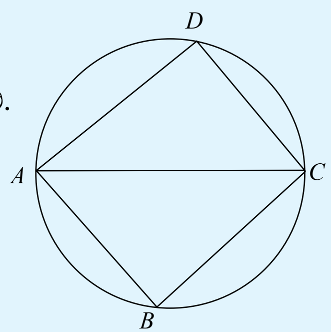
$A\hat{E}B + B\hat{E}C = C\hat{E}D + B\hat{E}C$

සමීකරණයෙ දෙපසින් $B\hat{E}C$ අඩු කිරීමෙන්

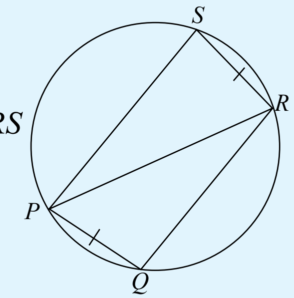
$\underline{\underline{A\hat{E}B = C\hat{E}D}}$

31.7 අභ්‍යාසය

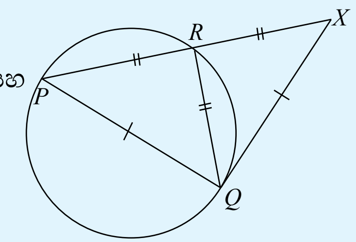
1. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ වෘත්තයේ විෂ්කම්භය AC වේ. $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^\circ$ බව පෙන්වන්න.



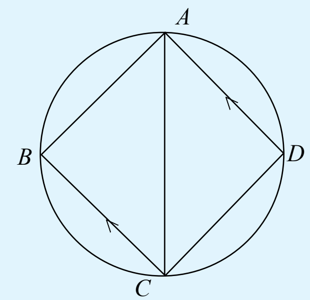
2. රූපයේ දැක්වෙන $PQRS$ වෘත්තයේ විෂ්කම්භය PR වේ. $PQ = RS$ නම් $PQRS$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



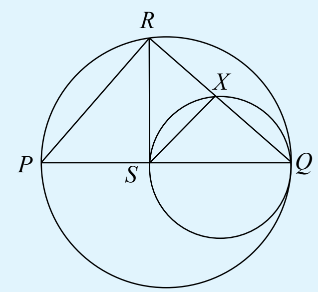
3. PQ යනු PQR වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. $PQ = QX$ සහ $PR = QR = RX$. $P\hat{Q}X = 90^\circ$ බව පෙන්වන්න.



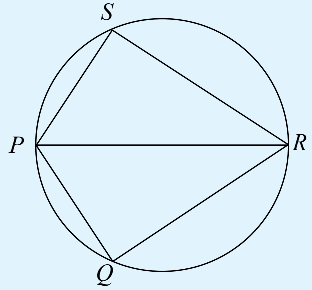
4. AC යනු $ABCD$ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. $BC//AD$ වේ. $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



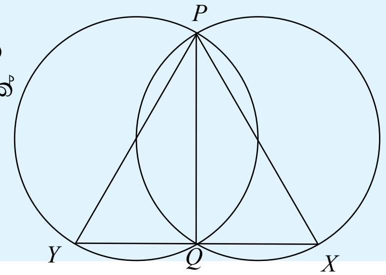
5. විශාල වෘත්තයේ විෂ්කම්භය PSQ ද, කුඩා වෘත්තයේ විෂ්කම්භය SQ වේ. RQ, X ලක්ෂ්‍යයේ දී කුඩා වෘත්තය කැපේ. $P\hat{R}S = R\hat{S}X$ බව පෙන්වන්න.



6. PR යනු දී ඇති වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි.
$S\hat{R}P = Q\hat{R}P$ නම් $S\hat{P}R = Q\hat{P}R$ බව පෙන්වන්න.



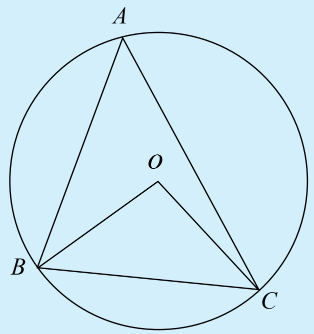
7. වෘත්ත දෙක P හා Q ලක්ෂ්‍යවල දී ඡේදනය වේ. වෘත්ත දෙකේ විෂ්කම්භ PX සහ PY වේ. XQY සරල රේඛාවක් බව පෙන්වන්න.



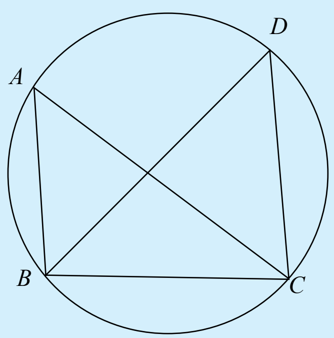
මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

දීඇතිදත්තරූපසටහන්වලලකුණුකරදීඇතිගැටලුවිසඳන්න.

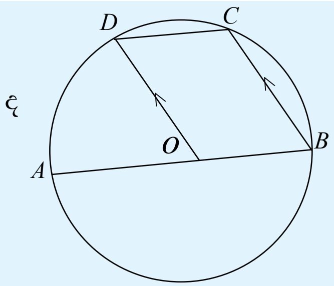
1. ABC වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ. $A\hat{B}O = O\hat{B}C$ සහ $A\hat{B}O = 40^\circ$ වේ. $A\hat{C}O$ අගය සොයන්න.



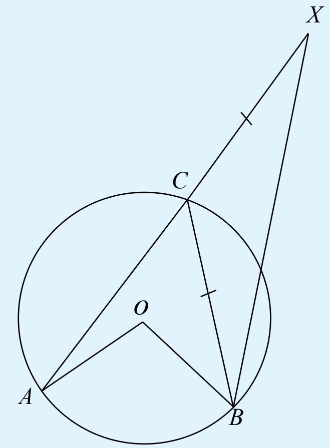
2. $ABCD$ වෘත්තයේ විෂ්කම්භය BD වේ. $BC = CD$ සහ $A\hat{C}B = 35^\circ$ නම් $A\hat{B}C$ අගය සොයන්න.



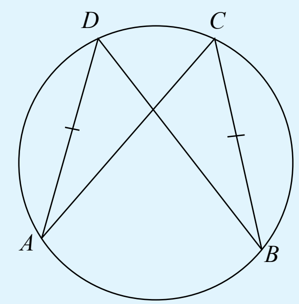
3. දී ඇති $ABCD$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ. $BC//OD$ ද $A\hat{B}C = 60^\circ$ ද වේ. $B\hat{C}D$ කෝණයේ අගය සොයන්න.



4. ABC වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ. $BC = CX$ වන සේ AC, X දක්වා දිගු කර ඇත. $A\hat{O}B = 4C\hat{B}X$ බව පෙන්වන්න.



5. $ABCD$ ලක්ෂ්‍ය වෘත්තය මත පිහිටා ඇත. $AD = BC$ වේ. $DB = CA$ බව පෙන්වන්න.



6. PQ යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. $QR//OS$ වේ. $SR = SP$ බව පෙන්වන්න.