# අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2014
# සංයුක්ත ගණිතය - I පත්‍රය
# පිළිතුරු සඳහා මග පෙන්වීම

---

## A කොටස

1. සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $1+2+3+\cdots+n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$ බව

$n = 1$ විට ව.අ.පැ. $= 1$, ද.අ.පැ. $= \frac{9}{8}$

$\therefore$ $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **(5)**

$n = p$ විට (මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$) ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට, $1 + 2 + 3 + ... + p < \frac{1}{8}(2p+1)^2$ වේ. (මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$) **(5)**

දෙපසටම $p + 1$ එකතු කළ විට,

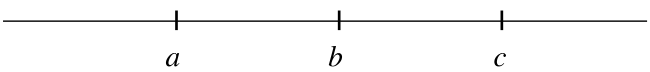
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + p + p + 1 &< \frac{1}{8}(2p+1)^2 + (p+1) \\ &= \frac{1}{8}[4p^2 + 12p + 9] \\ &= \frac{1}{8}[2p+3]^2 \\ &= \frac{1}{8}[2(p+1)+1]^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ $1 + 2 + 3 + ... + p + p + 1 < \frac{1}{8}\,[2(p+1)+1]^2$

$\therefore$ $n = p + 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **(10)**

$\therefore$ **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන්,** සියලු ධන නිඛිල $n$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **(5) [25]**

2. $E = \dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)}$ යැයි ගනිමු.




$$\left.\begin{array}{l} x < a \text{ විට } E < 0 \\ a < x < b \text{ විට } E > 0 \\ b < x < c \text{ විට } E < 0 \\ c < x \text{ විට } E > 0 \end{array}\right\}$$

ප්‍රාන්තර තුනක් සඳහා පමණක් අසමානතාව නිවැරදි නම් ලකුණු 10කි.
ප්‍රාන්තර දෙකක් සඳහා පමණක් අසමානතාව නිවැරදි නම් ලකුණු 05කි.
**(15)**

$x = a$ හෝ $x = b$ විට $E = 0$ වේ.

$x = c$ සඳහා $E$ අර්ථ නොදැක්වේ. **(5)**

$\therefore$ විසඳුම් කුලකය $\{x : x \le a$ හෝ $b \le x < c\}$ වේ. **(5) [25]**

[ 2 වන පිටුව බලන්න

3. FRACTION

මෙහි ප්‍රභින්න අක්ෂර 8 ක් ඇත.

එම අක්ෂර සියල්ලම ගෙන සෑදිය හැකි සංකරණ ගණන $= 8!$

$= 40320$ **(5)**

මෙහි ප්‍රාණාක්ෂර (Vowels) 3 ක් ඇති අතර ඒවා ඉරට්ට ස්ථාන හතරෙහි ස්ථානගත කළ හැකි ආකාර ගණන $= {}^4P_3$ **(5)**

ඉතිරි අක්ෂර පහ ස්ථානගත කළ හැකි ආකාර ගණන $= 5!$ **(5)**

$\therefore$ මුළු පිළියෙල කිරීම් ගණන $= {}^4P_3 \times 5!$ **(5)**

$= 2880$ **(5)**

<u>විකල්ප ක්‍රමය</u>

FRACTION

මෙහි ප්‍රභින්න අක්ෂර 8 ක් ඇත.

එම අක්ෂර සියල්ලම ගෙන සෑදිය හැකි පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව $= 8!$

$= 40320$ **(5)**

ඉරට්ට ස්ථාන හතරක් ඇත. $\overline{\phantom{2}}\;\overline{2}\;\overline{\phantom{2}}\;\overline{4}\;\overline{\phantom{2}}\;\overline{6}\;\overline{\phantom{2}}\;\overline{8}$

ප්‍රාණාක්ෂර තුනක් ඇත. A, I, O

$\therefore$ ඉරට්ට ස්ථාන සම්පූර්ණ කළ හැකි ආකාර සංඛ්‍යාව $= 4 \times 3 \times 2$ **(5)**

ඉතිරි ස්ථාන සම්පූර්ණ කළ හැකි ආකාර සංඛ්‍යාව $= 5 \times 4 \times 3 \times 2$ **(5)**

$\therefore$ මුළු පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව $= 4 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ **(5)**

$= 2880$ **(5) [25]**

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left\{ \dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right\} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left\{ \dfrac{(1-a)\,x^2 - (a+b)\,x + (1-b)}{x+1} \right\} = 0$ **(5)**

$\lim\limits_{x \to \infty} \left\{ \dfrac{(1-a)\,x - (a+b) + (1-b)/x}{1 + 1/x} \right\} = 0$ **(5)**

මෙම අවශ්‍යතාව සපුරාලීම සඳහා $1 - a = 0$ සහ $a + b = 0$ **(10)**

එනම් $a = 1$ සහ $b = -1$ **(5)** **[25]**

5. $y = a^x$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $\ln y = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow \dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln a\,\mathrm{d}x$ **(5)**

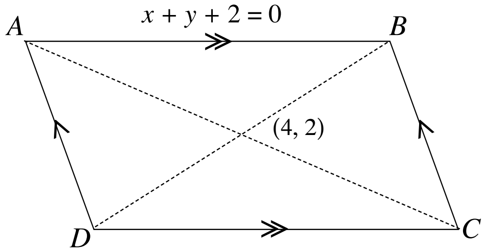
$\therefore \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a$ **(5)**

$\displaystyle\int \frac{a^x}{1+a^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\int \frac{a^x \ln a}{1+a^x}\,\mathrm{d}x$ ; $a \neq 1$ නිසා $\ln a \neq 0$ **(5)**

$= \dfrac{1}{\ln a} \ln(1 + a^x) + C.$ මෙහි $C$ අභිමත නියතයකි. **(10)**

(අභිමත නියතය සඳහන් කර නොමැති නම් ලකුණු 5 ක් අඩු කෙරේ.) **[25]**

6.




$x + 2 = 0$ සරල රේඛාව $A$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බැවින්, $x_A = -2$ **(5)**

$AB$ පාදයෙහි සමීකරණය $x + y + 2 = 0$ බැවින්, $y_A = 0$ **(5)**

$\therefore\ A \equiv (-2, 0)$

$AC$ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $(4, 2)$ බැවින්, $x_c = 10$ සහ $y_c = 4$

$\therefore\ C \equiv (10, 4)$ **(5) + (5)**

$\therefore\ DC$ පාදයෙහි සමීකරණය $y - 4 = -1\,(x - 10)$ **(5)**

$$x + y - 14 = 0$$ **[25]**

7. $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$(0, 1)$ ලක්ෂ්‍යයෙහිදී $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 0$ සහ $\dfrac{2t}{1+t^2} = 1$ **(5)**

$t^2 - 1 = 0$ සහ $(t-1)^2 = 0$

$t = \pm 1$ සහ $t = 1$

$\therefore$ $(0\ , 1)$ ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප $t$ පරාමිතියෙහි අගය $= 1$ **(5)**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$ **(5)**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{(1+t^2).\,2 - 2t.\,2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2\,(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{(t^2-1)}{2t}$$ **(5)**

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{t=1} = 0$$ **(5)**

$\therefore$ $(0\ , 1)$ ලක්ෂ්‍යයෙහිදී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය $x-$ අක්ෂයට සමාන්තර වේ.

**විකල්ප ක්‍රමයක් :**

$x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ ලෙස ගත්විට, $x = \cos\theta$ සහ $y = \sin\theta$ වේ. **(5)**

$(0, 1)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $\cos\theta = 0$ හා $\sin\theta = 1$ නිසා, $\theta = \pi/2$

එවිට $t = \tan \pi/4 = 1$ **(5)**

$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ **(5)**

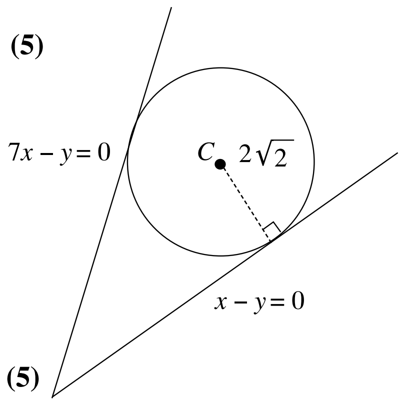
$x$ විෂයයෙන් අවකලනයෙන්, $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$ **(5)**

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,\,1)} = 0$$ **(5)**

$\therefore$ $(0\ ,1)$ ලක්ෂ්‍යයෙහිදී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය $x-$ අක්ෂයට සමාන්තර වේ. **[25]**

8. වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $C \equiv (x_C, y_C)$ යැයි ගනිමු. $C$ ලක්ෂ්‍යය, දී ඇති සරල රේඛා දෙකෙහි කෝණ සමච්ඡේදකය මත පිහිටන නිසා,




$$\left|\frac{7x_C - y_C}{\sqrt{7^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{x_C - y_C}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right|$$ **(5)**

$7x_C - y_C = 5(x_C - y_C)$ හෝ $7x_C - y_C = -5(x_C - y_C)$

$x_C + 2y_C = 0$ හෝ $2x_C - y_C = 0$

$C(x_C\ , y_C)$ ලක්ෂ්‍යය පළමුවන වෘත්ත පාදය තුළ පිහිටන විට,

$x_C + 2y_C \neq 0$ වන නිසා, $2x_C - y_C = 0$ විය යුතු වේ. **(5)**

$C$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x - y = 0$ සරල රේඛාවට ලම්බ දුර $=$ වෘත්තයේ අරය නිසා

$$\left|\frac{x_C - y_C}{\sqrt{2}}\right| = 2\sqrt{2}$$ **(5)**

$$x_C = \pm\ 4$$

$C$ ලක්ෂ්‍යය පළමුවන වෘත්ත පාදය තුළ නිසා $x_C \neq -4$ වේ.

$\therefore\ x_C = 4$

$\therefore\ y_C = 8$ **(5)**

$\therefore$ වෘත්තයේ සමීකරණය, $(x-4)^2 + (y-8)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$x^2 + y^2 - 8x - 16y + 72 = 0$ **(5)** **[25]**

9. Arg $iz = \pi$ නිසා Arg $z = \pi/2$ වේ. **(5)**

$|z| = r$ නම්, එවිට $z = ir$ වේ. **(5)**

එවිට,

$|1 + ir| = \sqrt{1+r^2}$ සහ $|z-1| = |-1 + ir| = \sqrt{1+r^2}$ **(5)**

$|z+1| + |z-1| = 4$ බැවින් $2\sqrt{1+r^2} = 4$

$1 + r^2 = 4$

$r^2 = 3$

$r = \sqrt{3}$ **(5)**

$\therefore z = i\sqrt{3}$ **(5)** **[25]**

10. $\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ වන විට,

$$\frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ **(5)**

$\sqrt{3}\tan\theta + \tan\theta\tan\alpha + \sqrt{3}\tan\alpha = 1$

$\tan\theta(\sqrt{3} + \tan\alpha) + \sqrt{3}(\tan\alpha + \sqrt{3}) = 1 + 3$ **(5)**

$(\sqrt{3} + \tan\alpha)(\sqrt{3} + \tan\theta) = 4$

ඉහත ප්‍රතිඵලයෙහි $\theta = \alpha$ යෙදීමෙන් **(5)**

$\theta = \alpha = \pi/12$ සහ $(\sqrt{3} + \tan\pi/12)^2 = 4$ **(5)**

$\tan\pi/12 > 0$ බැවින් $\sqrt{3} + \tan\pi/12 = 2$

$\tan\pi/12 = 2 - \sqrt{3}$ **(5)** **[25]**

**B කොටස**

11. (i) $px^2 + qx + r \equiv p(x-\alpha)(x-\beta)$ **(5)**

$\equiv px^2 - p(\alpha+\beta)x + p\alpha\beta$ **(5)**

සංගුණක සැසඳීමෙන්,

$-p(\alpha+\beta) = q$ සහ $p\alpha\beta = r$ **(5) + (5)**

$\Rightarrow (\alpha+\beta) = -q/p$ සහ $\alpha\beta = r/p$ **[20]**

$\left.\begin{array}{l} \lambda + 3\mu = -a \text{ ——— } ① \\ 3\lambda\mu = b \text{ ——— } ② \end{array}\right\}$ **(5)**

$\left.\begin{array}{l} 3\lambda + \mu = -c \text{ ——— } ③ \\ 3\lambda\mu = d \text{ ——— } ④ \end{array}\right\}$ **(5)**

③ හා ④ න් $b = d$ **(5)**

① + ③ $\Rightarrow 4(\lambda + \mu) = -(a + c)$

$\lambda + \mu = -\frac{1}{4}(a + c)$ **(5)**

② $\Rightarrow \lambda\mu = \frac{1}{3}b$ **(5)**

මූල $\lambda$ හා $\mu$ වන වර්ගජ සමීකරණය,

$x^2 - (\lambda+\mu)x + \lambda\mu = 0$ **(5)**

$x^2 - \left[-\frac{1}{4}(a + c)\right]x + \frac{b}{3} = 0$ **(5)**

$12x^2 + 3(a + c)x + 4b = 0$ **[35]**

(ii) $f(x) = x^3 - 2ax^2 + (ab + a^2 - b^2)x - ab(a - b)$, මෙහි $a \neq b$

$f(a - b) = (a - b)^3 - 2a(a - b)^2 + (ab + a^2 - b^2)(a - b) - ab(a - b)$ **(5)**

$= (a - b)[(a - b)^2 - 2a(a - b) + ab + a^2 - b^2 - ab]$

$= (a - b)[a^2 - 2ab + b^2 - 2a^2 + 2ab + a^2 - b^2]$

$= 0$ **(10)**

$\therefore (x - a + b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයකි.

$\therefore f(x) = (x - a + b)[x^2 - ax - bx + ab]$ **(10)**

$= (x - a + b)(x - a)(x - b)$ **(5)**

$\therefore f(x) = 0$ හි විසඳුම් $x = a - b,\ x = a,\ x = b$ වේ. **(15) [45]**

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ හි මූල 1, 3 හා 4 බැවින්,

ඉහත ප්‍රතිඵලයෙහි $a = 4$ හා $b = 1$ යෙදීමෙන්, (එවිට $a - b = 3$ බැවින්) **(10)**

$p = -2a = -8$ **(5)**

$q = ab + a^2 - b^2 = 4 + 16 - 1 = 19$ **(5)**

$r = -ab(a - b) = -4(3) = -12$ **(5)**

[සටහන : $a = 4$ හා $b = 3$ යෙදීමෙන් ද මෙම ප්‍රතිඵලය ලබා ගත හැකිය.] **[25]**

[7 වන පිටුව බලන්න

(iii) $\dfrac{7x-10}{x^2(x-2)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{(x-2)}$ ලෙස ගනිමු. මෙහි $A, B, C \in \mathbb{R}$ **(5)**

$7x - 10 \equiv Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$

$x$ විචල්‍යය සඳහා අභිමත අගය ආදේශයෙන් හෝ සංගුණක සැසඳීමෙන්,

$A = -1$ **(5)**

$B = 5$ **(5)**

$C = 1$ **(5)**

$\therefore \dfrac{7x-10}{x^2(x-2)} \equiv \dfrac{-1}{x} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{(x-2)}$ **(5) [25]**

12. (i) $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r\, a^{n-r} b^r$

හෝ $(a+b)^n = {}^{n}C_0\, a^n + {}^{n}C_1\, a^{n-1} b + \dots + {}^{n}C_r\, a^{n-r} b^r + \dots + {}^{n}C_n\, b^n$

මෙහි $n \in \mathbb{Z}^+$, ${}^{n}C_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ ; $0 \le r \le n$ **(15)**

$a = b = 1$ යෙදීමෙන් $2^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r$ **(10)**

$(a+b)^{2n} = (a+b)^n \,.\, (a+b)^n$

$= \left[{}^{n}C_0\, a^n + {}^{n}C_1\, a^{n-1} b + \dots + {}^{n}C_r\, a^{n-r} b^r + \dots + {}^{n}C_n\, b^n\right]\left[{}^{n}C_0\, b^n + {}^{n}C_1\, b^{n-1} a + \dots + {}^{n}C_r\, b^{n-r} a^r + \dots + {}^{n}C_n\, a^n\right]$ **(10)**

$a^n b^n$ හි සංගුණක සැසඳීමෙන්

${}^{2n}C_n = {}^{n}C_0^2 + {}^{n}C_1^2 + \dots + {}^{n}C_r^2 + \dots + {}^{n}C_n^2$ **(10)**

$= \sum_{r=0}^{n} {}^{2n}C_n$ **(10)**

$\sum_{r=1}^{n} r.\, {}^{n}C_r\, a^r b^{n-r} = \sum_{r=1}^{n} r.\, \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}\, a^r b^{n-r}$ **(5)**

$= \sum_{r=1}^{n} na.\, \dfrac{(n-1)!}{(n-r)!\, r!}\, a^{r-1} b^{n-r}$ **(5)**

$= na \sum_{r-1=0}^{n} {}^{n-1}C_{r-1}\, a^{r-1}\, b^{(n-1)-(r-1)}$ **(5)**

$= na.\,(a+b)^{(n-1)}$ **(5)**

$= na,$ $a + b = 1$ වන විට **[75]**

[8 වන පිටුව බලන්න

(ii) $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n}{12}(n+1)(n+2)(n+3)$

$U_n = S_n - S_{n-1}$ **(5)**

$= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)[(n+3)-(n-1)]$ **(5)**

$= \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$

$\therefore U_r = \frac{r}{3}(r+1)(r+2) \quad ; \ 1 \le r \le n$ **(5)**

$\frac{1}{U_r} = \frac{3}{r(r+1)(r+2)}$

$= \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{(r+1)(r+2)}\right\}$ **(10)**

$= k\left\{f(r) - f(r+1)\right\}$

මෙහි $k = \frac{3}{2}$ සහ $f(r) = \frac{1}{r(r+1)}$ **(10)**

$\frac{1}{U_1} = \frac{3}{2}\left\{f(1) - f(2)\right\}$ **(5)**

$\frac{1}{U_2} = \frac{3}{2}\left\{f(2) - f(3)\right\}$

--------------------------------------------------

--------------------------------------------------

--------------------------------------------------

$\frac{1}{U_{n-1}} = \frac{3}{2}\left\{f(n-1) - f(n)\right\}$

**(5)**

$\frac{1}{U_n} = \frac{3}{2}\left\{f(n) - f(n+1)\right\}$

---

$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{U_r} = \frac{3}{2}\left\{f(1) - f(n+1)\right\}$ **(5)**

$= \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$ **(5)**

$= \frac{3}{4} - \frac{3}{2(n+1)(n+2)}$

$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{U_r} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{U_r}$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{4} - \frac{3}{2(n+1)(n+2)}\right\}$ **(5)**

$= \frac{3}{4}$ (පරිමිත අගයක්) **(5)**

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{U_r}$ අභිසාරී වේ.

[9 වන පිටුව බලන්න

සියලු $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{1}{U_r} > 0$ බැවින්,

$$\frac{1}{U_1} \le \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{U_r} < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_r}$$ **(5)**

$$\frac{3}{1\,.\,2\,.\,3} \le \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{U_r} < \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{3}{4}\left\{1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right\} < \frac{3}{4}$$ **(5)**

$$2 \le 3\left\{1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right\} < 3$$ **[75]**

13. (i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$ **(5)**

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$ **(5)**

$\therefore\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ වේ. **(5)** **[15]**

$$\mathbf{A}^{2015}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^2)^{1007}\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ **(5)**

$$\mathbf{I\,AX} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ **(5)**

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ **(5) + (5)**

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -13 & -8 \end{pmatrix}$$ **(5)** **[25]**

(ii) $z^6 = 1$

$\Rightarrow z^6 - 1 = 0$

$\Rightarrow (z^3 - 1)(z^3 + 1) = 0$ **(5)**

$\Rightarrow (z - 1)(z + 1)(z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$ **(10)**

$\Rightarrow z - 1 = 0$ හෝ $z + 1 = 0$ හෝ $z^2 + z + 1 = 0$ හෝ $z^2 - z + 1 = 0$

$\Rightarrow z = \pm 1,\ z = -\dfrac{1}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ z = \dfrac{1}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(15)**

මේ ආකාරයට $z^6 = 1$ හි මූල හය ලැබේ.

මෙම එක් එක් මූලයෙහි මාපාංකය 1 වන අතර විස්තාරය $\pi/_3$ හි ගුණාකාරයක් වේ. **(15)**

මෙම මූල හය ආගන්ඩ් සටහනක රූපයේ දැක්වෙන පරිදි නිරූපණය කළ හැකිය.

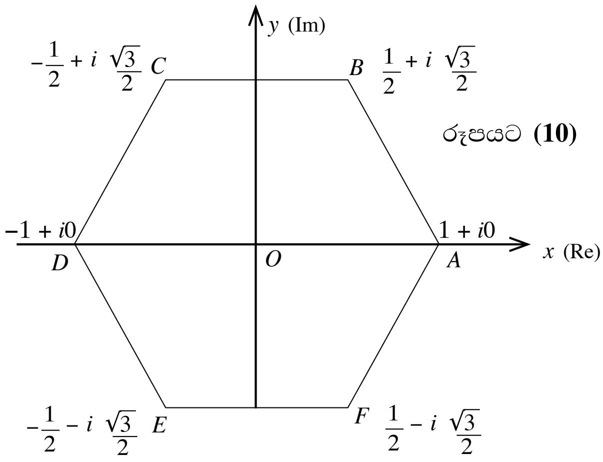
$OA = OB = OC = OD = OE = OF = 1$ වේ.

මෙම $A, B, C, D, E, F$ ලක්ෂ්‍ය හයම කේන්ද්‍රය $O$ ද, අරය ඒකක 1 ද වන වෘත්තය මත පිහිටයි. **(10)**

එවිට $|z_1 - z_2|$ යනු එම ලක්ෂ්‍ය හය අතුරින් කිසියම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යා කෙරෙන රේඛා ඛණ්ඩයේ දිග වේ.

$\therefore\ |z_1 - z_2| =$ ඒකක 1 හෝ ඒකක 2 හෝ ඒකක $\sqrt{3}$ වේ. **(10)**

$(AB = 1, AD = 2, AC = \sqrt{3}$ බැවින්) **[75]**




රූපයට **(10)**

(iii) $|z| = \sqrt{3} \Rightarrow OP = \sqrt{3}$ (නියත) **(5)**

$\therefore\ P$ ලක්ෂ්‍යය, කේන්ද්‍රය $(0, 0)$ ද අරය $\sqrt{3}$ ද වන වෘත්තය මත පිහිටයි. **(5)**

$|z + 2| = |z - (-2)| = PQ$

$P$ විචලනය වන විට,

$QA' \leq QP \leq QA$ **(5)**

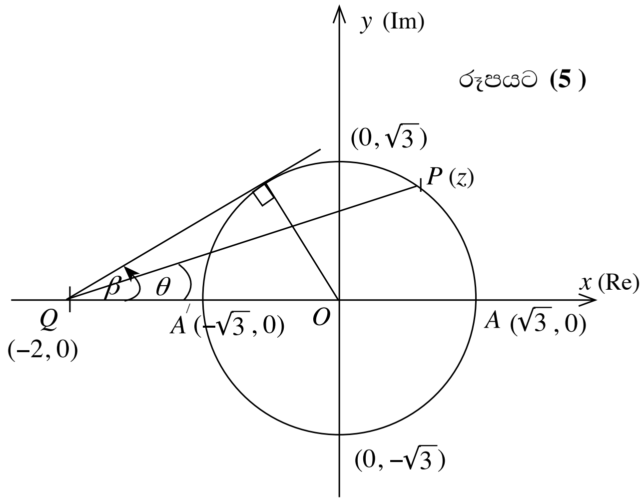
$2 - \sqrt{3} \leq |z + 2| \leq 2 + \sqrt{3}$ **(5)**

$\text{Arg}(z + 2) = \text{Arg}(z - (-2)) = \theta$

$-\beta \leq \theta \leq \beta$ **(5)**

$\beta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ බැවින්, $\beta = \pi/_3$

$\therefore\ -\pi/_3 \leq \text{Arg}\,(z + 2) \leq \pi/_3$ **(5)** **[35]**




රූපයට **(5)**

14.(i) $x = \sec\theta + \tan\theta$

$$x + \frac{1}{x} = \sec\theta + \tan\theta + \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} \times \frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$$

$$= \sec\theta + \tan\theta + \sec\theta - \tan\theta \quad (\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \text{ නිසා})$$

$$= 2\sec\theta$$ **(5)**

$y = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$

$$y + \frac{1}{y} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta + \frac{1}{\text{cosec}\,\theta + \cot\theta} \times \frac{\text{cosec}\,\theta - \cot\theta}{\text{cosec}\,\theta - \cot\theta}$$

$$= \text{cosec}\,\theta + \cot\theta + \text{cosec}\,\theta - \cot\theta \quad (\therefore \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1 \text{ නිසා})$$

$$= 2\,\text{cosec}\,\theta$$ **(5)**

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta \qquad \textbf{(5)}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\operatorname{cosec}\theta\cot\theta - \operatorname{cosec}^2\theta \qquad \textbf{(5)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} \;; \qquad \frac{dx}{d\theta} \neq 0 \text{ සඳහා} \qquad \textbf{(5)}$$

$$= \frac{-\operatorname{cosec}\theta\,(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}{\sec\theta\,(\sec\theta + \tan\theta)} \qquad \textbf{(5)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\cdot y}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\cdot x} \qquad \textbf{(5)}$$

$$= -\frac{1+y^2}{1+x^2} \qquad \textbf{[35]}$$

(ii) $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ යැයි ගනිමු.

$x > 0$ සඳහා $f(x)$ සන්තතික වේ. **(5)**

$f'(x) = 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{1+x} \underset{\textbf{(5)}}{=} \dfrac{x^3}{1+x}$ **(5)**

$x > 0$ සඳහා $f'(x) > 0$ වේ. **(5)**

$\therefore x > 0$ සඳහා $f$ වැඩිවන ශ්‍රිතයකි. **(5)**

තවද $f(0) = 0$ වේ. **(5)**

$\therefore$ සියලු $x > 0$ සඳහා $f(x) > 0$ වේ. **(5)**

$\therefore$ සියලු $x > 0$ සඳහා $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} > \ln(1+x)$ වේ.

$y = f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ ශ්‍රිතය සලකමු.

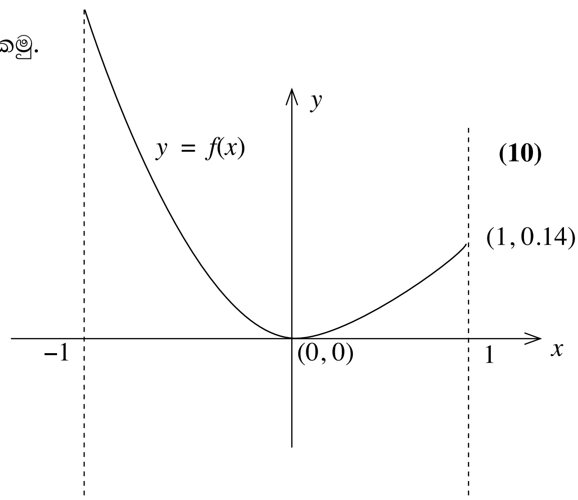
$-1 < x \le 1$ ප්‍රාන්තරය තුළ $f(x)$ සන්තතික වේ. **(5)**

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \longrightarrow +\infty$ **(5)**

$f'(x) = \dfrac{x^3}{1+x}$

$$\left.\begin{array}{r} -1 < x < 0 \text{ සඳහා } f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \\ 0 < x \le 1 \text{ සඳහා } f'(x) > 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(5)}$$

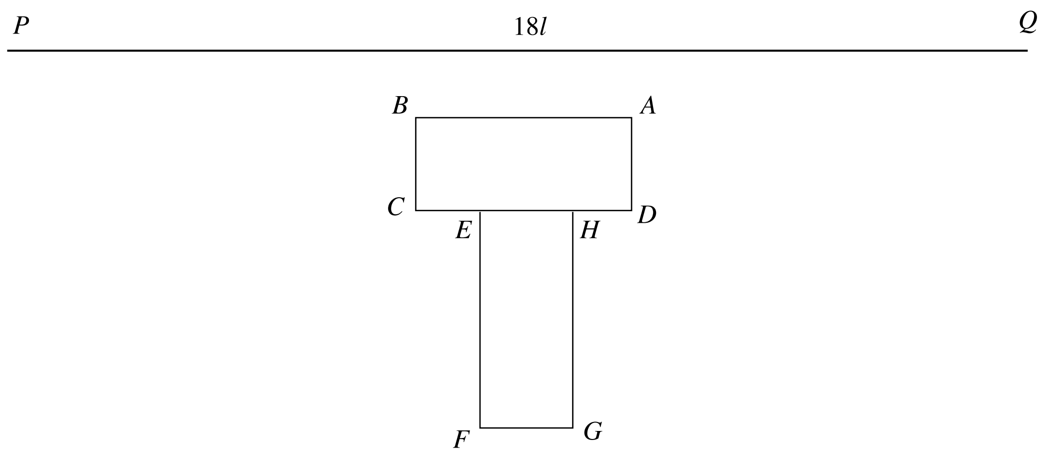
$\therefore (0, 0)$ අවම ලක්ෂ්‍යයකි. **(5)**




**(10)**

$f(1) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ln 2 = \dfrac{5}{6} - \ln 2 \simeq 0.83 - 0.69 = 0.14$ **(5)** **[70]**

(iii)




$AD =$ ඒකක $x$ ද $AB =$ ඒකක $y$ ද ලෙස ගනිමු.

එවිට $ABCD$ රාමුවේ පරිමිතිය $= 2(x + y)$

$EFGH$ රාමුවේ දිග $= x + 2y$ **(5)**

$ABCD$ රාමුවේ පරිමිතිය + $EFGH$ රාමුවේ දිග $= 18l$

$$3x + 4y = 18l$$

$$y = \frac{3(6l - x)}{4}$$ **(5)**

තොරණෙහි ආකෘතියේ වර්ගඵලය $= A$ නම්,

$$A = 2xy$$ **(5)**

$$= 2x \cdot \frac{3}{4}(6l - x)$$

$$= \frac{3}{2}(6l\,x - x^2)$$ **(5)**

$$\frac{dA}{dx} = \frac{3}{2}(6l - 2x) = 3(3l - x)$$ **(5)**

$\therefore\ x = 3l$ වන විට $\dfrac{dA}{dx} = 0$ වේ. **(5)**

$x < 3l$ වන විට $\dfrac{dA}{dx} > 0$ සහ $x > 3l$ වන විට $\dfrac{dA}{dx} < 0$ වේ. **(5)**

එනම් $x = 3l$ වන විට $A$ උපරිම වේ. **(5)**

එවිට $ABCD$ රාමුවට අයත් කම්බි කැබැල්ලේ දිග $= 2(x + y)$

$$= 2\left(3l + \frac{3}{4} \cdot 3l\right)$$

$$= \frac{21l}{2}$$ **(5)**

$EFGH$ රාමුවට අයත් කම්බි කැබැල්ලේ දිග $= 18l - \dfrac{21l}{2}$

$$= \frac{15l}{2}$$ **[45]**

[13 වන පිටුව බලන්න

15. (i) $\int \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

ආදේශය : $x = a\sin\theta$ **(5)**

එවිට $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$

$\mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ **(5)**

$= \int \theta\, a\cos\theta \,.\, a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ **(5)**

$= a^2\int \theta\,.\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

$= \frac{a^2}{2}\int \theta\,.(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ **(5)**

$= \frac{a^2}{2}\int \theta\,\mathrm{d}\theta + \frac{a^2}{2}\int \theta\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$

$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\theta^2}{2} + \frac{a^2}{2}\int \theta\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$ **(5)**

$= \frac{a^2\theta^2}{4} + \frac{a^2}{2}\left[\theta\,.\,\frac{1}{2}\sin 2\theta - \int\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\right]$ **(5)**

$= \frac{1}{4}a^2\theta^2 + \frac{1}{4}a^2\theta\sin 2\theta - \frac{a^2}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) + C$ මෙහි $C$ අභිමත නියතයකි. **(5)**

$= \frac{1}{4}a^2\theta^2 + \frac{1}{4}a^2\theta\sin 2\theta + \frac{1}{8}a^2\cos 2\theta + C$

$= \frac{1}{4}a^2\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{4}a^2\cdot\sin^{-1}\frac{x}{a}\cdot 2\,\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{1}{8}a^2\left(1-2\,\frac{x^2}{a^2}\right) + C$

$= \frac{1}{4}a^2\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\,ax\sin^{-1}\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{8}a^2\left(\frac{a^2-2x^2}{a^2}\right) + C$

$= \frac{1}{4}a^2\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2-x^2}\,\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{8}\,(a^2-2x^2) + C$ **(5)** **[40]**

(ii) $\int_0^p f(p-x)\,\mathrm{d}x = \int_p^0 f(\theta)\,.(-\mathrm{d}\theta)$

ආදේශය : $\theta = p - x$ **(5)**

එවිට $\mathrm{d}\theta = -\,\mathrm{d}x$ **(5)**

$x = 0$ විට $\theta = p$ සහ $x = p$ විට $\theta = 0$ **(5)**

$[0, p]$ ප්‍රාන්තරය තුළ $f(x)$ සන්තතික බැවින් $f(\theta)$ ද සන්තතික වේ.

$= -\int_p^0 f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ **(5)**

$= \int_0^p f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ **(5)**

$= \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ **(5)** **[30]**

[14 වන පිටුව බලන්න

$$I = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{(a-x)^n + x^n}\, dx$$

$$= \int_0^a \frac{[a-(a-x)]^n}{[a-(a-x)]^n + (a-x)^n}\, dx \quad \textbf{(10)}$$ ; ඉහත මූලධර්මය යෙදීමෙන්

$$= \int_0^a \frac{x^n}{x^n + (a-x)^n}\, dx \quad \textbf{(5)}$$

$$= J \quad \textbf{(5)}$$

$$I + J = \int_0^a \frac{(a-x)^n + x^n}{(a-x)^n + x^n}\, dx \quad \textbf{(10)}$$

**(5)**

$$= \int_0^a dx \quad \textbf{(5)}$$

$$= [\, x \,]_0^a \quad \textbf{(5)}$$

$$= a \quad \textbf{(5)}$$

$\therefore\ I = \frac{1}{2} a$ වේ. **(5)** **[55]**

(iii) $$\int_0^2 (x+2)^3 (x+5)\, dx$$

ආදේශය : $u = x + 2$ **(5)**

එවිට $du = dx$ සහ **(5)**

$x = 0$ විට $u = 2$

$x = 2$ විට $u = 4$

$$= \int_2^4 u^3 (u - 2 + 5)\, du \quad \textbf{(5)}$$

$$= \int_2^4 (u^4 + 3u^3)\, du$$

$$= \left[ \frac{u^5}{5} + \frac{3u^4}{4} \right]_2^4 \quad \textbf{(5)}$$

$$= \left( \frac{1024}{5} + \frac{3 \times 256}{4} \right) - \left( \frac{32}{5} + \frac{3 \times 16}{4} \right)$$

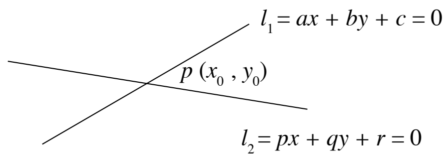
$$= \frac{1024 - 32}{5} + 192 - 12$$

$$= \frac{992}{5} + 180$$

$$= \frac{1892}{5} \quad \textbf{(5)}$$

**[25]**

16.( i) $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය




$P(x_0\ , y_0)$ යැයි ගනිමු.

එකවර ශූන්‍ය නොවන $\lambda$ හා $\mu$ පරාමිති සඳහා,

$\lambda\, l_1 + \mu\, l_2 = 0$ සමීකරණය සලකමු.

එනම්, $\lambda(ax + by + c) + \mu\,(px + qy + r) \quad = 0$

$(\lambda a + \mu p)x + (\lambda b + \mu q)y + (\lambda c + \mu r) = 0$

මෙය $x$ සහ $y$ හි ඒකජ සමීකරණයක් බැවින් සරල රේඛාවක් නිරූපණය කරයි. **(10)**

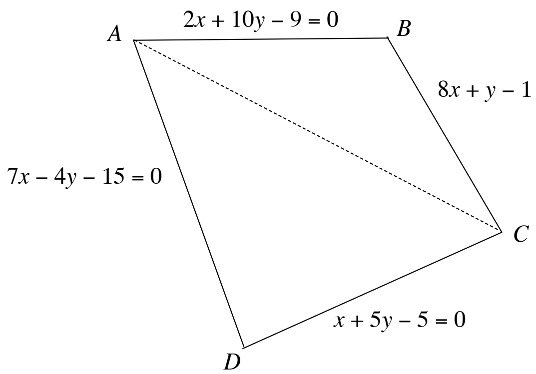
$l_1 = 0,\ P(x_0\ , y_0)$ හරහා යන බැවින්, $ax_0 + by_0 + c = 0$ ——— 1

$l_2 = 0,\ P(x_0\ , y_0)$ හරහා යන බැවින්, $px_0 + qy_0 + r = 0$ ——— 2 **(5)**

$\lambda$ 1 + $\mu$ 2 න්, $(\lambda a + \mu p)x_0 + (\lambda b + \mu q)y_0 + (\lambda c + \mu r) = 0$

එනම්, $\lambda\, l_1 + \mu\, l_2 = 0$ සරල රේඛාව $P(x_0\ , y_0)$ හරහා යයි. **(10)**

$\therefore$ $\lambda$ හා $\mu$ පරාමිතිවල විවිධ අගය සඳහා $\lambda\, l_1 + \mu\, l_2 = 0$ මගින්, $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක් නිරූපණය කෙරේ. ($\lambda = 0$ විට එමගින් $l_2 = 0$ ද, $\mu = 0$ විට $l_1 = 0$ ද දෙනු ලැබේ.) **(5)** **[30]**




**(5)**

ඉහත සිද්ධාන්තය අනුව $\lambda\mu \neq 0$ වන $\lambda$ හා $\mu$ පරාමිති ඇසුරෙන්

$AC$ හි සමීකරණය,

$\lambda\,(2x + 10y - 9) + \mu\,(7x - 4y - 15) = 0$ **(5)**

$\lambda\,(2x + 10y - 10 + 1) + \mu\,(8x - x + y - 5y - 15) = 0$

$\lambda.\ [2(x + 5y - 5) + 1] + \mu\,[(8x + y - 1) - (x + 5y - 5) - 19] = 0$ **(5)**

මෙම සරල රේඛාව $C$ හරහා යන විට $x_c + 5y_c - 5 = 0$ හා **(5)**

$8x_c + y_c - 1 = 0$ බැවින්, **(5)**

$\lambda\,[2.\ (0) + 1] + \mu\,[(0) - (0) - 19] = 0$ **(5)**

$\lambda - 19\mu = 0$

$\lambda \ = 19\mu$ **(5)**

$\therefore$ $AC$ හි සමීකරණය $19\mu\,(2x + 10y - 9) + \mu\,(7x - 4y - 15) = 0$ **(5)**

$\mu \neq 0$ බැවින්, $\quad 19\,(2x + 10y - 9) + (7x - 4y - 15) = 0$

$45x + 186y - 186 = 0$

$15x + 62y - 62 = 0$ **(5)** **[45]**

(ii)

$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$$

$$(x^2 - 5)^2 + (y - 4)^2 + 31 - 25 - 16 = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 - 10 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

$\therefore$ කේන්ද්‍රය $= (5, 4)$ **(5)**

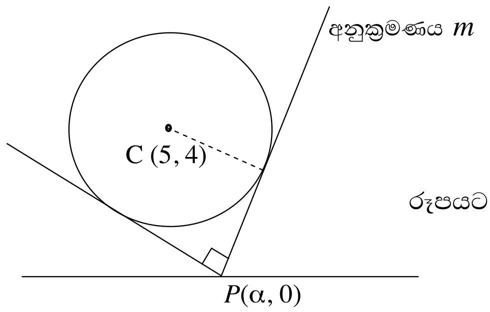
අරය $= \sqrt{10}$ ඒකක **(5)** **[15]**

$x$ අක්ෂය මත පිහිටි $P(\alpha, 0)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $m$ යැයි ගනිමු.

එවිට ස්පර්ශකයේ සමීකරණය,

$$y - 0 = m(x - \alpha)$$

$$mx - y - m\alpha = 0 \qquad \textbf{(10)}$$




රූපයට **(5)**

වෘත්තය ස්පර්ශ වීම සඳහා

$$\left| \frac{5m - 4 - m\alpha}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = \sqrt{10} \qquad \textbf{(10)}$$

$$\left| \frac{(5 - \alpha)m - 4}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = \sqrt{10}$$

$$[(5 - \alpha)m - 4]^2 = 10(m^2 + 1)$$

$$(25 - 10\alpha + \alpha^2 - 10)m^2 - 8(5 - \alpha)m + 16 - 10 = 0$$

$$(\alpha^2 - 10\alpha + 15)m^2 - 8(5 - \alpha)m + 6 = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

මෙය $m$ හි වර්ගජ සමීකරණයකි. මූල $m_1$ හා $m_2$ නම්,

ස්පර්ශක දෙක ලම්බ වීම සඳහා $m_1 \times m_2 = -1$ බැවින්, **(5)**

$$\frac{6}{\alpha^2 - 10\alpha + 15} = -1 \qquad \textbf{(5)}$$

$$\alpha^2 - 10\alpha + 21 = 0$$

මෙය $\alpha$ හි වර්ගජ සමීකරණයකි. මෙහි විවේචකය, **(5)**

$$\Delta_\alpha = (10)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 21$$
$$= 100 - 84$$
$$= 16$$
$$> 0$$

$\Delta_\alpha > 0$ බැවින් $\alpha$ සඳහා තාත්ත්වික ප්‍රභින්න අගය දෙකක් ඇත.

$\therefore$ $P(\alpha, 0)$ ආකාරයේ ලක්ෂ්‍ය දෙකක් පවතී. **(10)** **[60]**

[17 වන පිටුව බලන්න

17. (i) ඕනෑම $ABC$ ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, කෝසයින නීතිය,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ **(5)**

එලෙසම $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ ——— 1

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ ——— 2

1 + 2 න් $b^2 + c^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(c\cos B + b\cos C)$ **(5)**

$\Rightarrow a = c\cos B + b\cos C$ ; $a \neq 0$ නිසා **(5)**

$(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$

$= (c\cos B + b\cos C) + (c\cos A + a\cos C) + (b\cos A + a\cos B)$ **(5)**

$= a + b + c$ **(5)** **[25]**

(ii) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ සහ $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$0 < \alpha, \beta < \pi/2$ සහ $\tan\beta > \tan\alpha$ බැවින් $\beta > \alpha$ වේ.

$\therefore 0 < \alpha < \beta < \pi/2$ වේ. **(5)**

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ **(5)**

$$= \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} + \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}$$ **(5) + (5)**

$$= \frac{48}{65} + \frac{15}{65}$$

$$= \frac{63}{65}$$

$\alpha < \beta$ බැවින් $\sin(\alpha - \beta) < 0$ වේ. **(5)**

$\sin(\alpha - \beta) = -\sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)}$ **(5)**

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{63}{65}\right)^2}$$

$$= -\sqrt{\frac{2 \times 128}{65^2}}$$

$$= -\left(\frac{16}{65}\right)$$ **(5)** **[35]**

(iii) $\tan 3x = \tan(2x + x)$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x.\tan x}$$ **(5)**

$$= \frac{\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\cdot\tan x}$$ **(5)**

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}$$

$$= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$ **(5)**

[18 වන පිටුව බලන්න

$\tan 3x \cot x = \lambda$ යැයි ගනිමු.

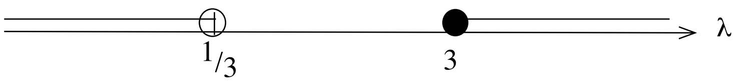
එවිට $\lambda = \left(\dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\right) \cot x = \dfrac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$ **(5)**

එවිට $\lambda - 3\lambda\tan^2 x - 3 + \tan^2 x = 0$

$(1 - 3\lambda) \tan^2 x = 3 - \lambda$

$\tan^2 x = \dfrac{3 - \lambda}{1 - 3\lambda}$ , $3\lambda \neq 1$ විට, **(5)**

$\therefore \dfrac{3 - \lambda}{1 - 3\lambda} \geq 0$ **(5)**




**(10)**

**[40]**

$\therefore \lambda \in \mathbb{R} \setminus [1/3 , 3)$ වේ.

$\tan 3x - \tan x = 0$

$(\lambda \tan x - \tan x) = 0$ **(5)**

$(\lambda - 1) \tan x = 0$

$[1/3 , 3)$ තුළ $\lambda$ නොපවතින බැවින්, $\lambda \neq 1$

$\therefore$ විසඳුම් ලැබෙනුයේ $\tan x = 0$ මගින් පමණි. **(5)**

එනම් $x = n\pi$ මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ **(5)** **[15]**

(iv) එම ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතවල ප්‍රධාන අගය පරාස පිළිවෙළින්,

$\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ හා $0 \leq y \leq \pi$ වේ. **(5) + (5)**

$\alpha = \sin^{-1} x$ හා $\beta = \cos^{-1} x$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\sin \alpha = x$ හා $\sin \beta = x$ වේ. **(5)**

$\sin (\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin \beta$

$= x \cdot x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2}$ ; ඉහත ප්‍රාන්තර තුළ $\cos\alpha > 0$ හා $\sin\beta > 0$ නිසා **(10)**

$= x^2 + 1 - x^2$

$= 1$ **(5)**

$-\pi/2 \leq \alpha + \beta \leq \dfrac{3\pi}{2}$ බැවින් $\sin (\alpha + \beta) = 1$ වන විට $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ වේ. **(5)**

**[35]**

$\therefore \sin^{-1}x + \cos^{-1} x = \pi/2$

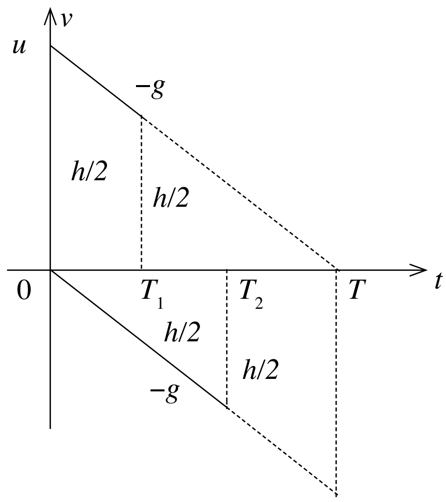
* * *

# අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2014
## සංයුක්ත ගණිතය - II පත්‍රය
## පිළිතුරු සඳහා මග පෙන්වීම

**A** කොටස

1. $P$ අංශුව පමණක් ප්‍රක්ෂේපණය කළේ නම් එය නඟින උපරිම උස $h$ යැයි ද, ඒ සඳහා $P$ ට ගතවන කාලය $T$ යැයි ද ගනිමු.

$P$ අංශුව $\dfrac{h}{2}$ දුරක් ඉහළ නැඟීමට ගතවන කාලය $T_1$ සහ $Q$ අංශුවට $\dfrac{h}{2}$ දුරක් පහළට වැටීමට ගතවන කාලය $T_2$ නම්,




$T_1 + T_2 = T$ වේ. ——— 1 **(5)**

$P$ අංශුවේ ප්‍රස්තාරයෙන්,

$T = \dfrac{u}{g}$ සහ $h = \dfrac{1}{2}\, uT = \dfrac{u^2}{2g}$ **(5)**

$Q$ අංශුවේ ප්‍රස්තාරයෙන්,

$\dfrac{h}{2} = \dfrac{1}{2}\; T_2\;\, gT_2$ **(5)**

$\Rightarrow \; \dfrac{u^2}{4g} = \dfrac{1}{2}\, gT_2^{\;2}$

$\Rightarrow \; T_2^{\;2} = \dfrac{u^2}{2g^2}$

$\Rightarrow \; T_2 = \dfrac{u}{\sqrt{2}g}$ , $T_2 > 0$ නිසා

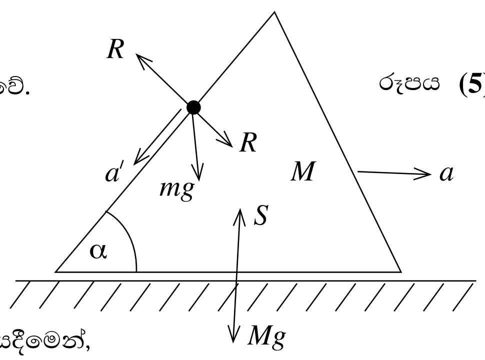
$\therefore$ 1 න් $T_1 = T - T_2 = \dfrac{u}{g} - \dfrac{u}{\sqrt{2}g} = \dfrac{u}{\sqrt{2}g}\left(\sqrt{2} - 1\right)$ **(5)**

මෙහි $T_2 > T_1$ වේ.

$Q$ අංශුව චලිතය ඇරඹිය යුත්තේ $P$ අංශුව චලිතය ඇරඹීමට $T_2 - T_1$ කාලයකට පෙර ය.

$T_2 - T_1 = \dfrac{u}{\sqrt{2}g} - \dfrac{u}{\sqrt{2}g}\left(\sqrt{2} - 1\right) = \dfrac{u}{\sqrt{2}g}\left(2 - \sqrt{2}\right) = \dfrac{u}{g}\left(\sqrt{2} - 1\right)$ **(5) [25]**

2. පොළවට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\longrightarrow a$ යැයි ද කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය $\overset{\alpha}{\swarrow}\, a'$ යැයි ද ගනිමු.




එවිට පොළවට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය = $\overset{\alpha}{\swarrow}\, a' \longrightarrow a$ වේ. රූපය **(5)**

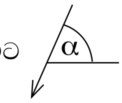
පද්ධතියට $\longrightarrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්

$$0 = Ma + m\,(a - a'\cos\alpha) \qquad \textbf{(5)}$$

$$\Rightarrow ma'\cos\alpha = (M + m)a \text{ ——— } 1$$

පොළවට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤයට $\longrightarrow$ $s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$$d = \frac{1}{2}at^2 \text{ ——— } 2 \qquad \textbf{(5)}$$

කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවට 

$s = ut + \frac{1}{2}\, at^2$ යෙදීමෙන්,

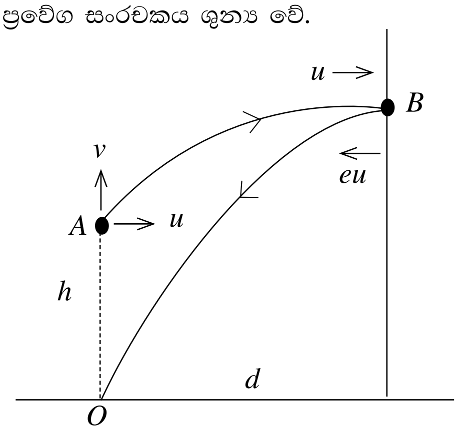
$$s = \frac{1}{2}\, a't^2 \quad \text{———} \quad (3) \qquad \textbf{(5)}$$

(2) සහ (3) න් $\quad \frac{s}{d} = \frac{a'}{a}$

$$= \frac{M+m}{m} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\Rightarrow ms\cos\alpha = (M+m)d \qquad \textbf{[25]}$$

3. බෝලය බිත්තියෙහි වදින්නේ ලම්බව බැවින්, එවිට එහි සිරස් ප්‍රවේග සංරචකය ශූන්‍ය වේ.
$\therefore$ $A$ සිට $B$ තෙක් චලිතය සඳහා ගත වන කාලය $t_1$ නම්,




$\uparrow$ $v = u + at$ යෙදීමෙන්

$0 = v - gt_1$

$\Rightarrow t_1 = v/g$

$A$ සිට $B$ තෙක් තිරස් චලිතය සඳහා,

$\longrightarrow d = u.\ t_1 = \frac{uv}{g}$ ——— (1) **(5)**

බෝලය බිත්තියෙහි ලම්බව ගැටෙන ප්‍රවේගය
$\longrightarrow u$ බැවින් පොලා පනින ප්‍රවේගය $\longleftarrow eu$ වේ. **(5)**
බෝලයට $B$ සිට $O$ තෙක් යාමට ගතවන කාලය $t_2$ නම්,

$d = eut_2$

$\Rightarrow t_2 = \frac{d}{eu} = \frac{v}{ge}$

$$\therefore \quad t_1 + t_2 = \frac{v}{g} + \frac{v}{ge} = \frac{v}{ge}(1+e) \qquad \textbf{(5)}$$

$A$ සිට $B$ හරහා $O$ තෙක් චලිතය සඳහා බෝලයට

$\uparrow$ $s = ut + \frac{1}{2}gt^2$ යෙදීමෙන්, $-h = v\ (t_1 + t_2) - \frac{1}{2}g\,(t_1+t_2)^2$ **(5)**

$$= \frac{v}{ge}\ (1+e)\left[v - \frac{1}{2}g.\ \frac{v}{ge}\,(1+e)\right]$$

$$= \frac{v}{ge}\ (1+e)\left[v - \frac{v}{2e}\,(1+e)\right]$$

$$= \frac{v^2(1+e)}{2ge^2}\left[2e - (1+e)\right]$$

$$= \frac{v^2(e^2-1)}{2ge^2} \qquad \textbf{(5)}$$

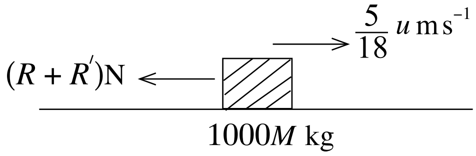
$$\Rightarrow \quad 2ghe^2 = v^2(1-e^2) \qquad \textbf{[25]}$$

4. $u\,\mathrm{km\,h^{-1}} = \dfrac{1000u\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \dfrac{5}{18}u\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ **(5)**

H = FV යෙදීමෙන්,

$1000\,H = R \times \dfrac{5}{18}u$ **(5)**

$\therefore\ Ru = 3600\,H$




W = ΔT යෙදීමෙන්,

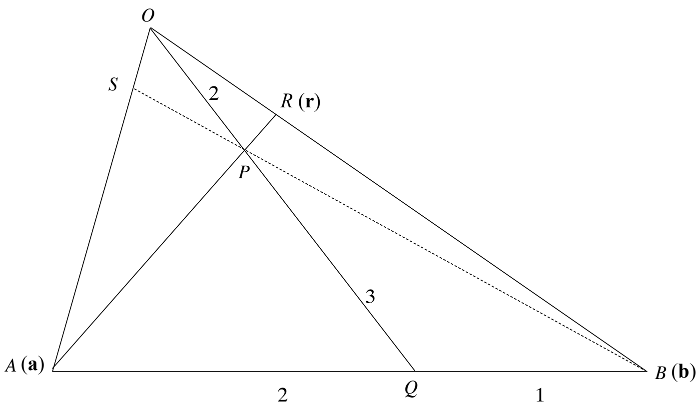
$(R+R')1000d = \dfrac{1}{2} \times 1000M \times \left(\dfrac{5u}{18}\right)^2 - 0$ **(10)**

$(R+R')d = \dfrac{25}{648}\ Mu^2$

$R'du = \dfrac{25}{648}\ Mu^3 - Rdu$ **(5)**

$= \dfrac{25}{648}\ Mu^3 - 3600\,Hd$ **[25]**

5.




$\mathbf{AQ} = \dfrac{2}{3}\ \mathbf{AB} = \dfrac{2}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ **(5)**

$\mathbf{OQ} = \mathbf{OA} + \mathbf{AQ} = \mathbf{a} + \dfrac{2}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \dfrac{1}{3}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ **(5)**

$\mathbf{OP} = \dfrac{2}{5}\cdot\mathbf{OQ} = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{3}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}) = \dfrac{2}{15}(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$

$\mathbf{AP} = \mathbf{OP} - \mathbf{a} = \dfrac{2}{15}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}) - \mathbf{a} = \dfrac{4\mathbf{b}}{15} - \dfrac{13\mathbf{a}}{15}$ **(5)**

$\mathbf{OA} + k\mathbf{AP} = \mathbf{a} + \dfrac{k}{15}(4\mathbf{b} - 13\mathbf{a}) = \dfrac{4k\mathbf{b}}{15} + \left(1 - \dfrac{13k}{15}\right)\mathbf{a}$

මෙය **a** ගෙන් ස්වායත්ත වීම සඳහා $k = \dfrac{15}{13}$ **(5)**

එවිට $\mathbf{OA} + k\mathbf{AP} = \mathbf{OR} = \dfrac{4k\mathbf{b}}{15} = \dfrac{4}{13}\mathbf{b}$ **(5)**

$\therefore\ OR : OB = 4 : 13$ **[25]**

6. $AB$ දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන බල $\downarrow w$, $\longrightarrow R_1$, $\nwarrow R_2$ වේ.

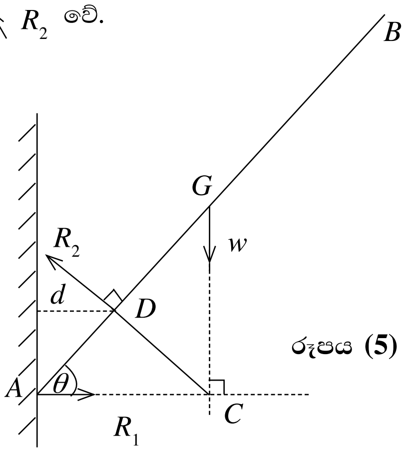
සමතුලිතතාව සඳහා මෙම බල තුන ඒක ලක්ෂ්‍ය ($C$) විය යුතුය. එවිට, **(5)**

$$d = AD.\cos\theta \;=\; AC\cos\theta.\cos\theta$$ **(5)**

$$= AG\cos\theta.\cos\theta.\cos\theta$$ **(5)**

$$= a\cos^3\theta$$

$$\therefore \cos^3\theta = \frac{d}{a}$$




රූපය **(5)**

**(5) [25]**

7. $P(X) \neq 0$ සහ $P(Y) \neq 0$ නිසා $P(X) \,.\, P(Y) \neq 0$ ——— (1) **(5)**

නමුත් $X$ සහ $Y$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර නිසා $P(X \cap Y) = 0$ ——— (2) **(5)**

(1) සහ (2) න් $P(X \cap Y) \neq P(X) \,.\, P(Y)$

$\therefore$ $X$ සහ $Y$ සිද්ධි ස්වායත්ත නොවේ. **(5)**

(i) $P(A) = \frac{1}{2}$ සහ $P(A \backslash B) = \frac{1}{4}$ බැවින් $P(A) \neq P(A \backslash B)$ වේ.

$\therefore$ $A$ සහ $B$ සිද්ධි ස්වායත්ත නොවේ. **(5)**

(ii) $P(A \backslash B) = \frac{1}{4}$ සහ $P(B \backslash A) = \frac{1}{3}$ බැවින් $P(A \cap B) \neq 0$ **(5)**

$\therefore$ $A$ සහ $B$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර නොවේ. **[25]**

8. $P(A) = \frac{1}{2},\; P(B) = \frac{1}{4},\; P[(A \cap B') \cup (B \cap A')] = \frac{1}{3}$ **(5)**

(i) $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ **(5)**

$$\Rightarrow\; P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\; 2.P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\; P(A \cap B) = \frac{5}{24}$$ **(5)**

(ii) $P(A \backslash B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$ **(5)**

$$= \frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{6}$$ **(5)**

**[25]**

9. නිරීක්‍ෂණ 9 : 3, 5, 5, 6, 10, 13, 13, $x$, $y$

මාතය 5 බැවින් $x$ සහ $y$ අතුරෙන් අඩු තරමින් එකක් හෝ 5 විය යුතුය. **(5)**

මධ්‍යන්‍යය 8 බැවින්, $\dfrac{3+5+5+6+10+13+13+x+y}{9} = 8$ **(5)**

$x + y = 17$

$x = 5$ ලෙස ගනිමු. එවිට $y = 12$ **(5)**

එවිට නිරීක්ෂණ 9 : 3, 5, 5, 5, 6, 10, 12, 13, 13

$\therefore$ මධ්‍යස්ථය $= 6$ **(10)**

**[25]**

10. නිරීක්ෂණ නවය : $x_i$ ; $i = 1, 2, \dots, 9$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $\sum_{i=1}^{9} x_i = 25 \times 9 = 225$ **(5)**

$\sum_{i=1}^{9} \dfrac{(x_i - 25)^2}{9} = 4^2$ **(5)**

$\therefore \sum_{i=1}^{9} (x_i - 25)^2 = 16 \times 9 = 144$

නව සංගහනයේ මධ්‍යන්‍යය $\mu$ නම්,

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i + (15+20+40)}{9+3} = \frac{225+75}{12} = 25$$ **(5)**

නව සංගහනයේ සම්මත අපගමනය $\sigma$ නම්,

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9} (x_i-25)^2 + (15-25)^2 + (20-25)^2 + (40-25)^2}{12}$$ **(5)**

$$= \frac{144+100+25+225}{12}$$

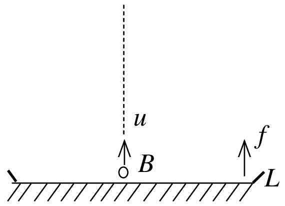
$$= \frac{494}{12}$$

විචලතාව $= 41.17$ **(5)**

$\therefore \sigma = \sqrt{41.17}$ **[25]**

**B කොටස**

11. (a) $t = 0$ විට

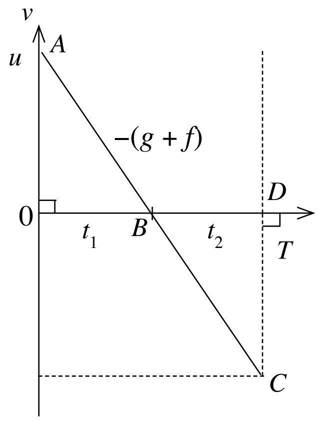



$L$ - ආරෝහකය

$B$ - බෝලය

$f$ - ආරෝහකයේ ත්වරණය

යැයි ගනිමු.




**(10)**

$t = 0$ විට $\mathbf{V}_{B,L} = \mathbf{V}_{B,E} + \mathbf{V}_{E,L} = \uparrow u + 0 \quad = \uparrow u$ **(5)**

ත්වරණය $\mathbf{a}_{B,L} = \mathbf{a}_{B,E} + \mathbf{a}_{E,L} = \downarrow g + \downarrow f = \downarrow (g+f)$ **(10)**

ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරයෙහි $OB = t_1$ යැයි ද $BD = t_2$ යැයි ද $T = t_1 + t_2$ යැයි ද ගනිමු. **(5)**

බෝලයේ චලිතය සැලකූ විට, $AOB$ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය = $BDC$ ත්‍රිකෝණයේ

වර්ගඵලය නිසා සහ $AOB$ ත්‍රිකෝණයත් $BDC$ ත්‍රිකෝණයත් සමරූපී නිසා $t_1 = t_2 = \dfrac{T}{2}$ **(10)**

බෝලයේ ත්වරණය සැලකීමෙන්, $\dfrac{u}{t_1} = g + f$ **(10)**

$$\Rightarrow f = \frac{u}{t_1} - g$$

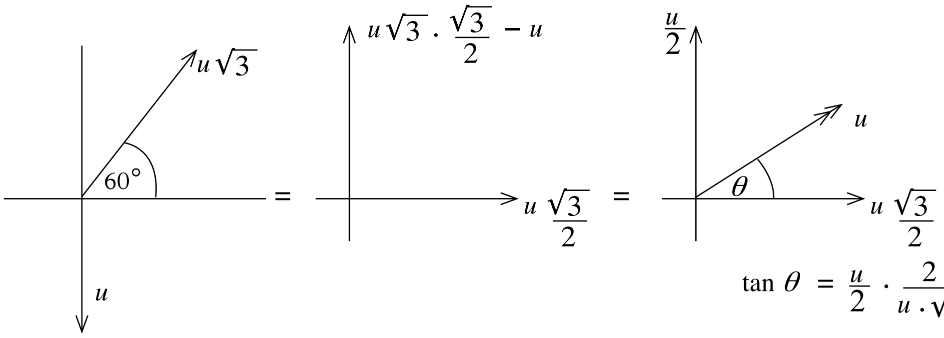
$$= \frac{2u}{T} - g \qquad \textbf{(5)}$$

$$= \frac{1}{T}[2u - gT]\ ; \quad 2u - gT > 0$$

$$u > \frac{1}{2} gT$$

**[55]**

(b)(i) $\mathbf{V}_{B,E} = \mathbf{V}_{B,A} + \mathbf{V}_{A,E}$ **(5)**




**(10)**

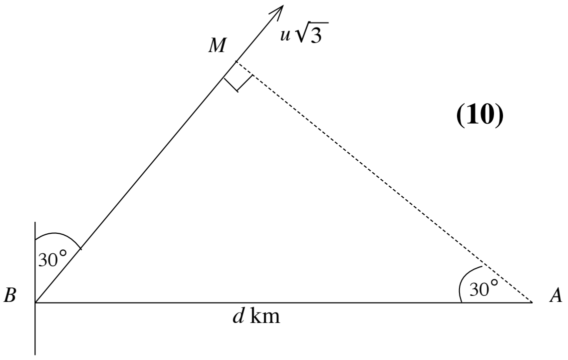
$$\tan\theta = \frac{u}{2} \cdot \frac{2}{u \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = \pi/6 \qquad \textbf{(10)}$$

**[25]**

$\therefore$ සතුරු නැවෙහි ප්‍රවේගය උතුරින් $60^\circ$ ක් නැගෙනහිරට $u$ වේ.

(ii) යුද නැවට සාපේක්ෂව සතුරු නැවෙහි චලිතය සලකමු.




**(10)**

නැව් දෙක එකිනෙකට ආසන්නතම වන විට, සතුරු නැව පිහිටන ලක්ෂ්‍යය $M$ යැයි ගනිමු.

යුද නැවෙහි සිට සතුරු නැවෙහි දිගංශය $= 300^\circ$ **(10)**

(එනම් උතුරින් $60^\circ$ ක් බටහිර දිශාවට වේ.)

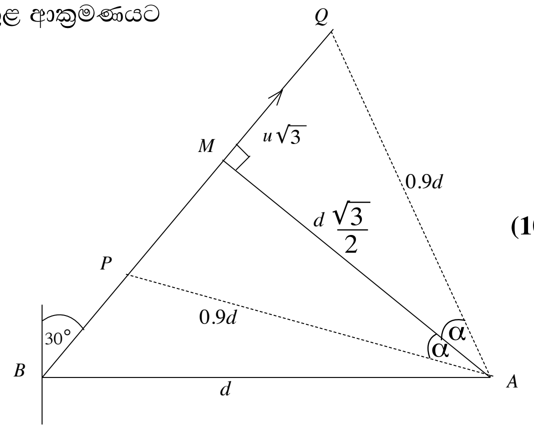
නැව් දෙක අතර කෙටිම දුර $= AM$

$$= d\cos 30^\circ$$

$$= \frac{d\sqrt{3}}{2} \text{ km} \qquad \textbf{(10)}$$

**[30]**

(iii) සතුරු නැව $P$ සිට $Q$ තෙක් ගමන් කරන කාලය තුළ ආක්‍රමණයට ලක්වීමට ඉඩ ඇත.




**(10)**

මෙහි $\cos\alpha = \frac{d\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{10}{9d} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$

$\therefore \ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ **(10)**

$$PQ = 2 \cdot \frac{9}{10}\, d \sin\alpha = 2 \cdot \frac{9d}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{5} d \qquad \textbf{(10)}$$

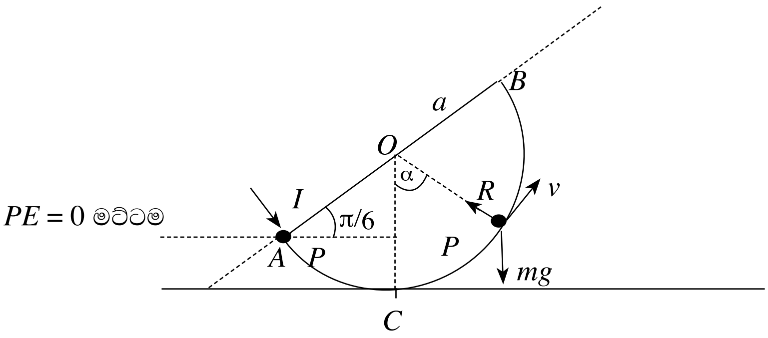
එම කාලය $= \frac{\sqrt{6}}{5} d \cdot \frac{1}{u\sqrt{3}}$ h

$= \frac{\sqrt{2}\, d}{5u} \times 60$ මිනිත්තු **(10)**

$= 12\sqrt{2}\,\frac{d}{u}$ මිනිත්තු

**[40]**

12.




(i) $A$ හිදී අංශුවට දිශාවට $\mathbf{I} = \triangle(m\mathbf{v})$ යෙදීමෙන්,

$I = mu \Rightarrow u = \dfrac{I}{m}$ **(10)** **[10]**

(ii) අංශුවේ පිහිටුම් අවස්ථා දෙක සලකා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්,

$\dfrac{1}{2}mv^2 - mg(a\cos\alpha - a\sin\pi/6) = \dfrac{1}{2}mu^2$ **(20)**

$\Rightarrow v^2 = u^2 + ga(2\cos\alpha - 1) \Rightarrow v = \sqrt{u^2 + ga(2\cos\alpha - 1)}$ **(10)**

අංශුවට **PO** දිශාවට $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්,

$R - mg\cos\alpha = m.\dfrac{v^2}{a}$ **(10)**

$\Rightarrow R = mg\cos\alpha + \dfrac{m}{a}\left[u^2 + ga(2\cos\alpha - 1)\right]$

$= \dfrac{m}{a}\left[u^2 + 3ga\cos\alpha - ga\right]$ **(10)** **[50]**

(iii) මෙහි $\alpha$ පිහිටන ප්‍රාන්තරය, $-\pi/3 \le \alpha \le \dfrac{2\pi}{3}$ වන පරිදි වේ. **(5)**

අංශුව $B$ කරා ළඟා වන විට $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ වේ.

එවිට $v^2 = u^2 + ga\left(-2 \times \dfrac{1}{2} - 1\right) = u^2 - 2ga$ **(10)** $\therefore\ u^2 \ge 2ga$ විය යුතුය. **(5)**

$R = \dfrac{m}{a}\left[u^2 + 3ga\left(-\dfrac{1}{2}\right) - ga\right] = \dfrac{m}{a}\left(u^2 - \dfrac{5}{2}ga\right)$ **(10)** $\therefore\ u^2 \ge \dfrac{5}{2}ga$ විය යුතුය. **(5)**

$\therefore$ අංශුව $B$ වෙත ළඟා වීම සඳහා, ඉහත අවශ්‍යතා දෙකම සැපිරීමට

$u^2 \ge \dfrac{5}{2}ga \Rightarrow \dfrac{I^2}{m^2} \ge \dfrac{5}{2}ga$ **(10)**

$I^2 \ge \dfrac{m^2}{4} \times 10ga$

$I \ge \dfrac{m}{2}\sqrt{10ga}$ **[45]**

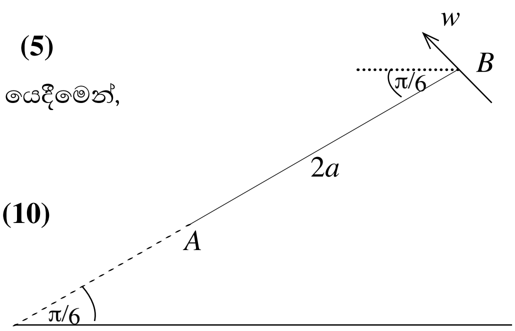
[9 වන පිටුව බලන්න

(iv) අංශුව $B$ හිදී පාත්‍රයෙන් ඉවත්වන ප්‍රවේගය $w$ නම්,

$w^2 = u^2 - 2ga > 0$ **(5)**

අංශුවේ, $B$ සිට $A$ තෙක්, $\longleftarrow$ චලිතය සඳහා $s = ut$ යෙදීමෙන්,

$2a \cos \frac{\pi}{6} = w \sin \frac{\pi}{6} . t$




$2\sqrt{3}\, a = wt$ ——— ① **(10)**

$\uparrow$ චලිතය සඳහා $s = ut + \frac{1}{2} at^2$ යෙදීමෙන්,

$-2a \sin \frac{\pi}{6} = w \cos \frac{\pi}{6}\, t - \frac{1}{2} gt^2$ **(10)**

① න්, $-a = w. \frac{\sqrt{3}}{2} . 2\sqrt{3} \frac{a}{w} - \frac{1}{2} g . \frac{4 \times 3a^2}{w^2}$

$-a = 3a - \frac{6g\, a^2}{w^2}$

$6ga^2 = 4aw^2$

$3ga = 2 (u^2 - 2ga)$ **(10)**

$2u^2 = 7ga$

**(10)**

$\frac{I^2}{m^2} = \frac{7}{2} ga$

$I = m\sqrt{\frac{7}{2} ga} = \frac{m}{2} \sqrt{14ga}$ **[45]**

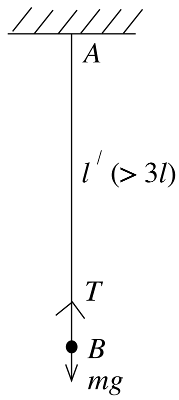
13. $AB$ තන්තුවේ ස්වාභාවික දිග $3l$ ; ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $3mg$

(i) සමතුලිත පිහිටීමේදී $AB = l^{/} (l^{/} > 3l)$ යැයි ගනිමු.

අංශුවේ සමතුලිතතාව සැලකීමෙන්,

$T = mg$ **(10)**

$3mg. \frac{(l^{/} - 3l)}{3l} = mg$ **(10)**




$l^{/} - 3l = l$

$l^{/} = 4l$

$\therefore$ සමතුලිත පිහිටීමට $A$ සිට ඇති සිරස් දුර $= 4l$ **(10)** **[30]**

(ii) මුදුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,

$\frac{1}{2} m\, 0 + mg. 4l = \frac{1}{2} mu^2 + 0$ **(10)**

$\Rightarrow u^2 = 8gl$ **(5)**

$\Rightarrow u = 2\sqrt{2gl}$ **[15]**

[ගුරුත්වය යටතේ මුදුවේ චලිතය සැලකීමෙන් ද මෙම ප්‍රතිඵලය ලැබේ.]

[10 වන පිටුව බලන්න

(iii) මුදුවෙහි හා අංශුවෙහි ගැටුම සලකමු.

ගැටුමට පෙර ගැටුමට පසු

$m \circ \downarrow u$ $\quad$ $2m \odot \downarrow u^{/}$

$m \bullet \downarrow u$

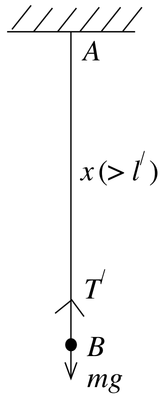
$\downarrow$ ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්,

$2mu^{/} = mu + 0$ **(10)**

$\Rightarrow u^{/} = \frac{1}{2} u = \sqrt{2gl}$ **(5)** **[15]**

(iv) අනතුරුව සිදුවන චලිතයේදී සංයුක්ත වස්තුව $A$ සිට $x$ සිරස් දුරක් පහළින් පිහිටන අවස්ථාවක් ගනිමු.

$x > l^{/}$ වේ. සංයුක්ත වස්තුව සඳහා $\downarrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, **(10)**




**(10)**

$2mg - T^{/} = 2m\ddot{x}$

$2m\ddot{x} = 2mg - 3mg\,\frac{(x - 3l)}{3l}$

$\ddot{x} = g - \frac{g}{2l}\,(x - 3l)$

$= -\frac{g}{2l}\,(x - 5l)$

මෙය $\ddot{y} = -\omega^2 y$ ආකාරය ගනී. $\frac{g}{2l} > 0$ බැවින්, **(10)**

මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{2l}$ හා $y = x - 5l$ වේ.

$\therefore$ සංයුක්ත වස්තුවෙහි චලිතය සරල අනුවර්තී වන අතර කෝණික ප්‍රවේගය $\omega = \sqrt{\frac{g}{2l}}$ වේ. **(10)**

දෝලන කාලාවර්තය $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{2l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$ **(10)** **[50]**

(v) සංයුක්ත වස්තුවේ සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි දෝලන කේන්ද්‍රය $A$ සිට $5l$ සිරස් දුරකින් පිහිටයි.

එහි විස්තාරය $a$ නම්,

$v^2 = \omega^2\,(a^2 - y^2)$ යෙදීමෙන්, **(10)**

$v^2 = \frac{g}{2l}\,[a^2 - (x - 5l)^2]$ වේ.

$x > l^{/} = 4l$ වන විට $v = \sqrt{2gl}$ නිසා, **(10)**

$2gl = \frac{g}{2l}\,[a^2 - (4l - 5l)^2]$

$= \frac{g}{2l}\,[a^2 - l^2]$

$\therefore\; 4l^2 = a^2 - l^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{5}\,l$ **(10)**

$\therefore$ චලිතයට බාධා නොවීම පිණිස සීලිමෙහි අවම උස $5l + a$ එනම් $(5+\sqrt{5})\,l$ විය යුතුය. **(10)** **[40]**

14. (a) $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda\mathbf{a} = -\mu\mathbf{b}$

නමුත් $\mathbf{a} \not\parallel \mathbf{b}$ බැවින් $\lambda\mathbf{a} \not\parallel -\mu\mathbf{b}$ වේ.

$\therefore$ $\lambda\mathbf{a} = -\mu\mathbf{b}$ විය හැක්කේ $\lambda\mathbf{a}$ හා $-\mu\mathbf{b}$ වෙන වෙනම අභිශූන්‍ය දෛශිකයක් වීම මගින් පමණි.

$\therefore$ $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$ සහ $-\mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ වේ. **(10)**

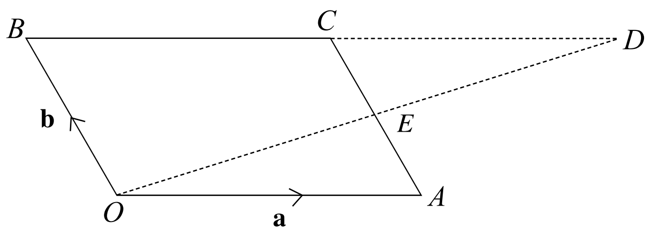
නමුත් $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ සහ $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ බැවින් $\lambda = 0$ සහ $-\mu = 0$ විය යුතු වේ.

$\therefore$ $\lambda = 0$ සහ $\mu = 0$ වේ. **(10)**

විලෝම වශයෙන්,

$\lambda = \mu = 0$ වන විට $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ වේ. **(5)**

$\therefore$ $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ වනුයේ $\lambda = \mu = 0$ ම නම් පමණි. **[25]**




$BD = 3\,BC \Rightarrow \mathbf{BD} = 3\,\mathbf{BC} = 3\mathbf{a}$ $(\mathbf{BC} = \mathbf{OA} = \mathbf{a}$ නිසා$)$ **(5)**

$\mathbf{OD} = \mathbf{OB} + \mathbf{BD} = \mathbf{b} + 3\mathbf{a} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **(10)**

$OE = \lambda\,OD \Rightarrow \mathbf{OE} = \lambda\,\mathbf{OD} = \lambda(3\mathbf{a} + \mathbf{b})$ **(5)**

නමුත්, $\mathbf{OE} = \mathbf{OA} + \mathbf{AE} = \mathbf{a} + \mu\,\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b}$ $(\mathbf{AC} = \mathbf{OB} = \mathbf{b}$ නිසා$)$ **(5)**

$\therefore$ $\lambda(3\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b}$

$(3\lambda - 1)\,\mathbf{a} + (\lambda - \mu)\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$ **(5)**

$\mathbf{a} \not\parallel \mathbf{b}$ නිසා, $3\lambda - 1 = 0$ සහ $\lambda - \mu = 0$ වේ.

$\therefore$ $\lambda = \mu = \dfrac{1}{3}$ වේ. **(10)**

**[40]**

$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ සහ $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$

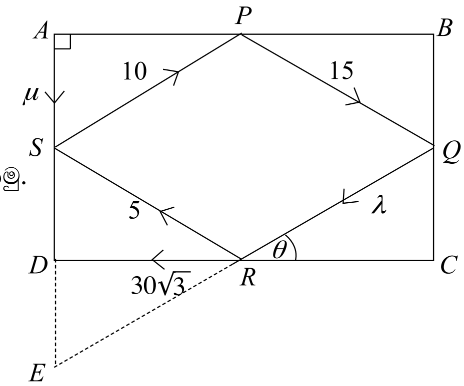
$OACB$ රොම්බසයක් වීමට $OA = OB$

$\Rightarrow |\mathbf{OA}| = |\mathbf{OB}|$ **(5)**

$\Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$

$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ **(5)** **[10]**

(b) $AB = 6a$
$BC = 2\sqrt{3}a$




**(10)**

(i) දික් කළ $AD$ හා $QR$ රේඛා $E$ හිදී හමුවේ යැයි ගනිමු.
එවිට $DE = \sqrt{3}a$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}a}{3a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$QR = \sqrt{3a^2+9a^2} = 2\sqrt{3}a$$ **(10)**

$$\overset{\curvearrowright}{E} = -30\sqrt{3}\times\sqrt{3}a - 5\times 2\sqrt{3}a\sin\frac{\pi}{3} + 10\times 2\sqrt{3}a\sin\frac{\pi}{3} + 15\times 4\sqrt{3}a\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= -90a - 15a + 30a + 90a$$ **(10)**

$$= 15a$$

$$\neq 0$$ **(5)**

$\therefore$ පද්ධතිය සමතුලිත විය නොහැකිය.

(ii) පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වේ නම්,

$\longrightarrow X = 0$ සහ $\uparrow Y = 0$ විය යුතුය. **(10)**

$$\longrightarrow X = 0 \Rightarrow -30\sqrt{3} - 5\cos\frac{\pi}{6} + 10\cos\frac{\pi}{6} + 15\cos\frac{\pi}{6} - \lambda\cos\frac{\pi}{6} = 0$$ **(5)**

$$-30\sqrt{3} + 20\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda.\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3} - 60\sqrt{3}}{2} = \frac{-40\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda = -40$$

$$\uparrow Y = 0 \Rightarrow -\mu + 5\sin\frac{\pi}{6} + 10\sin\frac{\pi}{6} - 15\sin\frac{\pi}{6} - \lambda\sin\frac{\pi}{6} = 0$$ **(5)**

$$-\mu = \lambda\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\mu = -\lambda\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 40\times\frac{1}{2}$$

$$= 20$$

(iii) පද්ධතිය **AD** දිශාවට 10 N බලයකට ඌනනය වේ නම්,

**AD** දිශාවට සංරචකය = 10 N සහ **AD** ට ලම්බ සංරචකය = 0 විය යුතුය. **(10)**

$\Rightarrow \quad \mu + \lambda\sin\frac{\pi}{6} = 10$ සහ $\longrightarrow X = 0$

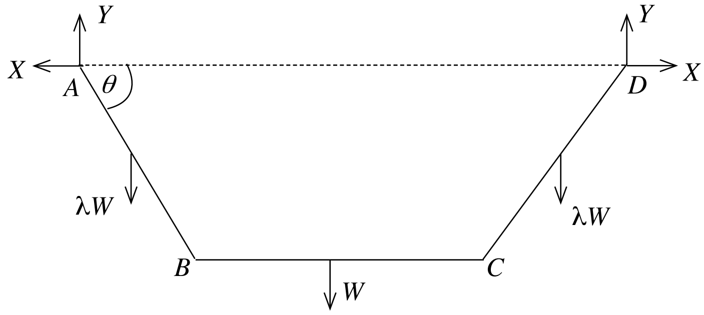
$\Rightarrow \quad \mu = -\lambda\sin\frac{\pi}{6} + 10$ **(5)** සහ $\lambda = -40$ **(5)**

$$= 40\times\frac{1}{2} + 10$$

$$= 30$$ **[75]**

[13 වන පිටුව බලන්න

15. (a)




(5)

පද්ධතියේ සමමිතියෙන් $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (5)

(i) පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සැලකීමෙන්,

$$\uparrow \quad 2Y = W + 2\lambda W$$

$$Y = (\lambda + \tfrac{1}{2})\, W \qquad \textbf{(10)}$$

$AB$ දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සඳහා $B$ වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

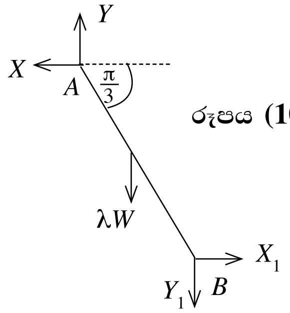
$$B \circlearrowleft \quad \lambda W \,.\, 2a \cos\frac{\pi}{3} - Y \,.\, 4a \cos\frac{\pi}{3} + X \,.\, 4a \sin\frac{\pi}{3} = 0$$

$$X \,.\, 2\sqrt{3}a = (\lambda + \tfrac{1}{2})\, W \,.\, 2a - \lambda W a$$

$$X = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,[\lambda W + W]$$

$$= \frac{W}{2\sqrt{3}}\,(\lambda + 1) \qquad \textbf{(10)} \quad \textbf{[30]}$$

(ii) $AB$ දණ්ඩෙහි පමණක් සමතුලිතතාව සැලකූ විට,
$BC$ දණ්ඩ මත $B$ හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් සංරචකය $X_1$ ද සිරස් සංරචකය $Y_1$ ද ලෙස ගනිමු. එවිට,




රූපය **(10)**

$$\longrightarrow \quad X_1 = X$$

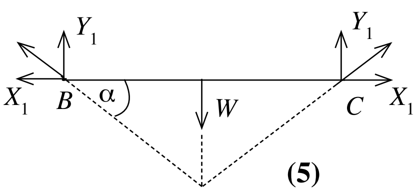
$$= \frac{W}{2\sqrt{3}}\,(\lambda + 1) \qquad \textbf{(5)}$$

$$\uparrow \quad 2Y_1 = W$$

$$Y_1 = \frac{1}{2}\,W \qquad \textbf{(5)} \qquad \textbf{[20]}$$

(iii) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2} \cdot \dfrac{1}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **(5)**

තවද $\tan\alpha = \dfrac{Y_1}{X_1} = \dfrac{W}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{W(\lambda+1)} = \dfrac{\sqrt{3}}{(\lambda+1)}$ **(5)**



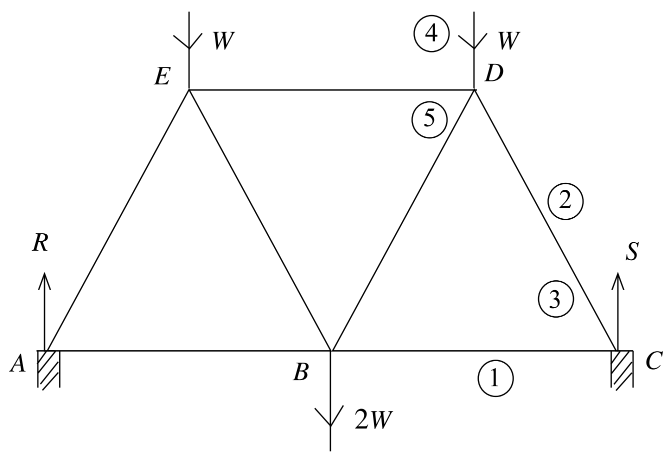

(5)

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{(\lambda+1)} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda + 1 = 4$$

$$\lambda = 3 \qquad \textbf{(5)} \qquad \textbf{[25]}$$

(b)




(i) සමමිතියෙන් $R = S$

සමතුලිතතාව සඳහා $\uparrow$ $2S = 4W \Rightarrow S = 2W$

සටහන : $A$ වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන් ද $S$ ලැබේ. **(15)** **[15]**

(ii) පද්ධතියේ සමමිතිය සැලකීමෙන් $AB$ සහ $CB$, $AE$ සහ $CD$, $BE$ සහ $BD$ යනු දඬු යුගලවල ප්‍රත්‍යාබල සමාන බව ලැබේ. **(10)**

බෝ අංකනය අනුව ප්‍රත්‍යාබල සටහන ඇඳීමෙන්,

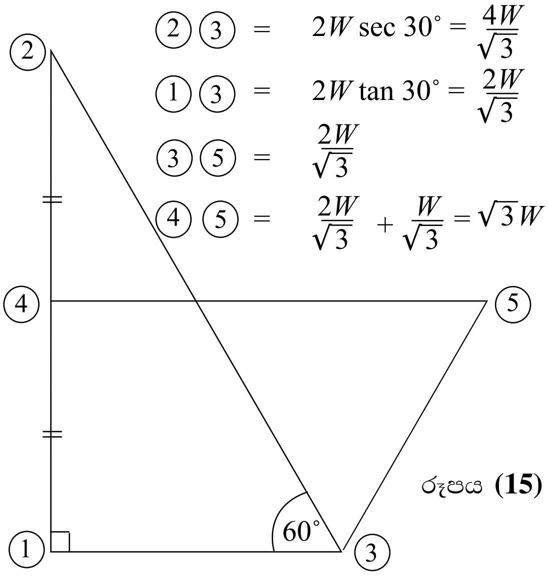
$$1\,2 = 2W$$

$$2\,3 = 2W \sec 30^\circ = \frac{4W}{\sqrt{3}}$$

$$1\,3 = 2W \tan 30^\circ = \frac{2W}{\sqrt{3}}$$

$$3\,5 = \frac{2W}{\sqrt{3}}$$

$$4\,5 = \frac{2W}{\sqrt{3}} + \frac{W}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}W$$

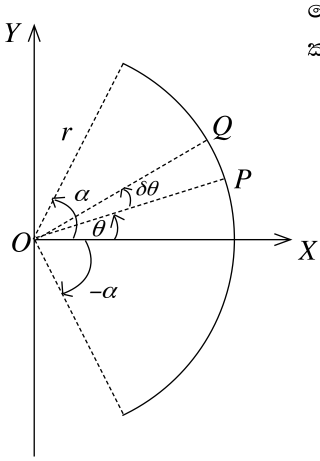



රූපය **(15)**

| දණ්ඩ | ප්‍රත්‍යාබලය | | |
|---|---|---|---|
| | විශාලත්වය | ස්වභාවය | |
| $AB$, $CB$ | $\frac{2W}{\sqrt{3}}$ | ආතතිය | **(5)** + **(5)** |
| $AE$, $CD$ | $\frac{4W}{\sqrt{3}}$ | තෙරපුම | **(5)** + **(5)** |
| $BE$, $BD$ | $\frac{2W}{\sqrt{3}}$ | ආතතිය | **(5)** + **(5)** |
| $DE$ | $\sqrt{3}W$ | තෙරපුම | **(5)** |

**[60]**

16. (a)



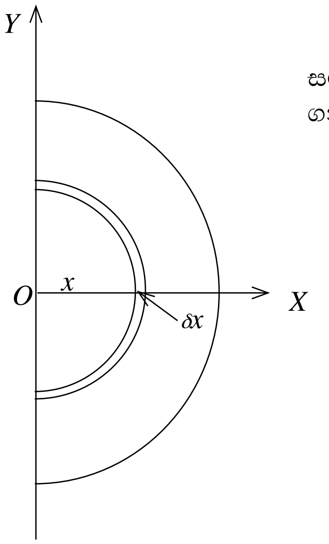

සමමිතියෙන්, තුනී කම්බියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය $G = (\bar{x}\,, 0)$ ලෙස ගනිමු.
කම්බියේ රේඛීය ඝනත්වය $m$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} mr^2 \cos \mathrm{d}\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} mr \,\mathrm{d}\theta}$$

$$= \frac{r[\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}}$$

$$= \frac{r\,.\,2\sin\alpha}{2\alpha}$$

$$= \frac{r\sin\alpha}{\alpha} \qquad \textbf{(30)}$$



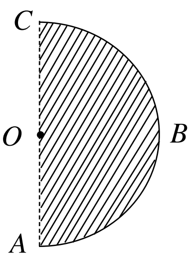

සමමිතියෙන්, ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය $G' = (\bar{x}', 0)$ ලෙස ගනිමු. ආස්තරයේ පෘෂ්ඨීක ඝනත්වය $\rho$ නම්,

$$\bar{x}' = \frac{\int_0^r \rho\pi x \,\frac{(x\sin\pi/2)}{\pi/2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^r \rho\pi x\,\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{[x^3/3]_0^r}{[x^2/2]_0^r}$$

$$= \frac{4r}{3\pi} \qquad \textbf{(30)}$$

$ABC$ සහ $ADC$ සහිත සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය $G$, සමමිති අක්ෂය මත පිහිටයි.
$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු.

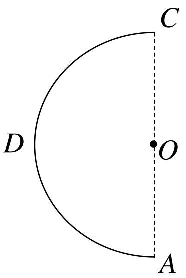
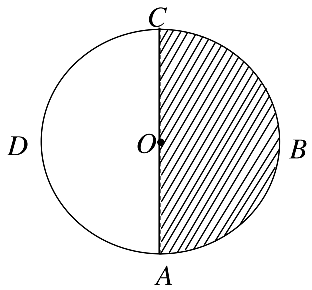
| **වස්තුව** | **ස්කන්ධය** | **ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට $O$ සිට දුර** |
|---|---|---|
|  | $\frac{1}{2}\pi r^2 \cdot \sigma$ | $\frac{4r}{3\pi}$ |



$$\bar{x} = \frac{\sum m_r x_r}{\sum m_r}$$

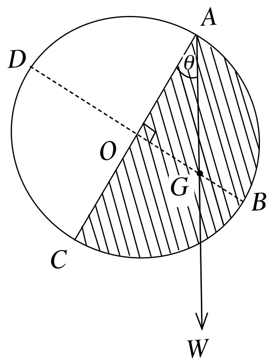
$$= \frac{\frac{1}{2}\pi r^2\sigma \cdot \frac{4r}{3\pi} - \pi rk \cdot \frac{2r}{k}}{\frac{\pi r}{2}(r\sigma + 2k)}$$

$$= \frac{4r}{3\pi}\cdot\frac{|r\sigma - 3k|}{(r\sigma + 2k)} \qquad \textbf{(20)}$$

| වස්තුව | ස්කන්ධය | ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට $O$ සිට දුර |
|---|---|---|
|  | $\pi r \cdot k$ | $-\dfrac{2r}{\pi}$ |
|  | $\dfrac{\pi r}{2}\,[r\sigma + 2k]$ | $\bar{x}$ |

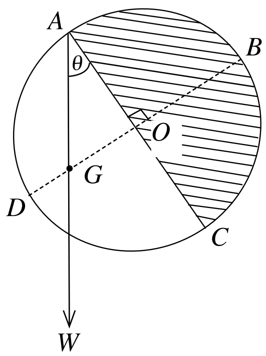
සංයුක්තය $A$ ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති විට,

$r\sigma > 3k$ විට




**(10)**

$r\sigma < 3k$ විට




**(10)**

$W$ යනු සංයුක්ත වස්තුවේ බරයි.

සමතුලිතතාව සඳහා $AG$ සිරස් විය යුතුය.

එවිට $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{OG}{OA}\right)$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{|r\sigma - 3k|}{3\pi\,(r\sigma + 2k)}\right] \qquad \textbf{(10)}$$

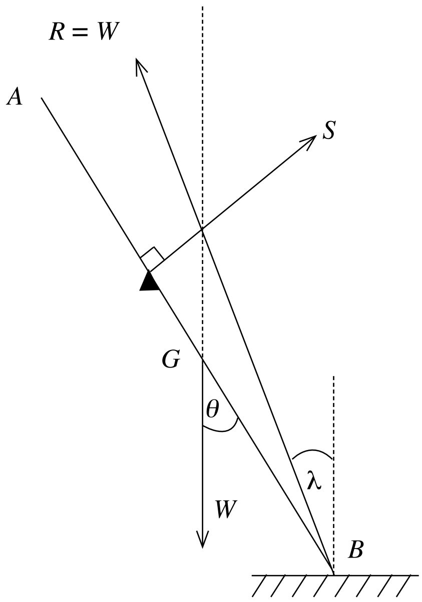
$A$ ට සිරස්ව පහළින් O පිහිටයි නම් එවිට $\theta = 0$ විය යුතුය.

(එනම් $O \equiv G$ විය යුතුය.)

$\Rightarrow\ r\sigma = 3k$

$\Rightarrow\ k : \sigma = r : 3$ **(10)** **[120]**

16. (b)




(10)

$$\frac{W}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta + \lambda)} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{S}{\sin\lambda}$$ (10)

$R = W$ බැවින්, $\sin[\frac{\pi}{2} - (\theta - \lambda)] = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$\cos(\theta - \lambda) = \cos\theta$

$\cos\theta\,\cos\lambda + \sin\theta\,\sin\lambda = \cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{1 - \cos\lambda}{\sin\lambda}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{\lambda}{2}}{2\sin\frac{\lambda}{2}\,\cos\frac{\lambda}{2}}$$

$= \tan\frac{\lambda}{2}$, $\lambda \neq 0$ බැවින්, $\sin\frac{\lambda}{2} \neq 0$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ බැවින්, $\theta = \frac{\lambda}{2}$ (10) **[30]**

17.(a) $A$ : ධීවර වෙළඳසලට යාම

$B$ : සතොස වෙළඳසලට යාම

$C$ : පොදු වෙළඳසලට යාම

$F$ : වඩාත්ම කැමති මාළු වර්ගය මිලට ගැනීම

$P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(C) = \frac{1}{5}$

$P(F|A) = \frac{1}{5}$, $P(F|B) = \frac{1}{2}$, $P(F|C) = \frac{3}{5}$

(i) $P(F) = P(A).P(F|A) + P(B).P(F|B) + P(C).P(F|C)$ **(10)**

$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}$

$= \frac{1}{25}[2 + 5 + 3]$

$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ **(10) [20]**

[ 18 වන පිටුව බලන්න

(ii) $P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(A/F') = \dfrac{P(A) \,.\, P(F'/A)}{P(F')} = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{8}{15}$ **(10)**

එලෙසම, $P(B/F',) = \frac{1}{3}$

$P(C/F',) = \frac{1}{3}$

$\therefore\ P(A/F') > P(B/F') = P(C/F')$

ධීවර වෙළඳසලට යාම නිසා ය. **(10)** **[20]**

(iii) $X$ : අඩු තරමින් දින දෙකකදීවත් වඩාත්ම කැමති මාළු වර්ගය මිලට ගැනීම

$P(X)$ = P(දවස් දෙකකදී මිලට ගැනීම) + P (දවස් තුනකදී මිලට ගැනීම)

$= {}^{3}C_{2}\,[P(F)]^2\,[1 - P(F)] + [P(F)]^3$ **(10)**

$= 3 \times \frac{4}{25} \times \frac{3}{5} + \frac{8}{125}$

$= \frac{36 + 8}{125}$

$= \frac{44}{125}$ **(10)** **[20]**

(iv) $A_1$ : පළමුවැන්නා ධීවර වෙළඳසලට යාම

$A_2$ : දෙවැන්නා ධීවර වෙළඳසලට යාම

$B_1$ : පළමුවැන්නා සතොස වෙළඳසලට යාම

$B_2$ : දෙවැන්නා සතොස වෙළඳසලට යාම

$C_1$ : පළමුවැන්නා පොදු වෙළඳසලට යාම

$C_2$ : දෙවැන්නා පොදු වෙළඳසලට යාම යැයි ගනිමු.

එවිට, $P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{5}$, $P(B_1) = P(B_2) = \frac{2}{5}$, $P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{5}$

$Y$ : ඔවුන් දෙදෙනාම එකම ස්ථානයකට යාම ලෙස ගනිමු.

එවිට $P(Y) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap C_2)$ **(10)**

$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$= \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{1}{25}$

$= \frac{9}{25}$ **(10)** **[20]**

(b) $x_i$ ; $i = 1, 2, 3, ..., n$ දත්ත සමූහයක,

මධ්‍යන්‍යය $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ **(10)**

සම්මත අපගමනය $s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ **(10)**

[ 19 වන පිටුව බලන්න

$u_i = a + bx_i \;;\; a, b > 0,\; i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a + b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{na}{n} + b\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$= a + b\bar{x}$$ **(10)**

$$s_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - a - b\bar{x})^2 = \frac{b^2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= b^2 s_x^2$$ **(10)**

$x_i \;;\; i = 1, 2, 3, \ldots, n$ $\qquad$ $y_i \;;\; i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$\bar{x} = 35,\; s_x = 4$ $\qquad$ $\bar{y} = 19,\; s_y = \frac{12}{5}$

$u_i = 70 + 3x_i$

$\bar{u} = 70 + 3\bar{x}$

$= 70 + 3 \times 35$

$= 175$ **(5)**

$s_u^2 = 3^2 \sigma_x^2$

$= 9 \times 16$

$s_u = 3 \times 4 = 12$ **(5)**

$u_i = a + by_i$

$\bar{u} = a + b\bar{y} \;\Rightarrow\; 175 = a + 19b \;\Rightarrow\; a + 19b = 175$ ———— (1)

$s_u^2 = b^2 s_y^2 \;\Rightarrow\; 144 = b^2 \cdot \frac{12^2}{5^2} \;\Rightarrow\; b^2 = 25$ ———— (2)

(1) සහ (2) න් $b = 5$ **(5)**

$a = 80$ **(5)**

$x_i = 55$ ට අනුරූප, $u_i$ පරිමාණය තුළ අගය $= 70 + 3 \times 55 = 235$

$y_i = 32$ ට අනුරූප, $u_i$ පරිමාණය තුළ අගය $= 80 + 5 \times 32 = 240$

$\therefore$ $y_i$ පරිමාණය තුළ 32 සඳහා $x_i$ පරිමාණය තුළ 55 ට ඇති අගයට වඩා වැඩි අගයක් $u_i$ පරිමාණය තුළ ඇත. **(10) [70]**

* * *