සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

නව/පැරණි නිර්දේශය – புதிய/பழைய பாடத்திட்டம் – New/Old Syllabus

NEW/OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2019 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2019 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2019

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 T I

28.08.2019 / 0830 – 1140

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

* இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் **1 - 10**), பகுதி **B** (வினாக்கள் **11 - 17**) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
* பகுதி **A :**
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
* பகுதி **B :**
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
* ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** இன் விடைத்தாளானது **பகுதி B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
* வினாத்தாளின் பகுதி **B** ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(11) உயர் கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர்: 1	
2	
மேற்பார்வை செய்தவர்	

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

பகுதி A

1. காரணிப்படுத்துக: $a^2(b-c)^3 + b^2(c-a)^3 + c^2(a-b)^3$.

2. $(x^3 - y^3)$ ஐ 7 வகுக்குமெனின், xRy இனால் நிறையெண் தொடை $\mathbb{Z}$ மீது வரையறுக்கப்படும் தொடர்பு R எனக் கொள்வோம். R ஆனது $\mathbb{Z}$ மீது ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பெனக் காட்டி, 0 இன் சமவன்மை வகுப்பை எழுதுக.

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

சுட்டெண் | | | | | | | |

0068

3. $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ எனக் கொள்வோம். f இன் வீச்சை எழுதி, $f^{-1}(x)$ ஐக் காண்க. $f\left(2f^{-1}(0)\right)$ ஐயும் காண்க.

4. $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$ எனக் காட்டுக.

5. கோடு $y = \frac{1}{3}x + 3a$ ஆனது பரவளைவு $y^2 = 4ax$ ஐ $AP = 10a$ ஆகுமாறுள்ள ஒரு புள்ளி P இல் தொடுமெனக் காட்டுக; இங்கு A ஆனது பரவளைவின் குவியம் ஆகும்.

முக்கோணி OAP இன் பரப்பளவு $3a^2$ எனவும் காட்டுக; இங்கு O ஆனது உற்பத்தியாகும்.

6. $a, b \in \mathbb{R}$ எனவும் $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} a\left(1 + e^{-\frac{1}{x}}\right) & , \quad x > 0 \text{ எனின்,} \\ 2 & , \quad x = 0 \text{ எனின்,} \\ \dfrac{\sqrt{1+bx} - 1}{x} & , \quad x < 0 \text{ எனின்,} \end{cases}$$

இனால் வரையறுக்கப்படும் சார்பு எனவும் கொள்வோம்.

$x = 0$ இல் $f(x)$ தொடர்ச்சியானது எனத் தரப்பட்டுள்ளது. a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

[பக். 5 ஐப் பார்க்க

7. $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+3 & , \quad x\leq 1 \text{ எனின்,} \\ 5x+2 & , \quad x>1 \text{ எனின்,} \end{cases}$

எனக் கொள்வோம். $x=1$ இல் $f(x)$ வகையிடத்தக்கது எனக் காட்டி, $x\in\mathbb{R}$ இற்கு $f'(x)$ ஐ எழுதுக. $f'(x)$ ஆனது $x=1$ இல் வகையிடத்தக்கதா?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx}-y\cot x+3\sin^2 2x=0$ ஐ $x=\frac{\pi}{4}$ ஆக இருக்கும்போது $y=1$ என்னும் நிபந்தனையின் கீழ்த் தீர்க்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. f, g ஆகியன ஆயிடை $[0,2]$ மீது வரையறுக்கப்படும் f', g ஆகிய இரண்டும் $[0,2]$ மீது தொடர்ச்சியாகவும் எல்லா $x \in [0,2]$ இற்கும் $xf'(x) = g(2-x)$ ஆகவும் இருக்குமாறு உள்ள மெய்ப் பெறுமானத்தைக் கொண்ட சார்புகளெனக் கொள்வோம். $f(2) = 1$ ஆகவும் $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ ஆகவும் இருப்பின், $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ ஐக் காண்க.

10. $r = 2\cos\theta$, $r(\cos\theta + \sin\theta) = 1$ ஆகிய முனைவாள்கூறுகளில் தரப்படும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பருமப்படியாக வரைக. அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிகளின் முனைவாள்கூறுகளைக் காண்க.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

නව/පැරණි නිර්දේශය – புதிய/பழைய பாடத்திட்டம் – New/Old Syllabus

NEW/OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2019 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2019 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2019

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 T II

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. ஓர் உற்பத்தி O பற்றிப் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளவாறு தானக் காவிகளை உடைய புள்ளிகளில் தாக்கும் மூன்று விசைகளை ஒரு தொகுதி கொண்டுள்ளது.

புள்ளி	தானக் காவி	விசை
A_1	$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$	$\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
A_2	$\mathbf{r}_2 = \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$	$\mathbf{F}_2 = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
A_3	$\mathbf{r}_3 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$\mathbf{F}_3 = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

உற்பத்தி O இல் $\pm\mathbf{F}_s, s = 1, 2, 3$ என்னும் விசைகளைப் புகுத்துவதன் மூலம் தரப்பட்டுள்ள தொகுதியானது உற்பத்தி O இல் தாக்கும் ஒரு தனி விசை $\mathbf{R} = \sum_{s=1}^{3} \mathbf{F}_s$ உடன் காவித் திருப்பம் $\mathbf{G} = \sum_{s=1}^{3} \mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_s$ ஐ உடைய ஓர் இணையாக ஒடுக்கப்படலாமெனக் காட்டுக.

$\mathbf{R}, \mathbf{G}$ ஆகிய காவிகளை $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ஆகியவற்றில் காண்க.

தொகுதியானது பருமன் $\sqrt{26}$ ஐ உடைய ஒரு தனி விளையுள் விசை $\mathbf{R}$ இற்குச் சமவலுவுள்ளது என்பதை **உய்த்தறிக.**

$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ ஆகியவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் தானக் காவி $\mathbf{r}_0$ ஐ உடைய ஒரு குறித்த புள்ளி A_0 இற் சந்திக்கின்றனவெனக் காட்டுக; இங்கு $\mathbf{r}_0$ ஆனது துணியப்பட வேண்டும். $\mathbf{F}_3$ இன் தாக்கக் கோடும் புள்ளி A_0 இனூடாகச் செல்கின்றது என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

தனி விளையுள் விசை $\mathbf{R}$ இன் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டை வடிவம் $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \gamma\mathbf{R}$ இல் எழுதுக.

இக்கோடு xy-தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க.

இதிலிருந்து, விளையுள் விசை $\mathbf{R}$ இன் தாக்கக் கோட்டின் தெக்காட்டின் சமன்பாடுகளை $\frac{x-6}{3} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z}{1}$ எனப் பெறலாமெனக் காட்டுக.

தரப்பட்டுள்ள விசைத் தொகுதி இருக்கும் தளத்தின் தெக்காட்டின் சமன்பாட்டை $x + 3z = 0$ எனப் பெறலாமென மேலும் காட்டுக.

12. AB ஆனது DC இற்குச் சமாந்தரமாகவும் $AB = 3a, DC = a$ ஆகவும் $B\hat{A}D = A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$ ஆகவும் உள்ள ஒரு சரிவகம் $ABCD$ இன் வடிவத்தில் இருக்கும் ஓர் அடர் ஓர் ஏகவினத் திரவத்தில், AB திரவத்தின் சுயாதீன மேற்பரப்பு மீது இருக்குமாறு, நிலைக்குத்தாக அமிழ்த்தப்படுகின்றது. அடர் $ABCD$ இன் அமுக்க மையம் AB இன் நடுப்புள்ளி E இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே தூரம் $\frac{3a}{5}$ இல் உள்ளதெனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த அடர் $ABCD$ இன் வடிவத்தில் உள்ள ஒரு கதவு AB கிடையாகவும் CD ஆனது AB இற்குக் கீழேயும் இருக்க ஒரு தாங்கியின் ஒரு நிலைக்குத்துப் பக்கத்தின் மீது செய்யப்படுகின்றது. கதவு CD வழியே ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. அடர்த்தி ρ ஐ உடைய ஓர் ஏகவினத் திரவம் தாங்கியில் மட்டம் AB இற்கு நிரப்பப்படுகின்றது. திரவம் தாங்கியினுள் இருக்குமாறு கதவை மூடி வைப்பதற்கு E இல் பிரயோகிக்க வேண்டிய மிகச் சிறிய விசையைக் காண்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

13. எஞ்சினின் மூலம் ஒரு நேர்க் கிடைப் பாதை வழியே தடைக்கு எதிரே ஒரு புகையிரதம் இழுத்துக்கொண்டு செல்லப்படும் அதே வேளை எந்த நேரத்திலும் தடை புகையிரதத்தின் உந்தத்தின் k மடங்காகும்; இங்கு k ஒரு மாறிலி. எஞ்சின் மாறா வலு $9Mkv_0^2$ இல் தொழிற்படுகின்றது; இங்கு M ஆனது எஞ்சினினதும் புகையிரதத்தினதும் மொத்தத் திணிவாகும்;

(i) புகையிரதம் அடையத்தக்க உயர்ந்தபட்சக் கதி $3v_0$ எனவும்

(ii) கதியை v_0 இலிருந்து $2v_0$ இற்கு அதிகரிக்கச் செய்வதற்குப் புகையிரதம் எடுக்கும் நேரம் $\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$ எனவும்

காட்டுக.

புகையிரதம் கதி U உடன் இயங்கும்போது அதன் வலு தொடுப்பகற்றப்படும் அதே வேளை மேற்குறித்த தடைக்கு மேலதிகமாக ஒரு மாறாத் தடுப்பு விசை F பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. வலு தொடுப்பகற்றப்பட்டு நேரம் $\frac{1}{k}\ln\left(\frac{F+MkU}{F}\right)$ இற்குப் பின்னர் புகையிரதம் நிற்குமெனக் காட்டுக.

14. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஓய்வில் இருக்கும் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் மேசை மீது உள்ள O என்ற நிலைத்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. நேரம் $t=0$ ஆக இருக்கும்போது, இழை மட்டுமட்டாக இறுக்கமாக இருக்க, துணிக்கை P ஆனது O இலிருந்து தூரம் a இல் இருக்கும் அதே வேளை துணிக்கை P ஆனது இழையின் தொடக்கக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான ஒரு திசையில் பருமன் $U=2\sqrt{\frac{ga}{3}}$ ஐ உடைய ஒரு வேகத்துடன் மேசை வழியே எறியப்படுகின்றது.

சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டையும் O பற்றிக் கோண உந்தக் காப்புக் கோட்பாட்டையும் பயன்படுத்துவதன் மூலம்

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = U^2\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{g}{a}(r-a)^2$$

எனக் காட்டுக.

(i) இழையின் உயர்ந்தபட்ச நீளம் $2a$ எனவும் இக்கணத்தில் இழையின் இழுவை mg எனவும்,

(ii) இக்கணத்தில் துணிக்கையின் கதி $\frac{U}{2}$ எனவும்

உய்த்தறிக.

$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\neq 0$ ஆக இருக்கும்போது $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$ ஐ r, a ஆகியவற்றிற் காண்க.

15. (i) திணிவு M ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய ஒரு சீரான பொள் வட்ட உருளையின் அச்சுப் பற்றிய சடத்துவத் திருப்பம் Ma^2 எனவும்

(ii) திணிவு m ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய ஒரு சீரான வட்டத் தட்டின் மையத்தினூடாக உள்ள, அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சைப் பற்றிய சடத்துவத் திருப்பம் $\frac{1}{2}ma^2$ எனவும்

காட்டுக.

ஆரை a ஐயும் நீளம் $3a$ ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்டப் பொள் உருளையின் இரு முனைகளுடனும் ஒவ்வொன்றினதும் ஆரை a ஆகவுள்ள சீரான வட்டத் தட்டுகள் இரண்டைப் பொருத்துவதன் மூலம் ஓர் அடைத்த பாத்திரம் C ஆனது ஒரு மெல்லிய சீரான உலோகத் தகட்டிலிருந்து செய்யப்பட்டுள்ளது. பாத்திரம் C இன் அச்சைப் பற்றி அதன் சுழிப்பாரை k ஆனது $k^2 = \frac{7}{8}a^2$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

பாத்திரமானது கிடையுடன் சாய்வு α இல் உள்ள ஒரு கரடான தளத்தின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக, அச்சு கிடையாக இருக்க, தளத்தில் நழுவாமல் கீழ்நோக்கி உருளுகின்றது.

இவ்வியக்கத்தில் பாத்திரம் C இன் ஆர்முடுகல் f ஆனது $f=\frac{8}{15}g\sin\alpha$ இனால் தரப்படுகின்றது எனவும் பாத்திரத்திற்கும் தளத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆனது $\mu>\frac{8}{15}\tan\alpha$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக இருக்க வேண்டும் எனவும் காட்டுக.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

16. (*a*) ஓர் ஐந்து நிமிட ஆயிடையின்போது ஒரு குறித்த வாகனத் தரிப்பிடத்திலிருந்து வெளியேறும் வாகனங்களின் எண்ணிக்கை X எனக் கொள்வோம். X இற்குப் பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் உள்ளதெனக் கருதுவோம்.

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	p	$2p$	$3p$	$3p$	$2p$	p

p இன் பெறுமானத்தையும் X இன் எதிர்பார்த்த பெறுமானம் $E(X)$ ஐயும் காண்க.

X இன் நியம விலகல் $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ எனக் காட்டுக.

எழுமாற்று மாறி Y ஆனது $Y = 2X + 3$ இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றது. Y இன் எதிர்பார்த்த பெறுமானம் $E(Y)$ ஐயும் Y இன் நியம விலகலையும் காண்க.
மேலும் $P[Y \geq E(Y)]$ இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

(*b*) ஒரு நுண் அறுவைச் சிகிச்சையிலிருந்து ஒரு நோயாளி குணமடைவதற்கான நிகழ்தகவு $\dfrac{2}{5}$ ஆகும். இந்த அறுவைச் சிகிச்சைக்கு உட்பட்ட 5 நோயாளிகள் எழுமாற்றாகக் கண்காணிக்கப்பட்டனர்.

(i) குறைந்தபட்சம் 3 நோயாளிகளேனும் குணமடைவதற்கான,

(ii) செப்பமாக 2 நோயாளிகள் குணமடைவதற்கான,

(iii) நோயாளி எவரும் குணமடையாமைக்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

17. (*a*) ஒரு குறித்த வகை மின் விளக்கின் ஆயுட்காலம் T மணித்தியாலமானது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} e^{-\left(\frac{1}{b}\right)t} , & t \geq 0 \\ 0 & \text{அவ்வாறு இராதபோது} \end{cases}$$

இனால் மாதிரிப்படுத்தப்படலாம்; இங்கு a, b ஆகியன நேர் மாறிலிகள்.
$a = b$ எனக் காட்டுக.

அவ்வகை மின் விளக்குகளில் 40% இன் ஆயுட்காலம் 2000 மணித்தியாலங்களிலும் கூடியதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. a, b ஆகியவற்றின் பொதுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

T இன் பரம்பற் சார்பைக் கண்டு, **அதிலிருந்து,** $P(T > t + c | T > c) = P(T > t)$ எனக் காட்டுக; இங்கு $t \geq 0$ உம் c ஒரு நேர் மாறிலியுமாகும்.

(*b*) ஓர் அதிவேக வீதியில் ஒரு குறித்த புள்ளி A ஐக் கடந்து செல்லும் வாகனங்களின் கதிகள் செவ்வனாகப் பரம்பியுள்ளனவெனக் கருதலாம். புள்ளி A ஐக் கடந்து செல்லும் வாகனங்களில் 95% ஆனவை 85 km h^{-1} இலும் குறைந்த கதியில் செல்கின்றன எனவும் 10% ஆனவை 55 km h^{-1} இலும் குறைந்த கதியில் செல்கின்றன எனவும் நோக்கல்கள் காட்டுகின்றன.

(i) புள்ளி A ஐக் கடந்து செல்லும் வாகனங்களின் சராசரிக் கதியைக் காண்க.

(ii) 70 km h^{-1} இலும் கூடிய கதியில் செல்லும் வாகனங்களின் சதவீதத்தைக் காண்க.

* * *

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

නව/පැරණි නිර්දේශය – புதிய/பழைய பாடத்திட்டம் – New/Old Syllabus

NEW/OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2019 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2019 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2019

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 T II

31.08.2019 / 1300 – 1610

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண் | | | | | | | |

அறிவுறுத்தல்கள் :

✳ இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் 1 - 10), பகுதி **B** (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.

✳ பகுதி **A :**
எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

✳ பகுதி **B :**
ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.

✳ ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி **A** இன் விடைத்தாளானது பகுதி **B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.

✳ வினாத்தாளின் பகுதி **B** ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

✳ புள்ளிவிபர அட்டவணை வழங்கப்படும்.

✳ g புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(11) உயர் கணிதம் II		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர்: 1	
2	
மேற்பார்வை செய்தவர்	

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

பகுதி A

1. ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A, B, C என்னும் மூன்று புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}, 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}, 7\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}+\beta\mathbf{k}$ ஆகும். காவி $\overrightarrow{OC}$ ஆனது தளம் OAB இற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு α, β ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. பருமன் $6\,\mathrm{N}$ ஐக் கொண்ட ஒரு விசை $\mathbf{F}$ ஆனது காவிச் சமன்பாடு $\mathbf{r}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ ஐ உடைய கோடு வழியே தாக்குகின்றது; இங்கு λ ஓர் எண்ணிப் பரமானம். தூரங்கள் மீற்றரில் அளக்கப்படுமாயின், உற்பத்தி பற்றி $\mathbf{F}$ இன் காவித் திருப்பம் $\mathbf{M}$ இன் பருமன் $4\sqrt{5}\ \mathrm{N\,m}$ எனவும் $\mathbf{M}\cdot\mathbf{k}=0$ எனவும் காட்டுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

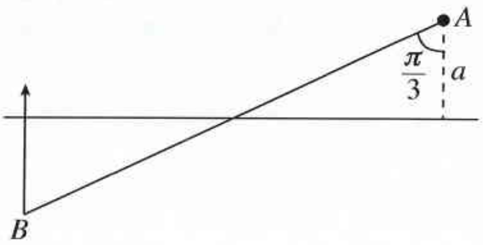
....

....

....

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

3. நீளம் $4a$ உம் அடர்த்தி ρ உம் உள்ள சீரான கோல் AB இன் முனை A அடர்த்தி $\sigma\left(<\frac{4\rho}{3}\right)$ உள்ள ஓர் ஏகவினத் திரவத்தின் சுயாதீன மேற்பரப்பின் மேல் a உயரத்திலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஐ ஆக்கிக்கொண்டு, முனை B உடன் இணைக்கப்பட்ட ஓர் இலேசான நிலைக்குத்தான நீட்டமுடியாத இழையின் மூலம் நாப்பத்தில் பேணப்படுகின்றது. இழையின் இழுவையைக் காண்க.

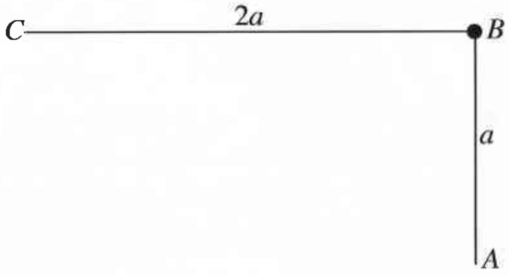


4. ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி பற்றி நேரம் t இல் ஒரு துணிக்கை P இன் தானக் காவி $\mathbf{r} = a\,(\omega t - \sin \omega t)\,\mathbf{i} + a\,(\omega t - \cos \omega t)\,\mathbf{j}$ எனத் தரப்படுகின்றது. இங்கு a, ω ஆகியவை நேர் மாறிலிகளாக இருக்கும் அதே வேளை $0 \leq \omega t \leq \pi$ ஆகும். நேரம் t இல் P இன் வேகக் காவி $\mathbf{v}$, ஆர்முடுகல் காவி $\mathbf{f}$ ஆகியவற்றைக் காண்க. $\mathbf{v}.\mathbf{f} = 0$ ஆக இருக்கும் நேரத்தைக் கண்டு, அக்கணத்தில் P இன் கதி $a\omega\left(\sqrt{2}-1\right)$ எனக் காட்டுக.

[பக். 4 ஐப் பார்க்க

5. முறையே $m, 2m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய P, Q என்னும் இரு சிறிய ஒப்பமான கோளங்கள் ஒரு கிடை மேசை மீது இயங்கி ஒன்றுடன் ஒன்று மோதுகின்றன. மொத்தலுக்குச் சற்று முன்னர் P, Q ஆகியவற்றின் வேகங்கள் முறையே $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ஆகும். P இற்கும் Q இற்கும் இடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{3}$ ஆகும். மொத்தலுக்குச் சற்று பின்னர் P, Q ஆகியவற்றின் வேகங்களைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.

6. திணிவு m உம் நீளம் a உம் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB உடன் திணிவு $2m$ உம் நீளம் $2a$ உம் உள்ள ஒரு சீரான கோல் BC ஐ $A\hat{B}C$ ஒரு செங்கோணமாக இருக்குமாறு விறைப்பாக இணைப்பதன் மூலம் ஒரு சட்டப்படல் உருவாக்கப்படுகின்றது. B இனூடாகச் சட்டப்படலின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான கிடை அச்சுப் பற்றிச் சட்டப்படல் சுயாதினமாகச் சுழலலாம். BC கிடையாகவும் B இற்குக் கீழே A உம் இருக்கும் அமைவில் சட்டப்படல் வைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. சுழற்சி அச்சைப் பற்றிச் சட்டப்படல் ABC இன் சடத்துவத் திருப்பம் $3ma^2$ எனக் கொண்டு, B இற்குக் கீழே C இருக்க, BC நிலைக்குத்தாக இருக்கும்போது சட்டப்படலின் கோண வேகத்தைக் காண்க.



7. ஒரு பெட்டியில் நிறம் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமனான 10 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் 15 பச்சை நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாகப் பிரதி வைப்புடன் பந்துகள் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன.

(i) 3 ஆவது எடுப்பின்போது அல்லது அதற்கு முன்பாக முதலாவது சிவப்புப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கணிக்க.

(ii) வெளியே எடுக்கப்படும் முதல் 5 பந்துகளும் சிவப்பானவை எனத் தரப்படும்போது 8 ஆவது எடுப்பின் போது முதலாவதாகப் பச்சைப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவைக் கணிக்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. ஒரு குறித்த ஆவணத்தின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள அச்சீட்டு வழுக்களின் எண்ணிக்கையானது இடை 2.1 உடன் ஒரு புவசோன் பரம்பலைப் பின்பற்றுகின்றது. எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த ஒரு பக்கத்தில்

(i) செப்பமாக 1 அச்சீட்டு வழு,

(ii) குறைந்தபட்சம் 3 அச்சீட்டு வழுக்களேனும்

இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. $f(x) = \begin{cases} kx\left(a - x^2\right), & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{வேறு விதமாக} \end{cases}$

எனக் கொள்வோம்.

இடை $\frac{8}{15}$ உள்ள ஒரு தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆக இருக்குமாறு k, a ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க. X இன் நியம விலகல் $\frac{\sqrt{11}}{15}$ எனக் காட்டுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறி X இன் திரள் பரம்பற் சார்பு $F(x)$ ஆனது $x = 1, 2, 3, 4$ இற்கு $F(x) = \frac{1}{16}\left(8x - x^2\right)$ இனால் தரப்பட்டுள்ளது. X இன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பைப் பெற்று, $E(X)$ ஐக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது /All Rights Reserved]

නව/පැරණි නිර්දේශය – புதிய/பழைய பாடத்திட்டம் – New/Old Syllabus

NEW/OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2019 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2019 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2019

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 T I

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (*a*) A, B, C ஆகியன ஓர் அகிலத் தொடை S இன் தொடைப்பிரிவுகளெனக் கொள்வோம். நீர் பயன்படுத்தும் தொடை அட்சரகணிதத்தின் யாதாயினும் ஒரு பேறைத் தெளிவாகக் குறிப்பிட்டு,

(i) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$,

(ii) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

எனக் காட்டுக.

ஓர் உதாரணத்தைப் பயன்படுத்தி $A\setminus(B\cup C)\neq(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ எனக் காட்டுக.

(*b*) ஒரு போட்டியில், ஒரு பாடசாலை மூன்று வெவ்வேறு கூற்றங்களில் (categories) பதக்கங்களைப் பின்வருமாறு வழங்குகின்றது:

45 பதங்கங்கள் நடனத்திற்காக வழங்கப்பட்டன,
21 பதங்கங்கள் பாட்டிற்காக வழங்கப்பட்டன,
27 பதங்கங்கள் விளையாட்டிற்காக வழங்கப்பட்டன.

இப்பதக்கங்கள் எல்லாமாக 54 பெறுநர்களுக்கு வழங்கப்பட்டும் 13 நபர்கள் மாத்திரம் எல்லா மூன்று கூற்றங்களிலும் பதக்கங்களை பெற்றும் இருப்பின், இக்கூற்றங்களில் செப்பமாக இரண்டில் எத்தனை நபர்கள் பதக்கங்களைப் பெற்றனர்?

12. (*a*) $a, b, c\in\mathbb{R}^+$ எனக் கொள்வோம்.

கூட்டலிடை - பெருக்கலிடைச் சமமின்மையைப் பயன்படுத்தி, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,

(i) $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6$,

(ii) $x^2\left(1+y^2\right)+y^2\left(1+z^2\right)+z^2\left(1+x^2\right)\geq 6xyz$

எனக் காட்டுக.

(*b*) உருமாற்றம் $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ஆனது xy-தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளை $x'y'$-தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளாகப் படமாக்குகின்றது. மேற்குறித்த உருமாற்றத்தின் கீழ் கோடு $y=mx+c$, $(m\neq\frac{2}{3}$, $c\neq 0)$ மாற்றமிலியாக அமையுமாறு m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$A\equiv(c,0)$, $B\equiv(0,c)$ ஆகியன xy-தளத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளெனக் கொள்வோம். இவ்வுருமாற்றத்தின் கீழ் அவற்றின் A', B' ஆகிய விம்பங்களின் ஆள்கூறுகளைக் கண்டு, A', B' ஆகிய புள்ளிகள் கோடு $x'+y'=c$ மீது இருக்குமென வாய்ப்புப் பார்க்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

13. ஒரு நேர் நிறையெண் சுட்டிக்கு **த மோய்வரின் தேற்றத்தைக்** கூறி நிறுவுக.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி,

(i) $\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$,

(ii) $\sin 5\theta = \sin^5\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos^4\theta\sin\theta$

எனக் காட்டுக.

$\tan 5\theta = \dfrac{\tan\theta(\tan^4\theta - 10\tan^2\theta + 5)}{(1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta)}$ ஐ **உய்த்தறிக.**

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ இற்குச் சமன்பாடு $\tan 5\theta = 0$ ஐத் தீர்த்து, $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, $\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ ஆகியன சமன்பாடு

$x^2 - 10x + 5 = 0$ இன் மூலங்களெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sec^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \sec^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 12$ எனக் காட்டுக.

14. (*a*) C_1 , C_2 ஆகிய வளையிகள் முறையே $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $y = \dfrac{4x}{1+x}$, $y = \dfrac{2}{3}x^2$ ஆகியவற்றினால் தரப்படுகின்றனவெனக் கொள்வோம். C_1 , C_2 ஆகியவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகியவற்றை (எவையேனும் இருப்பின்) தெளிவாகக் காட்டி C_1, C_2 ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே உருவில் பரும்படியாக வரைக. C_1, C_2 ஆகியவற்றினால் உள்ளடைக்கப்பட்ட பரப்பளவைக் காண்க.

C_1, C_2 ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்பட்ட பரப்பளவை x-அச்சுப் பற்றி 4 - செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவையும் காண்க.

(*b*) வகையீட்டுச் சமன்பாடு தீர்க்க: $2x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy + y^2 = 0$ ஐத் தீர்க்க.

15. (*a*) $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^n(x+\alpha)\,dx$ எனக் கொள்வோம், இங்கு α ஒரு மெய்ம் மாறிலியும் n ஆனது $n \geq 2$ ஆகுமாறுள்ள ஒரு நிறையெண்ணும் ஆகும்.

$n \geq 2$ இற்கு $nI_n = (n-1)\,I_{n-2}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)^6 dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*b*) $y = \tan(e^{2x} - 1)$ எனக் கொள்வோம்.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\dfrac{dy}{dx}\left(1 + ye^{2x}\right)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, y இன் மக்குளோரின் தொடர் விரியை x^4 இடம்பெறும் உறுப்பு (உட்பட) வரைக்கும் காண்க.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

16. நீள்வளையம் $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ இற்குப் புள்ளி (x_1, y_1) இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$ எனக் காட்டுக.

நீள்வளையத்திற்கு மையவகற்சிக் கோணம் θ ஐ உடைய புள்ளி P இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டினை **உய்த்தறிந்து** நீள்வளையத்திற்குப் புள்ளி P இல் உள்ள செவ்வன் $(a \sec \theta)x-(b \operatorname{cosec} \theta)\, y=a^2-b^2$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

OX, OY அச்சுகளைத் தொடலி சந்திக்கும் புள்ளிகள் முறையே $T,\ T'$ எனக் கொள்வோம். அத்துடன் OX, OY அச்சுகளை செவ்வன் சந்திக்கும் புள்ளிகள் முறையே N, N' எனவும் கொள்வோம்.

(i) θ மாறுகையில் NN' இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கின் சமன்பாடு $4(a^2x^2+b^2y^2)=(a^2-b^2)^2$ எனக் காட்டுக.

(ii) TT', NN' ஆகிய கோடுகள் இரண்டு ஆள்கூற்று அச்சுகளுடனும் சமமாய்ச் சாய்திருக்கும்போது மையவகற்சிக் கோணம் $\theta \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இச்சந்தர்ப்பத்தில் $(TT')\,(NN')$ ஐ $a,\ b$ ஆகியவற்றில் காண்க.

17. (a) $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{2+\cos 2x}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $x \in \mathbb{R}$ இற்கு $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \le f(x) \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $0 \le x \le \pi$ இற்கு $y=f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

(b) பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ள e^{-x^2} இன் பெறுமானங்களுடன் **சிம்சனின் நெறியைப்** பயன்படுத்தி, $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ இற்குரிய ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

x	0	0.25	0.50	0.75	1
e^{-x^2}	1	0.9394	0.7788	0.5698	0.3679

$\int_0^1 e^{(\ln 2-9x^2)}\,dx$ இற்கு ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தை **உய்த்தறிக**.

* * *