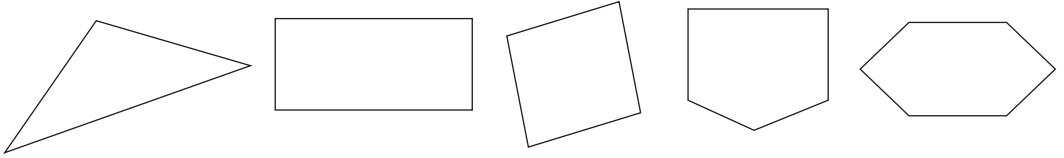


இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- இரு தள உருவங்கள் ஒருங்கிசைவதை இனங்காணவும்
- இரு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைத் தேவையான உறுப்புகளை இனங்காணவும்
- முக்கோணிகளின் ஒருங்கிசைவைக் கொண்டு ஏறிகளை நிறுவவும்

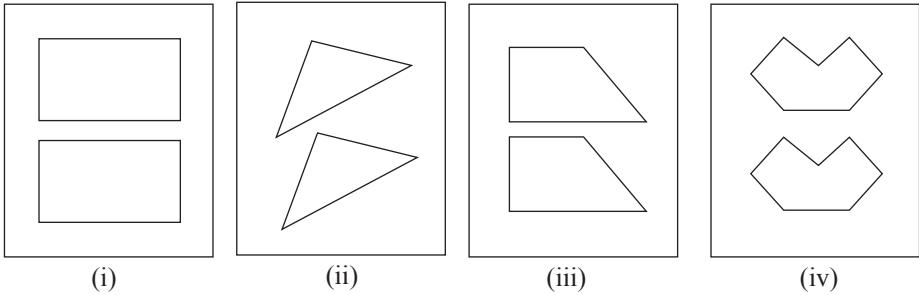
தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

இரு தள உருவங்களின் ஒருங்கிசைவு



மேற்குறித்த உருவங்களைப் பரிசீலிக்கும்போது அவை எல்லாம் நேர்கோட்டுத் துண்டங்களினால் அமைக்கப்பட்டுள்ள மூடிய தள உருவங்கள் என்பது தெளிவாகும். அத்தகைய உருவங்கள் நேர்கோட்டுத் தள உருவங்கள் எனப்படும். கோணங்களும் பக்கங்களும் அவ்வுருவங்களின் உறுப்புகள் எனப்படும்.

கீழே (i) தொடக்கம் (iv) வரையுள்ள உருவங்களில் தரப்பட்டுள்ள வடிவத்திலும் அளவிலும் ஒத்த ஒவ்வொரு நேர்கோட்டுத் தள உருவச் சோடியிலும் உள்ள இரு தள உருவங்களையும் ஒன்றோடொன்று பொருந்தச் செய்யலாம்.

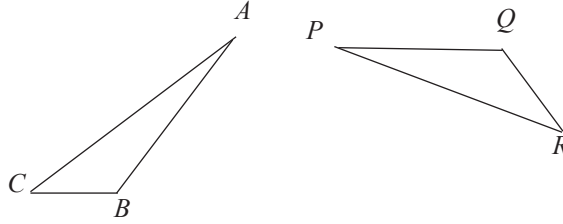


ஒன்றுடனொன்று பொருந்தச் செய்யக்கூடிய தள உருவச் சோடி ஒருங்கிசையும் தள உருக்கள் என அழைக்கப்படும். இப்பாடத்தில் ஒரு முக்கோணிச் சோடியின் ஒருங்கிசைவு பற்றிக் கவனம் செலுத்தப்படுகிறது.

5.1 இரு முக்கோணிகளின் ஒருங்கிசைவு

ஒரு முக்கோணியில் ஆறு உறுப்புகள் உள்ளன. அவை மூன்று பக்கங்களும் மூன்று கோணங்களும் ஆகும்.

பின்வரும் ABC , PQR என்னும் இரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றனவெனக் கொள்வோம். அவ்விரு முக்கோணிகளையும் ஒன்றன்மீதொன்றாக வைத்துப் பொருந்தச் செய்யும்போது AB உடன் PQ வும் AC உடன் PR உம் BC உடன் RQ வும் பொருந்துகின்றனவெனக் கொள்வோம். அப்போது இரு முக்கோணிகளிலும் AB இற்கு ஒத்த பக்கம் PQ எனவும் AC இற்கு ஒத்த பக்கம் PR எனவும் BC இற்கு ஒத்த பக்கம் QR எனவும் கூறப்படும். இவ்வாறே $\hat{BAC}$ இற்கு ஒத்த கோணம் $\hat{QPR}$ எனவும் $\hat{ABC}$ இற்கு ஒத்த கோணம் $\hat{PQR}$ எனவும் $\hat{ACB}$ இற்கு ஒத்த கோணம் $\hat{PRQ}$ எனவும் கூறப்படும்.



இதற்கேற்ப ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகும்.

இரண்டு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைகின்றன என்பது “ $\equiv$ ” என்னும் குறியீட்டினால் காட்டப்படும். உதாரணமாக ABC , PQR ஆகிய இரண்டு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையுமெனின் அது $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ என எழுதப்படும்.

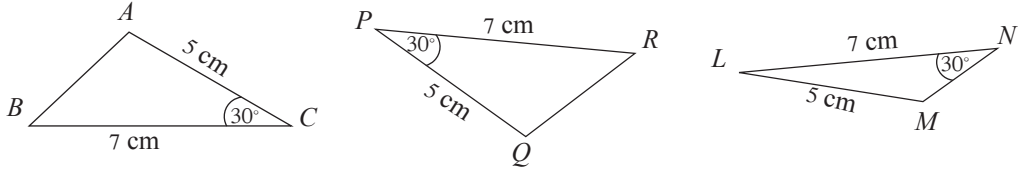
ஒரு முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைவதற்கு மேற்குறித்தவாறு ஒவ்வொரு முக்கோணியினதும் ஆறு உறுப்புகளும் வேறொரு முக்கோணியின் ஆறு உறுப்புகளுக்கும் சமமெனக் காட்டல் அவசியமன்று. அதிலும் குறைவான எண்ணிக்கையான மூன்று உறுப்புகளைச் சமனெனக் காட்டல் போதுமானது. ஆயினும் ஒரு முக்கோணியின் எவையேனும் மூன்று உறுப்புகள் இன்னுமொரு முக்கோணியின் எவையேனும் மூன்று உறுப்புகளுக்கு சமனானதால் மட்டும் இரண்டு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைவதில்லை. சில சந்தர்ப்பங்களில் மாத்திரம் ஒரு முக்கோணியின் மூன்று உறுப்புகளும் இன்னுமொரு முக்கோணியின் மூன்று உறுப்புகளுக்குச் சமனாகும்போது எஞ்சிய உறுப்புகளும் சமனாகி இரண்டு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையும். அவ்வாறான நான்கு சந்தர்ப்பங்கள் உண்டு. அந்நான்கு சந்தர்ப்பங்களையும் பற்றி இப்போது கவனிப்போம்.

(a) முதலாவது சந்தர்ப்பம்

ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களும் அடை கோணமும் வேறொரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களுக்கும் அடை கோணத்திற்கும் சமமாக இருக்கும் சந்தர்ப்பம்.

செயற்பாடு

இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 cm, 7 cm ஆகவும் ஒரு கோணத்தின் பெறுமானம் 30° ஆகவும் உள்ள மூன்று முக்கோணிகள் கீழே காணப்படுகின்றன.



- முக்கோணி ABC யை ஒரு திசுத் தாளில் பிரதிசெய்து வெட்டுக.
- வெட்டிய முக்கோணி PQR முக்கோணி LMN உடன் பொருந்துகின்றதாவெனப் பரீட்சிக்க.
- அதற்கேற்ப முக்கோணி ABC உடன் ஒருங்கிசையும் முக்கோணியைத் தெரிந்தெடுக்க.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்ப முக்கோணி ABC உடன் முக்கோணி PQR மாத்திரம் ஒருங்கிசைகின்றமை தெளிவாகும். எனினும், முக்கோணி ABC யிற்குச் சமமான மூன்று உறுப்புகள் மற்றைய இரு முக்கோணிகளிலும் உள்ளன. முக்கோணி ABC ஆனது முக்கோணி PQR உடன் ஒருங்கிசைந்து, முக்கோணி LMN உடன் ஏன் ஒருங்கிசையாமல் இருக்கின்றது என்பது பற்றி நீங்கள் சிந்தித்துப் பார்த்தீர்களா? முக்கோணி ABC யில் தரப்பட்டுள்ள கோணம் 30° , 5 cm, 7 cm நீளமுள்ள இரு பக்கங்களுக்கிடையே அமைந்துள்ளது. முக்கோணி PQR இல் அது அவ்வாறேயாகும். ஆனால், முக்கோணி LMN இல் கோணம் 30° ஆனது அவ்வாறு 5 cm, 7 cm நீளமுள்ள பக்கங்களுக்கிடையே இருக்கவில்லை. முக்கோணி ABC ஆனது முக்கோணி PQR உடன் ஒருங்கிசை கின்றமைக்கும் LMN உடன் ஒருங்கிசையாமைக்கும் காரணம் இதுவேயாகும். முக்கோணி ABC யின் இரு பக்கங்களும் அடைகோணமும் முக்கோணி PQR இன் இரு பக்கங்களுக்கும் அடைகோணத்திற்கும் சமமாக இருப்பினும் முக்கோணி LMN இல் அடை கோணத்திற்கு சமமாக இல்லை. ஆகவே முக்கோணி ABC உம் முக்கோணி LMN உம் ஒருங்கிசையவில்லை என்பதை அறிந்து கொள்ளலாம்.

குறிப்பு : இங்கு 30° ஆகவுள்ள கோணம் $\hat{A}CB$ ஆனது AC, BC ஆகிய பக்கங்களின் அடைகோணம் எனப்படும். இவ்வாறே, முக்கோணி PQR இல் $\hat{R}PQ$ என்பது PR, PQ ஆகிய பக்கங்களின் அடைகோணம்.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டினூடாகப் பெற்ற விளைவுகள் வெளிப்படை உண்மைகள் என அழைக்கப்படும்.

ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களும் அடைகோணமும் வேறொரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களுக்கும் அடைகோணத்திற்கும் சமமெனின், அம்முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசையும்.

இவ்வாறு ஒரு முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைவதைக் காட்டுதல் **ப.கோ.ப.** சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைகின்றது எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடப்படும்.

மேலே குறிப்பிட்ட சந்தர்ப்பத்திற்கேற்பத் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு ABC , PQR ஆகிய முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றதெனப் பின்வருமாறு வகை குறிக்கலாம்.

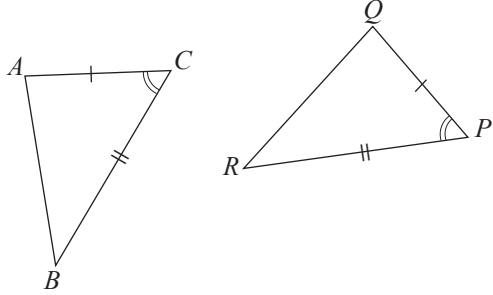
ABC , PQR ஆகிய முக்கோணிகளில்

$$AC = PQ \quad (\text{தரப்பட்டுள்ளது})$$

$$\hat{ACB} = \hat{RPQ} \quad (\text{தரப்பட்டுள்ளது})$$

$$BC = PR \quad (\text{தரப்பட்டுள்ளது})$$

$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle PQR \quad (\text{ப.கோ.ப.})$$

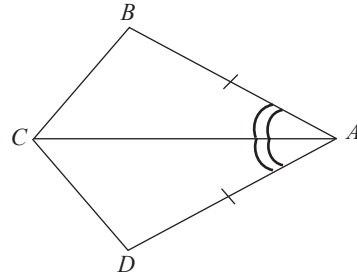


மேற்குறித்த முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றமையால், எஞ்சியுள்ள ஒத்த உறுப்புகளும் சமமாகும்.

அதாவது, சமமென அறியப்பட்ட $\hat{ACB}$, $\hat{RPQ}$ ஆகிய கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள AB , QR ஆகிய பக்கங்களும் சமமாகும். சமமென அறியப்பட்ட AC , PQ ஆகிய பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள ABC , QRP ஆகிய கோணங்களும் சமமாகும். சமமென அறியப்பட்ட BC , PR பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள $\hat{CAB}$, $\hat{PQR}$ ஆகிய கோணங்களும் சமமாகும். இப்போது ஓர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

உதாரணம் 1

உருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ எனவும் நிறுவுக. ஒருங்கிசைவான முக்கோணிகளின் மற்றைய ஒத்த உறுப்புக்களைத் தருக.



நிறுவல் :

ABC, ACD ஆகிய முக்கோணிகளில்

$AB = AD$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\hat{BAC} = \hat{CAD}$ (தரப்பட்டுள்ளது)

AC (பொது)

$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (ப.கோ.ப.)

ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளில் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்,

$BC = CD$

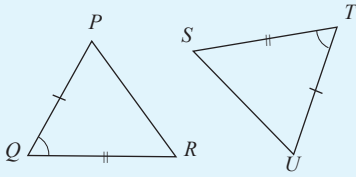
$\hat{ABC} = \hat{ADC}$

$\hat{ACB} = \hat{ACD}$

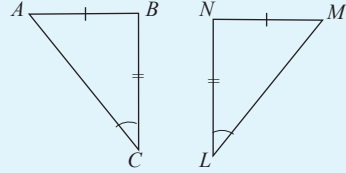
பயிற்சி 5.1

1. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒருங்கிசைவைக் காட்டுவதற்கு ப.கோ.ப சந்தர்ப்பம் பின்வரும் எம்முக்கோணிச் சோடிகளுக்குப் பிரயோகிக்கப்படலாமெனத் துணிக. அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் உரிய முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைகின்றனவென நிறுவி சமமாகவுள்ள ஏனைய ஒத்த உறுப்புச் சோடிகளையும் எழுதுக.

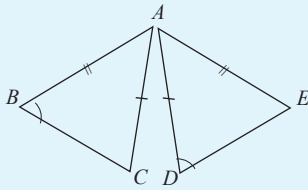
a.



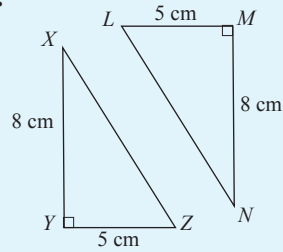
b.



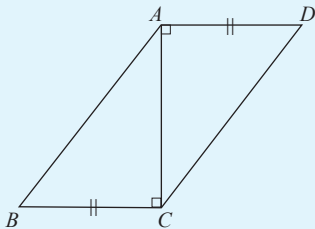
c.



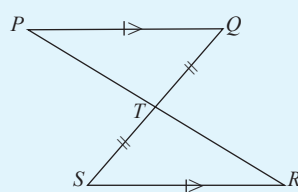
d.



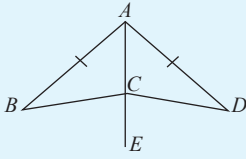
e.



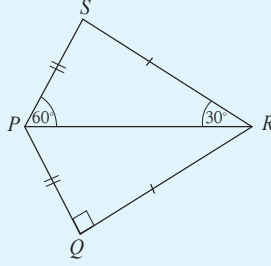
f.



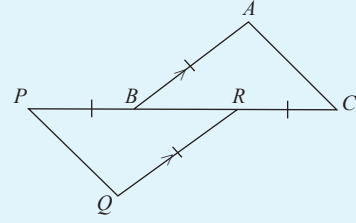
g.



h.



i.



2. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்குமுரிய முக்கோணிகளின் பரும்படிப் படங்களை வரைக. அம்முக்கோணிச் சோடிகளுக்கிடையே ஒருங்கிசையும் முக்கோணிச் சோடிகளைத் தெரிந்தெடுத்து, அவற்றின் சமமாகவுள்ள ஏனைய ஒத்த உறுப்புகளை எழுதுக.

(i) PQR , XYZ ஆகிய முக்கோணிகளில்

$$PQ = XZ, QR = XY, \angle R = \angle Z.$$

(ii) ABC , LMN ஆகிய முக்கோணிகளில்

$$AC = LN, BC = LM, \angle B = \angle M = 50^\circ.$$

(iii) DEF , STU ஆகிய முக்கோணிகளில்

$$EF = TU, DF = SU, \angle F = \angle S.$$

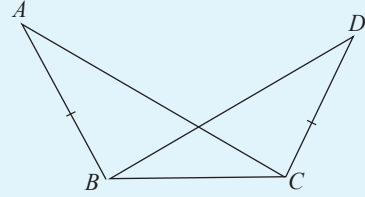
(iv) ABC , PQR ஆகிய முக்கோணிகளில்

$$BC = PQ, \angle B = \angle P, \angle C = \angle R.$$

3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $AB = DC$, $\angle B = \angle C$ ஆகும்.

(i) $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ எனவும்

(ii) $AC = BD$ எனவும் நிறுவுக.

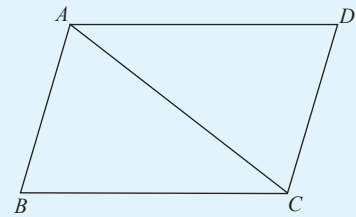


4. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் AD , BC ஆகிய பக்கங்கள் நீளத்தில் சமனானவையும் சமாந்தரமானவையும் ஆகும்.

(i) $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ எனவும்

(ii) $AB = DC$ எனவும்

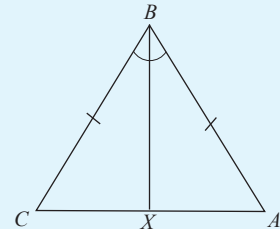
(iii) AB யும் CD யும் சமாந்தரமாகும் எனவும் நிறுவுக.



5. முக்கோணி ABC யில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு

(i) $\triangle ABX \equiv \triangle CBX$ எனவும்

(ii) $\angle AXB = 90^\circ$ எனவும் நிறுவுக.



6. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் AC , BD ஆகிய மூலைவிட்டங்கள் O இல் இடைவெட்டுகின்றன.

(i) $\triangle AOD \equiv \triangle BOD$ எனவும்

(ii) AD , BC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவை எனவும் நிறுவுக.

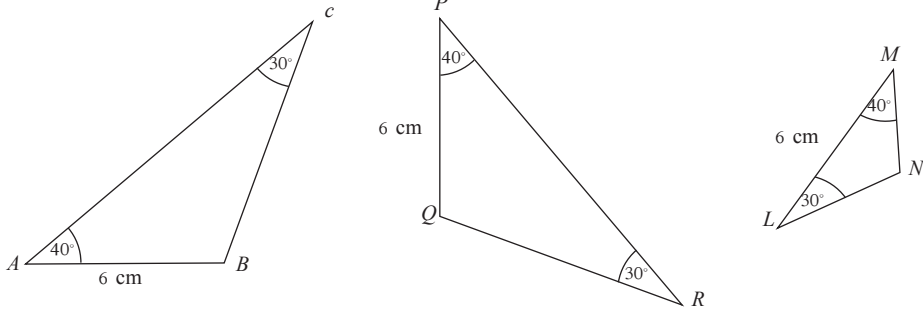
இனி, இரண்டு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைகின்றன என்பதை அறிந்துகொள்ளக்கூடிய இரண்டாவது சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம்.

(b) இரண்டாவது சந்தர்ப்பம்

ஒரு முக்கோணியின் இரு கோணங்களின் பெறுமானமும் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் வேறொரு முக்கோணியின் இரு கோணங்களின் பெறுமானத்திற்கும் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்திற்கும் சமமாக இருக்கும் சந்தர்ப்பம்.

செயற்பாடு

கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணிகளைக் கருதுக.



- முக்கோணி ABC யை ஒரு திசுத் தாளில் பிரதிசெய்து வெட்டிக் கொள்க.
- அதனை PQR , LMN ஆகிய முக்கோணிகளின் மீது வைத்து எம்முக்கோணியுடன் பொருந்துகின்றதாவெனப் பரீட்சிக்க.
- அதற்கேற்ப முக்கோணி ABC உடன் ஒருங்கிசையும் முக்கோணி யாது?

மேற்குறித்த செயற்பாட்டிற்கேற்ப முக்கோணி ABC ஆனது முக்கோணி PQR உடன் மாத்திரம் ஒருங்கிசைகின்றது என்பது தெளிவாகும். இச்சந்தர்ப்பத்திலும் மேற்குறித்த சந்தர்ப்பம் (a) இற் போன்று முக்கோணி ABC யிற்குச் சமமான மூன்று உறுப்புகள் மற்றைய இரு முக்கோணிகளிலும் உள்ளன. முக்கோணி ABC ஆனது முக்கோணி PQR உடன் ஒருங்கிசைந்து அது முக்கோணி LMN உடன் ஏன் ஒருங்கிசையவில்லையெனச் சிந்தித்துப் பார்க்க. முக்கோணி ABC யில் தரப்பட்டுள்ள 6 cm நீளமுள்ள பக்கம் தரப்பட்டுள்ள 30° கோணத்திற்கு எதிரே உள்ளது. முக்கோணி PQR இலும் அது அவ்வாறேயாகும். எனினும், முக்கோணி LMN இல் 6 cm நீளமுள்ள பக்கம் 30° கோணத்திற்கு எதிரே இல்லை.

இதற்கேற்ப, முக்கோணி ABC இல் இரண்டு கோணங்கள் முக்கோணி PQR இல் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமனாக உள்ளதுடன் மேலும் முக்கோணி ABC இல் ஒத்த பக்கம் முக்கோணி PQR இல் ஒத்த ஒரு பக்கத்திற்கு சமனாக உள்ளது. முக்கோணி LMN இன் ஒத்த பக்கம் சமனாக இல்லை. இதிலிருந்து ABC , LMN ஆகிய முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையாதவை என்பதை அறிந்து கொள்வோம்.

குறிப்பு: இங்கு ஒத்த பக்கங்கள் எனப்படுபவை சமனாகும் கோணங்களுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களாகும்.

ஒரு முக்கோணியின் இரு கோணங்களும் ஒரு பக்கமும் வேறொரு முக்கோணியின் இரு கோணங்களுக்கும் ஒத்த ஒரு பக்கத்திற்கும் சமமெனின், அம் முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசையும்.

இவ்வாறு ஒரு முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைதல் **கோ.கோ.ப.** சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைகின்றது எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடப்படும்.

மேற்குறித்த சந்தர்ப்பத்திற்கேற்பப் பின்வருமாறு STU , LMN என்னும் முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு காட்டலாம்.

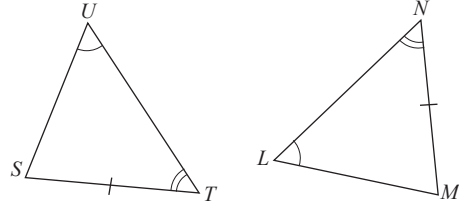
STU , LMN ஆகிய முக்கோணிகளில்

$$\hat{S}TU = \hat{M}NL \text{ (தரப்பட்டுள்ளது)}$$

$$\hat{T}US = \hat{N}LM \text{ (தரப்பட்டுள்ளது)}$$

$$ST = MN \text{ (தரப்பட்டுள்ளது)}$$

$$\therefore \Delta STU \equiv \Delta LMN \text{ (கோ.கோ.ப.)}$$



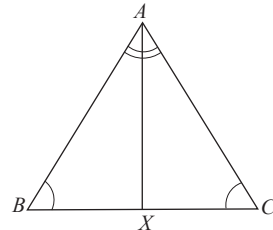
குறிப்பு: மேற்குறித்த இரண்டு முக்கோணிகளில் ST , MN ஆகிய பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள $\hat{S}TU, \hat{N}LM$ ஆகிய கோணங்களும் சமமாகையால் அப்பக்கங்கள் ஒத்த பக்கங்கள் என்பதை அவதானிக்க.

உதாரணம் 1

உருவில் குறிக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப

(i) $\Delta ABX \equiv \Delta ACX$ என நிறுவுக.

(ii) மற்றைய ஒத்த உறுப்புகளைத் தருக.



நிறுவல் :

ABX, ACX ஆகிய முக்கோணிகளில்

$\hat{ABX} = \hat{ACX}$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\hat{BAX} = \hat{CAX}$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$AX = AX$ (பொதுப் பக்கம்)

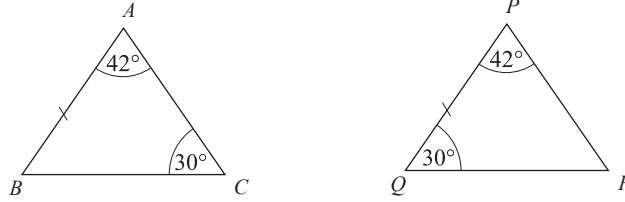
$\Delta ABX \equiv \Delta ACX$ (கோ.கோ.ப.)

ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்

$\therefore BX = CX, \hat{AXB} = \hat{AXC}, AB = AC$

உதாரணம் 2

பின்வரும் முக்கோணிச் சோடி கோ.கோ.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசைகின்ற தாவெனத் துணிக.



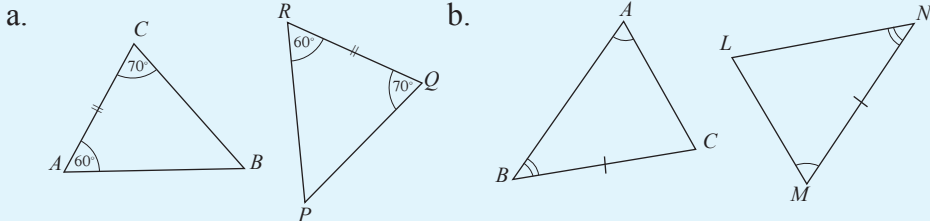
முக்கோணி ABC யின் இரு கோணங்கள் முக்கோணி PQR இன் இரு கோணங்களுக்குச் சமமாக உள்ளன. மேலும், $AB = PQ$. ஆகும். எனினும், அவை ஒத்த பக்கங்களல்ல. அதற்குக் காரணம் அப்பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள ACB, PRQ ஆகிய கோணங்கள் சமமாக இல்லாமையாகும் ($\hat{ACB} = 30^\circ$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

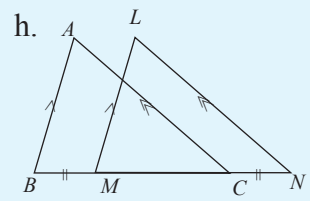
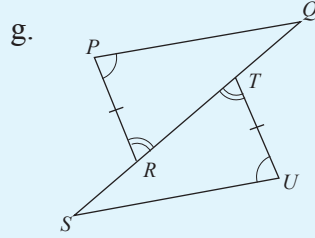
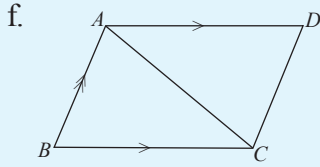
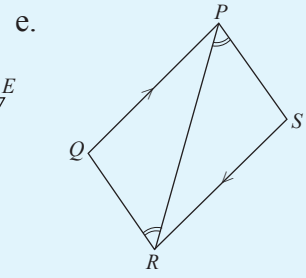
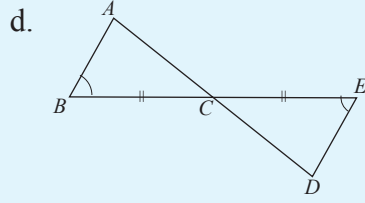
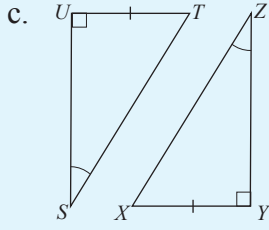
$\hat{PRQ} = 180^\circ - 30^\circ - 42^\circ = 108^\circ$ ஆகும்).

ஆகவே, இவ்விரு முக்கோணிகளும் கோ.கோ.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசைகின்றனவெனக் கூறுவதற்குப் போதுமான காரணங்கள் இல்லை.

5.2 பயிற்சி

1. பின்வரும் முக்கோணிச் சோடிகளிடையே ஒருங்கிசைவைக் காட்டுவதற்குக் கோ.கோ.ப. சந்தர்ப்பம் எம்முக்கோணிச் சோடிக்குப் பிரயோகிக்கப்படலாம் எனக் குறிப்பிடுக. அம்முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றதெனக் காட்டி, சமமான ஒத்த உறுப்புச் சோடியை எழுதுக.





2. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் உரிய முக்கோணியின் பரும்படி வரிப் படங்களை வரைக. கோ.கோ. ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசையும் முக்கோணிச் சோடியை அவற்றிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து அவற்றின் சமமான எஞ்சியுள்ள ஒத்த உறுப்புகளை எழுதுக.

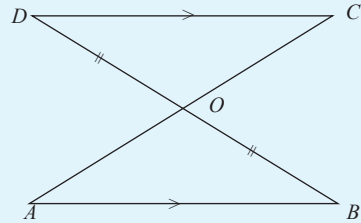
(i) ABC , PQR ஆகிய முக்கோணிகளில் $\hat{A}BC = \hat{P}QR$, $\hat{A}CB = \hat{P}RQ$, $BC = QR$

(ii) XYZ , LMN ஆகிய முக்கோணிகளில் $\hat{X}YZ = \hat{L}MN = 90^\circ$, $\hat{Y}XZ = 30^\circ$, $\hat{M}NL = 60^\circ$, $YZ = MN$

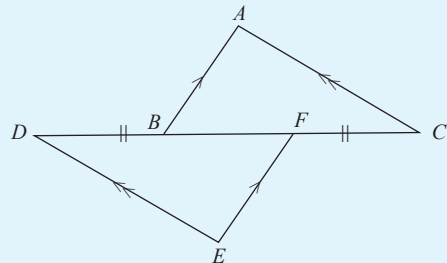
(iii) STU , PQR ஆகிய முக்கோணிகளில் $\hat{T}SU = \hat{Q}RP$, $TU = PR$, $\hat{T}US = \hat{P}QR$

(iv) DEF , ABC ஆகிய முக்கோணிகளில் $\hat{E}DF = \hat{B}AC = 40^\circ$, $\hat{D}FE = \hat{A}CB = 60^\circ$, $DE = BA$

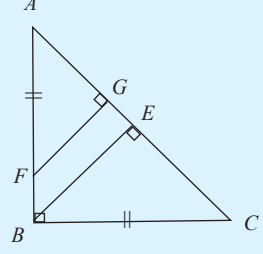
3. தரப்பட்டுள்ள உருவில் AB , CD ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமாகும். $BO = OD$ ஆகும். $\triangle AOB \equiv \triangle DOC$ எனக் காட்டுக.



4. AB , EF ஆகிய கோடுகளும் AC , DE ஆகிய கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம் ஆகும். $\triangle ABC \equiv \triangle EFD$ எனக் காட்டுக.



5. முக்கோணி ABC யில் $\hat{A} = 90^\circ$ ஆகும். உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $\triangle AFG \equiv \triangle BCE$ என நிறுவுக.



6. நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$ ஆகும். BD யினால் $\triangle ADC$ யும் $\triangle ABC$ யும் இருசமகூறிடப்படுகின்றன. $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ என நிறுவுக.

இரண்டு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவதை அறிந்து கொள்ளக்கூடிய மேலுமொரு சந்தர்ப்பத்தைக் கவனிப்போம்.

(c) மூன்றாவது சந்தர்ப்பம்

ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களும் வேறொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் சமமாகும் சந்தர்ப்பம்.

ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களும் இன்னொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் சமமாகும் சந்தர்ப்பம்.

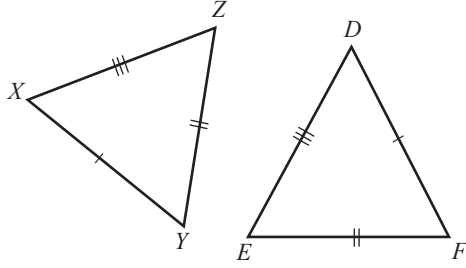
செயற்பாடு

ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களினதும் நீளங்கள் தரப்படும்போது ஓர் ஒத்த முக்கோணியை அமைக்க முடியுமா? அவ்வாறு செய்ய முடியுமா என்பதை அறிவதற்குப் பின்வரும் செயற்பாட்டைச் செய்க. 5,6,7 சென்ரிமீற்றர் நீளமுள்ள 3 ஈர்க்குத் துண்டுகள் வீதம் எடுத்துக் கொள்க. அவற்றைப் பயன்படுத்திப் பக்கங்களின் நீளங்கள் 5,6,7 சென்ரிமீற்றர் வீதமான இரு முக்கோணிகளை அமைக்க. அவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைய வேண்டும் என்பது உங்களுக்குத் தெரிகின்றதா? ஒரு முக்கோணியில் உள்ள ஈர்க்குத் துண்டுகளின் அமைவுகளை மாற்றிக்கொண்டு மற்றைய முக்கோணியுடன் ஒருங்கிசையாத ஒரு முக்கோணியை உங்களால் அமைக்க முடியுமா? அவ்வாறு செய்ய முடியாதெனக் காண்பீர்கள்.

மேற்குறித்த செயற்பாட்டினூடாக நீங்கள் பெற்ற இவ்விளைவை வெளிப்படையான உண்மை எனக் கேத்திரகணிதத்தில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

ஒரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்கள் வேறொரு முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களுக்கும் சமமெனின், அம்முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசையும். இவ்வாறு ஒரு முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைதலைப் ப.ப.ப. சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைதல் எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடப்படும்.

XYZ , DEF என்னும் முக்கோணிச் சோடி மேற்குறித்த சந்தர்ப்பத்திற்கேற்ப ஒருங்கிசையும் விதத்தைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.



XYZ, DEF ஆகிய முக்கோணிகளில்

$XY = DE$ (தரப்பட்டுள்ளது)

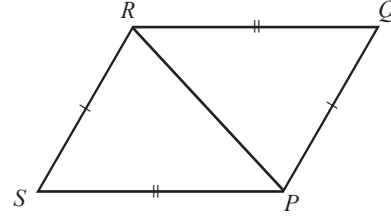
$YZ = EF$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$ZX = DF$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\triangle XYZ \equiv \triangle DEF$ (ப.ப.ப.)

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $\triangle PQR \equiv \triangle PSR$ என நிறுவுக. இவற்றின் மற்றைய ஒத்த உறுப்புகளைத் தருக.



நிறுவல் :

PQR, PSR ஆகிய முக்கோணிகளில்

$PQ = RS$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$QR = PS$ (தரப்பட்டுள்ளது)

PR (பொதுப் பக்கம்)

$\therefore \triangle PQR \equiv \triangle PSR$ (ப.ப.ப.)

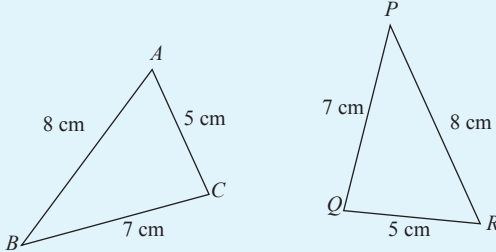
ஒருங்கைசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்

$\therefore \angle R\hat{S}P = \angle P\hat{Q}R, \angle S\hat{R}P = \angle Q\hat{P}R, \angle S\hat{P}R = \angle Q\hat{R}P$ ஆகும்.

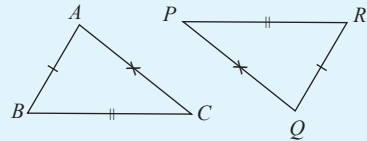
பயற்சி 5.3

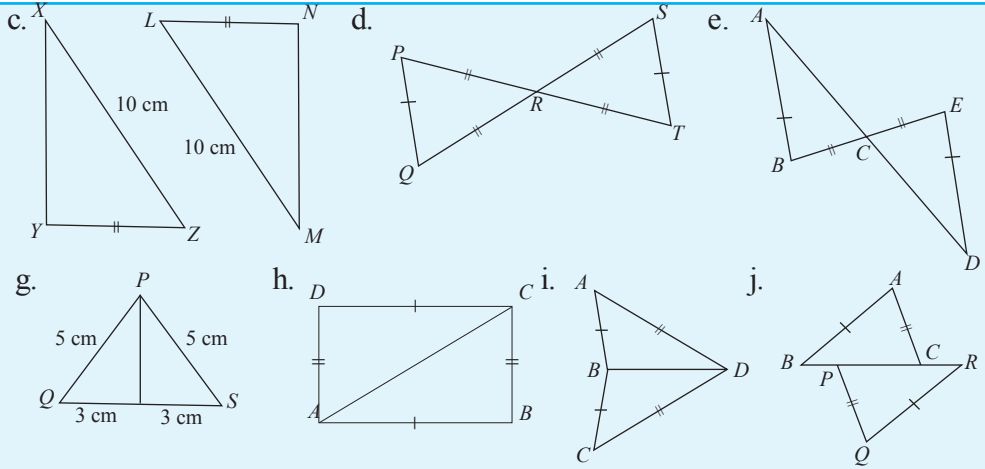
1. தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒருங்கிசைவைக் காட்டுவதற்குப் ப.ப.ப. சந்தர்ப்பத்தைப் பின்வரும் எம்முக்கோணிச் சோடிக்குப் பிரயோகிக்கலாமெனத் துணிக. அத்தகைய முக்கோணிச் சோடிகள் ஒருங்கிசைகின்றன என நிறுவி, சமமாகவுள்ள ஒத்த உறுப்புகளையும் எழுதுக.

a.



b.





2. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு உரிய முக்கோணியின் பரும்படி வரிப்படத்தை வரைக. ப.ப.ப. சந்தர்ப்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசையும் முக்கோணிச் சோடிகளைத் (இருப்பின்) தெரிந்தெடுத்து அவற்றின் சமமாகவுள்ள எஞ்சியிருக்கும் ஒத்த உறுப்புக்களை எழுதுக.

முக்கோணி PQR இல் $PQ = 4$ cm, $QR = 6$ cm, $RP = 5$ cm

முக்கோணி XYZ இல் $XY = 6$ cm, $YX = 8$ cm, $XY = 10$ cm

முக்கோணி LMN இல் $LM = 5$ cm, $NM = 4$ cm, $NL = 6$ cm

முக்கோணி DEF இல் $DE = 8$ cm, $EF = 10$ cm, $FD = 6$ cm

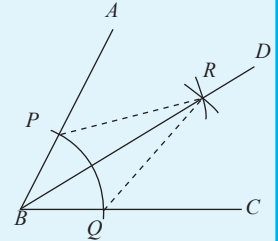
முக்கோணி ABC இல் $BC = 8$ cm, $CA = 7$ cm, $AB = 9$ cm

முக்கோணி STU இல் $ST = 9$ cm, $TU = 7$ cm, $SU = 5$ cm

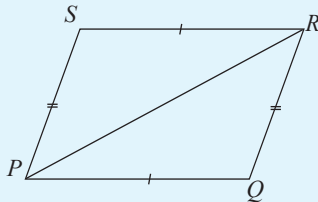
3. ஒரு மாணவன் கோணம் ABC யை இருசம கூறிடுவதற்குப் புள்ளி B யை மையமாகத் தெரிந்தெடுத்து, வில் PQ வை வரைகின்றான்.

அவ்வில் AB, BC ஆகியவற்றை முறையே P யிலும் Q விலும் இடைவெட்டுகின்றான். P, Q ஆகியவற்றிலிருந்து சமமாகவுள்ள இரு விற்கள் R இல் இடைவெட்டுகின்றன.

$P\hat{B}R = Q\hat{B}R$ என நிறுவுக.



4. நாற்பக்கல் PQRS இல் பக்கங்கள் நீளத்தில் சமம்



(i) $\triangle PSR \equiv \triangle PQR$ எனவும்

(ii) $P\hat{S}R = P\hat{Q}R$ எனவும்

(iii) எதிர்ப் பக்கங்கள் சமாந்தரமானவை எனவும் நிறுவுக.

5. ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் ஓர் உச்சியிலிருந்து எதிர்ப் பக்கத்தின் நடுப் புள்ளிக்கு வரையப்பட்டுள்ள கோடு அப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்தென நிறுவுக.

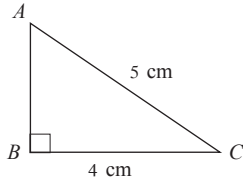
ஒரு செங்கோண முக்கோணச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றது. என்பதை அறிந்துகொள்ளக் கூடிய விசேட சந்தர்ப்பமொன்றைக் கருதுவோம்.

(d) நான்காவது சந்தர்ப்பம்

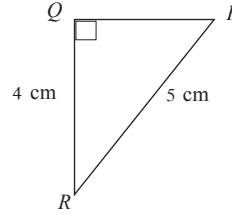
ஒரு செங் கோண முக்கோணியின் செம்பக்கமும் ஒரு பக்கமும் இன்னொரு செங் கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்திற்கும் இன்னொரு பக்கத்திற்கும் சமனாகும் சந்தர்ப்பம்.

செயற்பாடு

செம்பக்கத்தின் நீளம் 5 cm ஆகவும் வேறொரு பக்கத்தின் நீளம் 4 cm ஆகவும் இருக்குமாறு வரையப்படும் செங்கோண முக்கோணிச் சோடி ஒன்று கீழே காணப்படுகின்றது.



உரு (i)

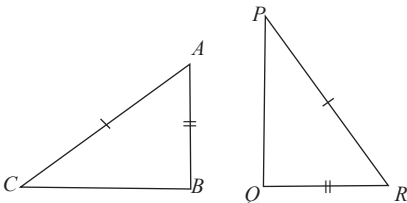


உரு (ii)

உரு (i) இனால் வகைகுறிக்கப்படும் முக்கோணியை ஒரு திசுத் தாளில் பிரதிசெய்து அதனை உரு (ii) இனால் வகைகுறிக்கப்படும் முக்கோணியுடன் பொருந்து கின்றதாவெனச் பரீட்சிக்க. அம் முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவானவை என்பதை விளங்கிக்கொள்வீர்கள் இதற்கேற்பச் செங்கோண முக்கோணிச் சோடி ஒன்றின் சமமாகவுள்ள இரு உறுப்புகளைக் கொண்டு ஒருங்கிசைவைப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கமும் ஒரு பக்கமும் முறையே வேறொரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்திற்கும் ஒரு பக்கத்திற்கும் நீளத்தில் சமமெனின், அவ்விரு செங்கோண முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையும். இவ்வாறு செங்கோண முக்கோணிச்சோடி ஒன்று ஒருங்கிசைதல் **செ.ப.ப.** சந்தர்ப்பத்தில் ஒருங்கிசைதல் எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடப்படும்.

பின்வரும் இரு முக்கோணிகளும் தரப்பட்டுள்ள தரவகளுக்கேற்ப அவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசையுமென நிறுவுவோம்.



ABC, PQR ஆகிய செங்கோண முக்கோணிகளில்

$$AC = PR \text{ (தரப்பட்டுள்ளது)}$$

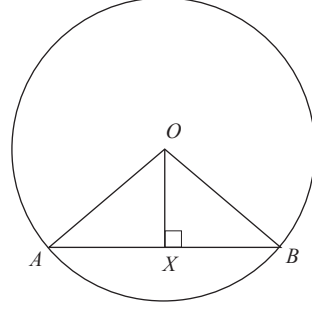
$$AB = QR \text{ (தரப்பட்டுள்ளது)}$$

$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle PQR \text{ (செ.ப.ப.)}$$

மேற்குறித்த முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்றமையால் எஞ்சியுள்ள ஒத்த உறுப்புகளும் சமம். அதாவது,
 $BC = PQ$, $\hat{BAC} = \hat{PRQ}$, $\hat{ACB} = \hat{QPR}$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

உருவில் உள்ள தரவுகளுக்கேற்ப
 $\Delta OXA \equiv \Delta OXB$ என நிறுவுக. இவற்றின்
 மற்றைய ஒத்த உறுப்புகளைத் தருக.



நிறுவல்

OXA , OXB ஆகிய செங்கோண முக்கோணிகளில்

$$OA = OB \quad (\text{வட்டத்தின் ஆரை})$$

$$OX \quad (\text{பொதுப் பக்கம்})$$

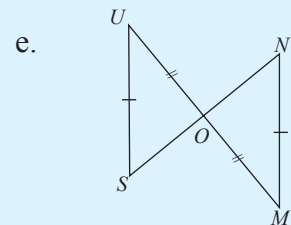
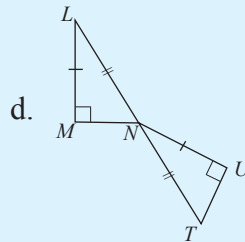
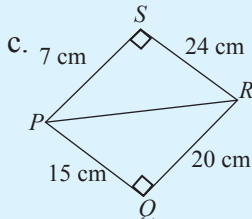
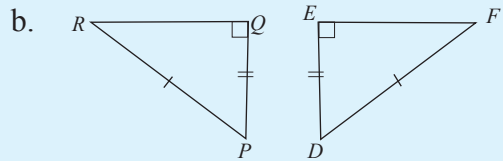
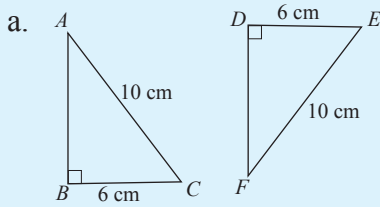
$$\Delta OXA = \Delta OXB \quad (\text{செ.ப.ப.})$$

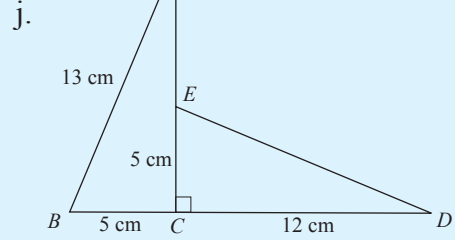
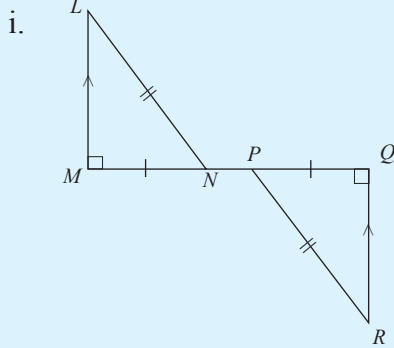
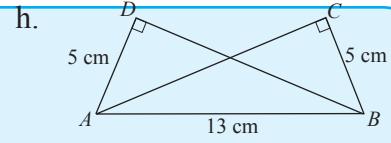
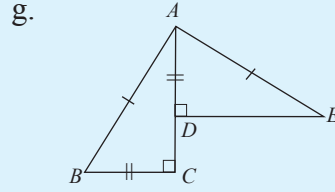
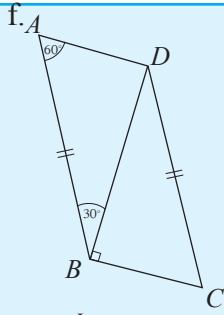
ஒருங்கிசையும் முக்கோணியின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகையால்

$$\therefore \hat{OAX} = \hat{OBX}, \quad AX = BX, \quad \angle AOX = \angle BOX$$

5.4 பயிற்சி

1 தரப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஒருங்கிசைதலைக் காட்டுவதற்குச் செ.ப.ப. சந்தர்ப்பம் பின்வரும் எந்த முக்கோணிச் சோடிக்குப் பிரயோகிக்கப்படலாமெனத் துணிக. அத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் உரிய முக்கோணிச் சோடி ஒருங்கிசைகின்ற தென நிறுவி, சமமாக உள்ள எஞ்சிய உறுப்புகளை எழுதுக.





2. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் உரிய முக்கோணிகளின் பரும்படிப் படங்களை வரைக. செ.ப.ப. சந்தர்பத்தின் கீழ் ஒருங்கிசையும் முக்கோணிச் சோடியை (இருப்பின்) அதிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து அவற்றில் சமமாக உள்ள எஞ்சிய ஒத்த உறுப்புக்களை எழுதுக.

(i) ABC, PQR ஆகிய முக்கோணிகளில் $\hat{ABC} = \hat{PQR} = 90^\circ$, $AC = PR = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $QP = 4$ cm

(ii) LMN, XYZ ஆகிய முக்கோணிகளில் $\hat{LMN} = \hat{XYZ} = 90^\circ$, $LM = XY$, $MN = YZ$

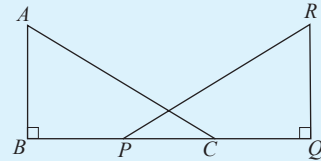
(iii) DEF, PQR ஆகிய முக்கோணிகளில்

$\hat{DEF} = \hat{PQR} = 90^\circ$, $DF = PR$, $\hat{FDE} = 20^\circ$, $\hat{PRQ} = 70^\circ$, $EF = PQ$

(iv) ABD, ABC ஆகிய முக்கோணிகளில் $\hat{ADB} = \hat{ACB} = 90^\circ$, $AD = CB$

3. உருவில் $AC = PR$, $AB = RQ$, எனின், $BP = CQ$

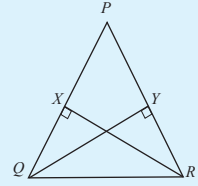
எனக் காட்டுக



4. முக்கோணி PQR இல் Q, R ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து முறையே RP, QP ஆகியவற்றிற்கு $QY = RX$ ஆக இருக்குமாறு QY, RX என்னும் செங்குத்துக்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.

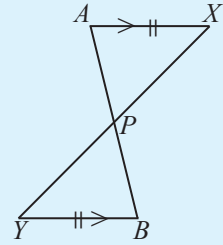
(i) $\triangle XQR \equiv \triangle YRQ$ எனவும்

(ii) $\angle XRO = \angle YQR$ எனவும் நிறுவுக

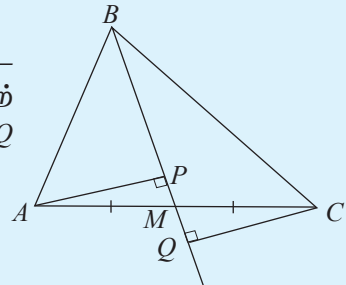


பலவினப் பயிற்சி

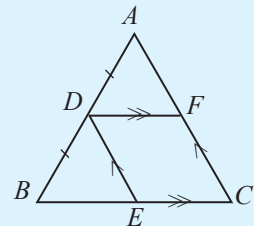
1. உருவில் $AX \parallel YB$, $AX = YB$ ஆகும். AB, YX ஆகிய கோடுகள் P இல் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக.



2. முக்கோணி ABC இல் B இனூடாக வரையப்பட்ட இடையத்துக்கு (நீட்டப்பட்ட) A, C ஆகியவற்றிலிருந்து வரைந்த செங்குத்துகளின் அடிகள் P, Q ஆகும். $\triangle AMP \equiv \triangle MQC$ எனக் காட்டுக.

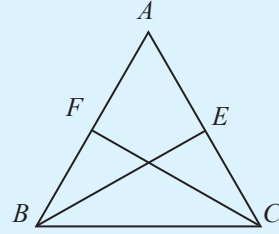


3. தரப்பட்டுள்ள உருவிலுள்ள தரவுகளுக்கமைய $\triangle ADF \equiv \triangle DBE$ எனக் காட்டுக

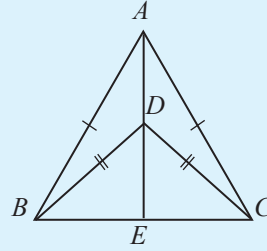


4. உருவில் முக்கோணி ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். AC , BA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே E , F ஆகும்.

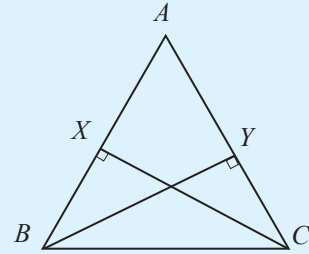
- (i) AB , FC என்பன செங்குத்தானவை எனவும்
- (ii) AC , BE என்பன செங்குத்தானவை எனவும்
- (iii) $CF = BE$ எனவும் காட்டுக.



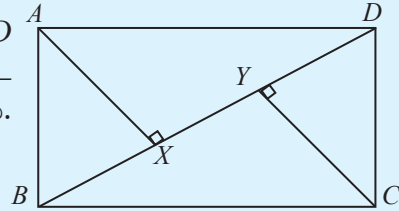
5. உருவில் முக்கோணி ABC இல் $AB = AC$ ஆகும். கோடு AD ஆனது பக்கம் BC ஐ E இல் சந்திக்கின்றது. $BD = DC$ ஆகுமாறு,
- (i) $\triangle ABD \equiv \triangle CAD$ எனவும்
 - (ii) $\triangle BAE \equiv \triangle CAE$ எனவும்
 - (iii) AE , BC என்பவை செங்குத்தானவை எனவும் நிறுவுக.



6. தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் B , C ஆகிய உச்சிகளிலிருந்து AC , AB ஆகிய பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகள் முறையே BY , CX ஆகும். $BY = CX$ ஆயின்,
- (i) $AB = AC$ எனவும்
 - (ii) $\angle XBC = \angle YCB$ எனவும் காட்டுக.

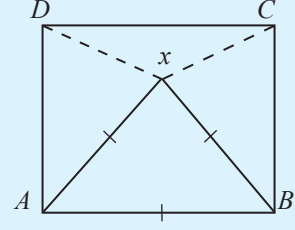


7. செவ்வகம் $ABCD$ இல் மூலைவிட்டம் BD இற்கு A , C ஆகியவற்றிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துகளின் அடிகள் முறையே X , Y ஆகும்.
- (i) $\triangle AXD \equiv \triangle BCY$ எனவும்
 - (ii) $AX = YC$ எனவும்
 - (iii) $BX = YD$ எனவும்
 - (iv) $\triangle YDC \equiv \triangle ABX$ எனவும் காட்டுக.



8. சதுரம் $ABCD$ இன் உள்ளே XAB ஒரு சமபக்க முக்கோணி ஆகுமாறு புள்ளி X அமைந்துள்ளது.

- (i) $\triangle AXD \equiv \triangle CBX$ எனவும்
- (ii) DXC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி எனவும் காட்டுக.



9. செவ்வகம் $ABCD$ யில் BC , DC ஆகிய பக்கங்களின் மீது செவ்வகத்திற்கு வெளியே BCF , DCE ஆகிய சம பக்க முக்கோணிகள் வரையப்பட்டுள்ளன.

- (i) மேற்குறித்த தரவுகளைக் காட்டும் பருமட்டான உருவமொன்றை வரைக.
- (ii) $\triangle EDA \equiv \triangle ABF$ எனவும்
- (iii) EAF ஒரு சமபக்க முக்கோணி எனவும் காட்டுக.

10. முக்கோணி ABC இல் பக்கம் BC இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி AE ஆகும். AE இன் மீது புள்ளி D அமைந்துள்ளது..

- (i) $\triangle ABE \equiv \triangle AEC$ எனவும்
- (ii) $\triangle BDE \equiv \triangle DEC$ எனவும்
- (iii) $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ எனவும் நிறுவுக.

11. $ABCDE$ என்பது ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணியாகும்.

- (i) $\triangle ABC \equiv \triangle AED$ எனக் காட்டுக.
- (ii) A இலிருந்து CD இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி X ஆயின் $CX = XD$ எனக் காட்டுக.