4 ஈருறுப்புக் கோவைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்,

- இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குவதற்கும்
- ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கத்தை விரிப்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அட்சரகணிதக் கோவைகளுடன் தொடர்புபட்ட சுருக்கல்கள் பற்றி நீங்கள் கற்ற விடயங்களை நினைவுகூர்வதற்குப் பின்வரும் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

மீட்டற் பயிற்சி

1. சுருக்குக.

a. $2 \times 3a$ **b.** $4 \times (-2x)$ **c.** $(-3) \times 2x$
d. $2x \times 3y$ **e.** $3a \times (-5b)$ **f.** $(-2m) \times 4n$
g. $(-4p) \times (-2q)$ **h.** $3x \times 5x$ **i.** $(-5a) \times 3a$

2. விரித்தெழுதுக.

a. $2\,(x+1)$ **b.** $3\,(b+3)$ **c.** $4\,(y-2)$
d. $-3\,(a+2)$ **e.** $-2\,(x-2)$ **f.** $x\,(2x+3)$
g. $2y\,(y+1)$ **h.** $-2x\,(4x+1)$ **i.** $-3b\,(a-b)$
j. $2\,(a-b-3c)$

3. விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

(I) a. $x\,(x+2)+2\,(x+2)$ **b.** $y\,(y-3)+3\,(y-2)$
c. $x\,(x+1)-3\,(x-1)$ **d.** $m\,(m-3n)-n\,(m-3n)$

(II) a. $(x+5)\,(x+8)$ **b.** $(x-5)\,(x+8)$ **c.** $(x+5)\,(x-8)$
d. $(x-5)\,(x-8)$ **e.** $(7+a)\,(3+a)$ **f.** $(2+m)\,(3-m)$

4.1 இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கம்

மேலே **3** (II) இல் நீங்கள் இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தைச் சுருக்கினீர்கள். வடிவம் $ax+by$ இல் உள்ள இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தின் விரிவுபற்றி இப்பாடத்தில் மேலும் கற்போம். இங்கு ax ,by ஆகியன ஈருறுப்புக் கோவையின் இரு உறுப்புகள் எனப்படும்.

உதாரணம் 1

$(3x + 2)\,(2x + 3)$ ஐ விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

$(3x+2)(2x+3)$

$= 3x(2x+3)+2(2x+3)$

$= 6x^2 + 9x + 4x + 6$

$= \underline{\underline{6x^2 + 13x + 6}}$

அல்லது

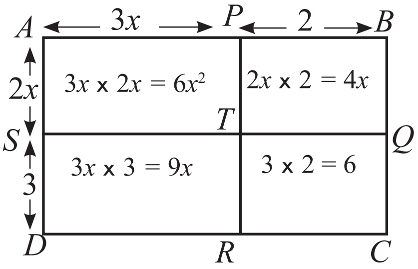
$(3x+2)(2x+3)$

$= (3x+2)\times 2x + (3x+2)\times 3$

$= 6x^2 + 4x + 9x + 6$

$= \underline{\underline{6x^2 + 13x + 6}}$

மேலே பெற்ற பேறைச் செவ்வகங்களின் பரப்பளவைக் கொண்டும் காணலாம். (எல்லா அளவீடுகளும் ஒரே அலகில் தரப்பட்டுள்ளன).



செவ்வகம் $ABCD$ யின்

நீளம் $= 3x + 2$

அகலம் $= 2x + 3$

பரப்பளவு $= (3x + 2)\,(2x + 3)$ ——— ①

வேறோரு முறையில்,

செவ்வகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = நான்கு சிறிய செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகை

$= 6x^2 + 9x + 4x + 6$

$= 6x^2 + 13x + 6$ ——— ②

①, ② இலிருந்து,

$(3x + 2)\,(2x + 3) = 6x^2 + 13x + 6$ என்பது தெளிவாகும்.

ஈருறுப்புக் கோவைகளை விரித்தெழுதிச் சுருக்கியுள்ள விதத்தைக் கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களைக் கொண்டு கற்போம்.

உதாரணம் 2

$(3x-2)(2x+5)$

$$\begin{aligned}&(3x-2)(2x+5)\\&=3x(2x+5)-2(2x+5)\\&=6x^2+15x-4x-10\\&=\underline{\underline{6x^2+11x-10}}\end{aligned}$$

உதாரணம் 3

$(2x+y)(x+3y)$

$$\begin{aligned}&(2x+y)(x+3y)\\&=2x(x+3y)+y(x+3y)\\&=2x^2+6xy+xy+3y^2\\&=\underline{\underline{2x^2+7xy+3y^2}}\end{aligned}$$

உதாரணம் 4

$(3x+2y)(3x-2y)$

$$\begin{aligned}&(3x+2y)(3x-2y)\\&=3x(3x-2y)+2y(3x-2y)\\&=9x^2-6xy+6xy-4y^2\\&=\underline{\underline{9x^2-4y^2}}\end{aligned}$$

உதாரணம் 5

$(5a-2b)(2a-3b)$

$$\begin{aligned}&(5a-2b)(2a-3b)\\&=5a(2a-3b)-2b(2a-3b)\\&=10a^2-15ab-4ab+6b^2\\&=\underline{\underline{10a^2-19ab+6b^2}}\end{aligned}$$

உதாரணம் 6

$(a+b)(\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b)$

$$\begin{aligned}&(a+b)(\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b)\\&=a(\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b)+b(\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b)\\&=\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}ab-\frac{1}{4}b^2\\&=\underline{\underline{\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{12}ab-\frac{1}{4}b^2}}\end{aligned}$$

பயிற்சி 4.1

1. பின்வரும் ஈருறுப்புக் கோவைகளை விரித்தெழுதிச் சுருக்குக.

a. $(x+2)(x+2)$	**b.** $(x-3)(x-3)$	**c.** $(2x+3)(x+2)$
d. $(2p-5)(p-3)$	**e.** $(3x-1)(3x+1)$	**f.** $(-3x+2)(2x-3y)$
g. $(2a+b)(3a+2b)$	**h.** $(3x-5y)(4x+3y)$	**i.** $(-3p+4q)(3p-2q)$
j. $(-7k-5l)(3k+4l)$	**k.** $(4m-3n)(4m-3n)$	**l.** $(5x-2y)(5x-2y)$
m. $\left(\frac{1}{2}x+y\right)(2x+3y)$	**n.** $\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}q\right)\left(\frac{2}{3}p-\frac{3}{4}q\right)$	**o.** $(3x+4y)(5a+3b)$

2. ஒரு செவ்வக மைதானத்தின் நீளம் $(2a+7)$ மீற்றர் ஆகவும் அகலம் $(2a-3)$ மீற்றர் ஆகவும் இருப்பின், மைதானத்தின் பரப்பளவை a யின் சார்பில் காண்க.

3. கமலா சதுர வடிவிலான ஒரு பூப்பாத்தியை அமைத்தாள். அவளது சகோதரி செவ்வக வடிவிலான ஒரு பாத்தியை அமைத்தாள். சகோதரியின் பூப்பாத்தியின் நீளம் கமலாவின் பூப்பாத்தியிலும் 3 மீற்றர் கூடியதாயிருப்பதுடன் அதன் அகலம் கமலாவின் பூப்பாத்தியிலும் 2 மீற்றர் குறைவானதாகவும் உள்ளது. கமலாவின் பூப்பாத்தியின் ஒரு பக்க நீளம் x எனக் கொண்டு சகோதரியின் பூப்பாத்தியின் நீளம், அகலம் என்பவற்றை x இல் கண்டு அதன் பரப்பளவை $ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவத்தில் தருக.

4. ஒரு பிள்ளை ஓர் அப்பிளின் விலை ரூ. x வீதம் a அப்பிள்களை வாங்க எண்ணினார்.

(i) அப்பிள்களை வாங்கச் செலவிட்ட பணத்தை a, x ஆகியவற்றில் தருக.

வாங்கிய அப்பிள்களின் எண்ணிக்கையை 5 இனால் கூட்டினால் ஓர் அப்பிளின் விலையை ரூ. 3 இனால் குறைக்கலாமென வர்த்தகர் கூறுகின்றார். இதற்கேற்ப

(ii) வாங்குவதற்கு எண்ணியுள்ள அப்பிள்களின் எண்ணிக்கைக்கான ஒரு கோவையை a யின் சார்பில் எழுதுக.

(iii) ஒரு அப்பிளின் விலைக்கான ஒரு கோவையை x யின் சார்பில் எழுதுக.

(iv) அப்பிள்களுக்கான செலவுக்குரிய ஒரு கோவையை a, x ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக

(v) மேலே பகுதி (iv) இல் பெற் கோவையைச் சுருக்குக.

4.2 ஈருறுப்புக் கோவைகளை வர்க்கித்தல்

மேற்குறித்த பயிற்சியில் நீங்கள் கற்ற பின்வரும் **1. a, b, l** பிரசினங்களில் எமது கவனத்தை மறுபடியும் செலுத்துவோம். $(x + 2)(x + 2)$, $(x - 3)(x - 3)$, $(5x - 2y)(5x - 2y)$ என்பவற்றில் பெருக்கவுள்ள சில இரு ஈருறுப்புக் கோவைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருப்பதைக் காணலாம்.

அட்சரகணிதத்தில் $x \times x = x^2$ என எழுதுகின்றவாறு, $(x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$ என எழுதலாம்.

அவ்வாறே $(x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$

$(5x - 2y)(5x - 2y) = (5x - 2y)^2$ என எழுதலாம்.

அவ்வாறு எழுதப்பட்ட $(x + 2)^2$, $(x - 3)^2$, $(5x - 2y)^2$ என்னும் வடிவத்தில் உள்ள கோவைகள் நிறை வர்க்கங்கள் எனப்படும். ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கத்தை விரித்தெழுதுவதற்கு முன்னர் கற்ற ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கத்தை விரித்தெழுதிய அதே முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 1

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2)$$
$$= x(x+2)+2(x+2)$$
$$= x^2+2x+2x+4$$
$$= \underline{\underline{x^2+4x+4}}$$

$(x+2)^2$ ஐ இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கமாக எழுதி விரித்தெழுதுக. வர்க்கமாக்கலைச் சுருக்குவதை வேறொரு முறையிலும் சொல்லலாம்.$(a+b)^2$, $(a-b)^2$ என்னும் வடிவங்களில் உள்ள கோவைகளின் வர்க்கங்கள் விரித்தெழுதப்படும் முறை பற்றிக் கவனிப்போம்.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= a^2+ab+ba+b^2$$
$$= \underline{\underline{a^2+2ab+b^2}}$$

இதனை ஒரு சூத்திரமாக நினைவில் வைத்திருப்பது முக்கியமாகும்.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

முதல் உறுப்பின் வர்க்கம் (a^2)

முதல் உறுப்பினதும் இரண்டாம் உறுப்பினதும் பெருக்கத்தின் இரு மடங்கு ($2ab$)

இரண்டாம் உறுப்பின் வர்க்கம் (b^2)

இப்போது $(a-b)^2$ இன் விரிவைக் கவனிப்போம்.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a^2-ab-ba+b^2$$
$$= a^2-ab-ab+b^2$$
$$= \underline{\underline{a^2-2ab+b^2}}$$

அதாவது, $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

மேலும் $(-a+b)^2 = (-a)^2+2(-a)b+b^2 = a^2-2ab+b^2$

$(-a-b)^2 = (-a)^2+2(-a)(-b)+(-b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^2$, $(-a-b)^2$ ஆகியவற்றின் விரிவுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் எனவும் $(a-b)^2$, $(-a+b)^2$ ஆகியவற்றின் விரிவுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் எனவும் அவதானித்திருப்பீர்கள்.

பின்வரும் உதாரணங்கள் மூலம் மேலும் இவற்றைக் கற்போம்.

உதாரணம் 2

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2$$
$$= \underline{\underline{x^2 + 6x + 9}}$$

உதாரணம் 3

$$(y-2)^2 = y^2 - 2\times y\times 2 + 2^2$$
$$= \underline{\underline{y^2 - 4y + 4}}$$

உதாரணம் 4

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 5y + (5y)^2$$
$$= \underline{\underline{9x^2 + 30xy + 25y^2}}$$

உதாரணம் 5

$$(3a-2b)^2 = (3a)^2 - 2\times(3a)\times(2b) + (2b)^2$$
$$= \underline{\underline{9a^2 - 12ab + 4b^2}}$$

உதாரணம் 6

$$(-y+5)^2 = (-y)^2 - 2\times(y)\times 5 + 5^2$$
$$= \underline{\underline{y^2 - 10y + 25}}$$

உதாரணம் 7

$$(-2x-3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$$
$$= \underline{\underline{4x^2 + 12xy + 9y^2}}$$

எண் பெறுமானங்களை இலகுவாகக் காண்பதற்கு இம்முறை பயன்படுத்தப்படும். அதனைப் பின்வரும் உதாரணங்கள் மூலம் கற்போம்.

உதாரணம் 8

105^2 இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$105^2 = (100 + 5)^2$
$= 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2$
$= 10000 + 1000 + 25$
$= 11\ 025$

உதாரணம் 9

99^2 இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$99^2 = (100 - 1)^2$
$= 100^2 - 2 \times (100) \times (1) + 1^2$
$= 10000 - 200 + 1$
$= 9\ 801$

உதாரணம் 10

$x = 5$, $y = 2$ ஆகியவற்றுக்கும் $(x + y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க

இ.ப.

$(x+y)^2$
$= (5+2)^2$
$= 7^2$
$= \underline{\underline{49}}$

வ.ப.

$x^2 + 2xy + y^2$
$= 5^2 + 2\times 5\times 2 + 2^2$
$= 25 + 20 + 4$
$= \underline{\underline{49}}$

$\therefore$ இ.ப. = வ.ப.
$\therefore (x + y)\ (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ஆகும்.

பயிற்சி 4.3

1. நிரல் A யில் உள்ள வர்க்கங்களின் விரிவை நிரல் B யிலிருந்து தெரிந்தெடுத்து உரிய வெற்றிடத்தில் எழுதுக.

நிரல் A		நிரல் B
a. $(x+5)^2$	=	$4x^2+4xy+y^2$
b. $(x-5)^2$	=	$4y^2+4xy+x^2$
c. $(2x+5)^2$	=	$x^2-10x+25$
d. $(2x+y)^2$	=	$4x^2-4xy+y^2$
e. $(-2x+5)^2$	=	$x^2-4xy+4y^2$
f. $(x-2y)^2$	=	$4x^2-12xy+9y^2$
g. $(-2x+y)^2$	=	$4x^2+20x+25$
h. $(2x+3y)^2$	=	$4x^2+12xy+9y^2$
i. $(2x-3y)^2$	=	$x^2+10x+25$
j. $(-2y-x)^2$	=	$4x^2-20x+25$

2. பின்வரும் வர்க்கக் கோவைகளை விரித்தெழுதுக.

a. $(x+2)^2$ **b.** $(a+3)^2$ **c.** $(p-3)^2$ **d.** $(y-1)^2$
e. $(2a+3)^2$ **f.** $(3b+2)^2$ **g.** $(3x-1)^2$ **h.** $(4m-5)^2$
i. $(3p+4q)^2$ **j.** $(5m-3n)^2$ **k.** $(-2y+5)^2$ **l.** $(3a-5b)$
m. $(-3m+n)^2$ **n.** $(-5m-6n)^2$

3. பின்வரும் கோவைகள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள வெற்றிடங்களுக்குப் பொருத்தமான உறுப்பை எழுதுக.

a. $(x+3)^2 = x^2+6x+$ ____ **b.** $(y+2)^2 = y^2+$ ____ $+4$
c. $(m-5)^2 = m^2-10m+$ ____ **d.** $(a+$ ____ $)^2 = a^2+8a+16$
e. $($ ____ $+b)^2 = 25+10b+b^2$ **f.** $($ ____ $-7)^2 = x^2-14x+49$
g. $(-3+$ ____ $)^2 =$ ____ $-6x+x^2$ **h.** $($ ____ $-x)^2 = +16-8x+x^2$

4. ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கமாக எழுதிச் சுருக்குக.

(i) 21^2 (ii) 102^2 (iii) 98^2 (iv) 9.9^2

5. ஒரு சதுர வடிவ அறையின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $(2a+3b)$ மீற்றர் எனத் தரப்பட்டிருப்பின், அறையின் பரப்பளவுக்கான ஒரு கோவையை a, b ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக.

6. $a = 2$, $b = 3$ ஆகியவற்றிற்கு

(i) $(-a+b)^2 = a^2-2ab+b^2$
(ii) $(-a-b)^2 = a^2+2ab+b^2$

என்பவற்றை வாய்ப்புப் பார்க்க.

பலவினப் பயிற்சி

1. $(2x + 3y)(x + y) = 2x^2 + 5xy + 3y$ என்பதைப் பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் வாய்ப்புப் பார்க்க.

   (i) $x = 3, y = 2$ (ii) $x = 5, y = 0$
   (iii) $x = 1, y = 1$ (iv) $x = -1, y = -2$

2. பின்வரும் பின்னக் குணகங்கள் உள்ள ஈருறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கங்களை இரு ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கமாக எழுதிச் சுருக்குக.
   (i) $(\frac{1}{2}x + y)^2$ (ii) $(\frac{1}{3}a - b)^2$ (iii) $(\frac{1}{4}m - \frac{2}{3}n)^2$

3. இடைவெளிகளை நிரப்புக.
   (i) $(x + __)^2 = x^2 + 6x + __$ (ii) $(y + __)^2 = y^2 + 8y + __$
   (iii) $(__ - 5)^2 = x^2 + __ - 25$ (iv) $(__ - y)^2 = x^2 - __ + y^2$

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் ஈருறுப்புக் கோவையின் வர்க்கமாக எழுதுவதற்கு அதனுடன் கூட்டப்பட வேண்டிய மறா உறுப்பை எழுதுக. அவற்றை நிறைவர்க்காமகத் தருக.
   (i) $x^2 + 6x$ (ii) $y^2 + 8y$ (iii) $m^2 + 10m$
   (iv) $a^2 - 4a$ (v) $x^2 + 4xy$ (vi) $p^2 - 12pq$

5. $x + y = 5$ ஆகவும் $xy = 6$ ஆகவும் இருக்கும்போது $x^2 + y^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. $a - b = 3$ ஆகவும் $ab = 28$ ஆகவும் இருக்கும்போது $a^2 + b^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

7. $x^2 + y^2 = 25$, $xy = 12$ ஆக இருக்கும்போது $x + y$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. $(x + \mathrm{k})^2 = x^2 + 6x + \mathrm{q}$ ஆக இருக்கும்போது k, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

9. $t + \frac{1}{t} = 2$ ஆக இருக்கும்போது $t^2 + \frac{1}{t^2}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.