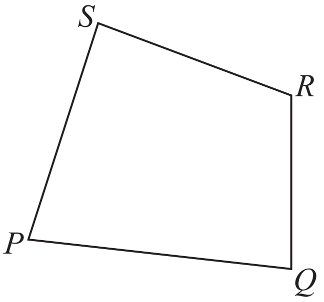
16 සමාන්තරාස්‍ර I

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට

සමාන්තරාස්‍රවල ලක්ෂණ භාවිත කර ගැටලු විසඳීමට හා අනුමේයයන් සාධනය කිරීමට හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

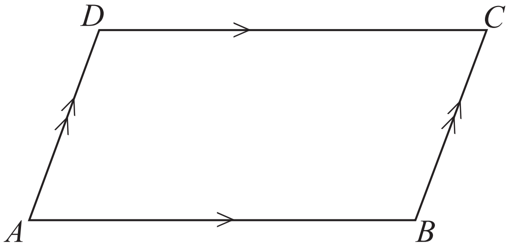
සමාන්තරාස්‍ර

සරල රේඛා ඛණ්ඩ හතරකින් වටවූ සංවෘත තල රූපය චතුරස්‍රයකි. චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද සහ සම්මුඛ කෝණ පිළිබඳ ව විමසා බලමු.



$PQRS$ චතුරස්‍රයේ,
PQ සහ SR එක් සම්මුඛ පාද යුගලයක් වන අතර අනෙක් සම්මුඛ පාද යුගලය PS හා QR වේ. $S\hat{P}Q$ හා $S\hat{R}Q$ එක් සම්මුඛ කෝණ යුගලයක් වන අතර අනෙක් සම්මුඛ කෝණ යුගලය $P\hat{Q}R$ හා $P\hat{S}R$ ද වේ.

සම්මුඛ පාද යුගල දෙකම සමාන්තර වූ චතුරස්‍රයක් **සමාන්තරාස්‍රයක්** ලෙස හැඳින්වේ.



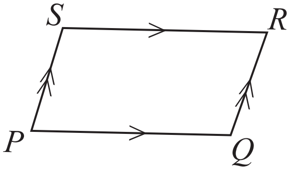
ඉහත දැක්වෙන සමාන්තරාස්‍රයෙහි AB හා DC පාද සමාන්තර බව දැක්වීමට ඊ හිස බැගිනුත් BC හා AD පාද සමාන්තර බව දැක්වීමට ඊ හිස් දෙක බැගිනුත් යොදා ඇත.

16.1 සමාන්තරාස්‍රවල ලක්ෂණ

මුලින්ම සමාන්තරාස්‍රවල ලක්ෂණ හඳුනාගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකම්වල යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම 1

විහිත චතුරස්‍රය හා කෝදුව භාවිතයෙන් සමාන්තරාස්‍රයක් අඳින්න. එය රූපයේ පරිදි $PQRS$ ලෙස නම් කරන්න.



1. ඔබ ඇඳි $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ,
   - PQ, QR, SR සහ PS පාදවල දිග මනින්න.
   - සම්මුඛ පාද යුගල වන PQ හා SR හි දිග පිළිබඳවත් PS හා QR හි දිග පිළිබඳවත් ඔබට කිවහැක්කේ කුමක් ද?

   $PQ = SR$ බවත් $PS = QR$ බවත් ඔබට පෙනෙනු ඇත.
2. ඉහත ඔබ අඳින ලද සමාන්තරාස්‍රයේ,
   - $P\hat{Q}R$, $Q\hat{P}S$, $P\hat{S}R$ සහ $Q\hat{R}S$ කෝණ මනින්න.
   - සම්මුඛ කෝණ වන, $Q\hat{P}S$ හා $Q\hat{R}S$ හි විශාලත්ව පිළිබඳවත් $P\hat{S}R$ හා $P\hat{Q}R$ හි විශාලත්ව පිළිබඳවත් ඔබට කිව හැක්කේ කුමක්ද?

   $Q\hat{P}S = Q\hat{R}S$ බවත් $P\hat{S}R = P\hat{Q}R$ බවත් ඔබට පෙනෙනු ඇත.
3. දැන් $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රය,
   - ටිෂූ කඩදාසියක පිටපත් කරගෙන එහි පිටපත් දෙකක් ඇඳ කපා ගන්න.
   - එක් සමාන්තරාස්‍රයක PR විකර්ණය අඳින්න.
   - දැන් විකර්ණය ඔස්සේ කපා ලැබෙන ත්‍රිකෝණ එකමත එක සම්පාත වේ දැයි බලන්න.

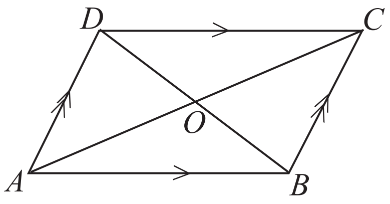
එම ත්‍රිකෝණ සම්පාත වන බව ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත. එනම් මෙම ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි වර්ගඵල ද සමාන වේ. එලෙසම අනෙක් විකර්ණය ඔස්සේ ද කැපූ විට ලැබෙන ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි වර්ගඵල සමාන වන බව නිරීක්ෂණය කිරීම සඳහා ඔබ කපා ගත් අනෙක් පිටපත යොදා ගන්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකමට අනුව,

සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන බවත්, සම්මුඛ කෝණ සමාන බවත් සමාන්තරාස්‍රයේ එක් එක් විකර්ණය මගින් සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වන බවත් පැහැදිලි වේ.

ක්‍රියාකාරකම 2

ක්‍රියාකාරකම 1හි මෙන් විහිත චතුරස්‍රය සහ කෝදුව භාවිතයෙන් සමාන්තරාස්‍රයක් අඳින්න. එය රූපයේ පරිදි $ABCD$ ලෙස නම් කරන්න.



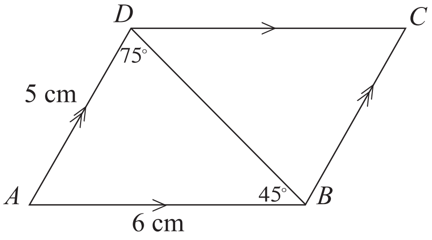
- දැන් AC සහ BD විකර්ණ අඳින්න. ඒවා ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය O ලෙස නම් කරන්න.
- AO, OC, OB සහ OD දිග මනින්න.
- AO සහ OC දිග පිළිබඳව ඔබට කිවහැක්කේ කුමක් ද?
- OB සහ OD දිග පිළිබඳව ඔබට කිවහැක්කේ කුමක් ද?
- $AO = OC$ බවත් $OB = OD$ බවත් ඔබට පැහැදිලි වනු ඇත.

මේ අනුව, සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේද වන බව පැහැදිලි වේ.

දැන්, සමාන්තරාස්‍රයක දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් සමාන්තරාස්‍රයේ අනෙකුත් අංග සොයන අයුරු විමසා බලමු.

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ දී ඇති දත්ත අනුව පහත දැක්වෙන කෝණ සහ පාදවල අගය සොයන්න.

(i) BC දිග
(ii) DC දිග
(iii) $B\hat{A}D$
(iv) $B\hat{C}D$
(v) $A\hat{B}C$
(vi) $A\hat{D}C$



(i) සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන නිසා $AD = BC$ හා $AB = CD$ වේ.

$\therefore BC = 5$ cm

(ii) $DC = 6$ cm

(iii) ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා

$$B\hat{A}D = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ$$
$$= \underline{\underline{60^\circ}}$$

(iv) සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා,

$$B\hat{A}D = B\hat{C}D$$
$$\therefore B\hat{C}D = \underline{\underline{60^\circ}}$$

(v)

$A\hat{D}B = C\hat{B}D$ ($AD//BC$, ඒකාන්තර ∢ සමාන නිසා)

$\therefore C\hat{B}D = 75°$

$A\hat{B}C = A\hat{B}D + C\hat{B}D$

$\therefore A\hat{B}C = 45° + 75°$

$= \underline{\underline{120°}}$

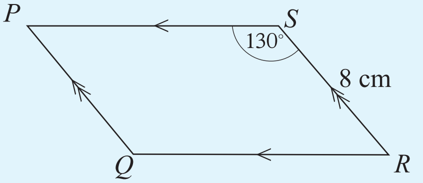
(vi) සමාන්තරාස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා,

$A\hat{B}C = A\hat{D}C$

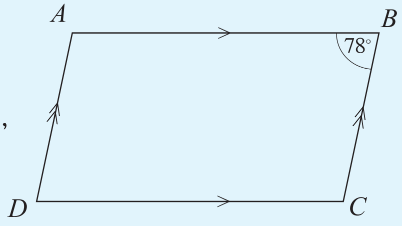
$\therefore A\hat{D}C = \underline{\underline{120°}}$

16.1 අභ්‍යාසය

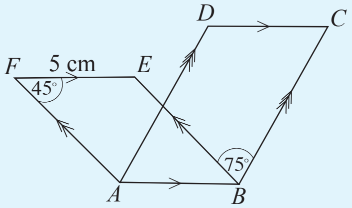
1. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව,
   (i) PQ පාදයේ දිග
   (ii) $Q\hat{P}S, P\hat{Q}R$ සහ $Q\hat{R}S$ කෝණවල විශාලත්ව
   සොයන්න.



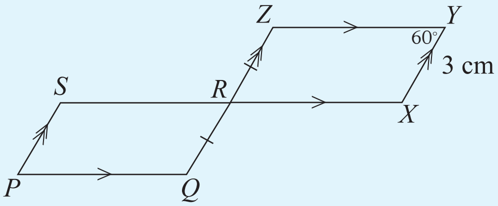
2. රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව,
   (i) $B\hat{C}D$ හි අගය සොයන්න.
   (ii) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය 24 cm^2 නම්, BCD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කොපමණ ද?
   (iii) ACD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය කොපමණ ද?



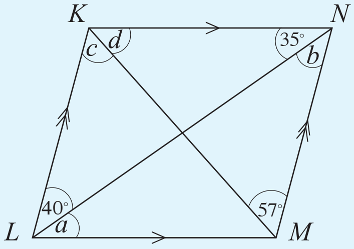
3. රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව,
   (i) DC දිග
   (ii) $A\hat{B}E$ හි අගය
   (iii) $A\hat{D}C$ හි අගය
   (iv) $B\hat{C}D$ හි අගය
   සොයන්න.



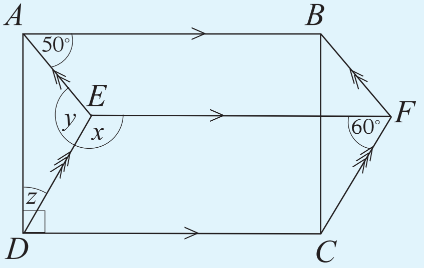
4. රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව,
   (i) PS දිග
   (ii) $Q\hat{P}S$ හි විශාලත්වය
   (iii) $P\hat{Q}R$ හි විශාලත්වය සොයන්න.



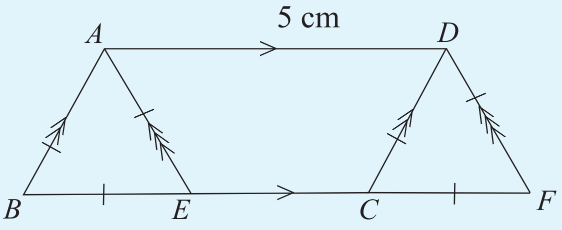
5. රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව,
a, b, c හා d මගින් දක්වා ඇති කෝණවල විශාලත්වය සොයන්න.



6. රූපයේ දී ඇති තොරතුරුවලට අනුව,
(i) DC දිගට සමාන පාද දෙකක් ලියන්න.
(ii) x, y හා z මගින් දක්වා ඇති කෝණවල විශාලත්ව සොයන්න.



7. රූපයේ දැක්වෙන්නේ $ABCD$ සහ $ADFE$ සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි. එහි දී ඇති තොරතුරු අනුව,
(i) BC දිග සොයන්න.
(ii) $C\hat{F}D$, $A\hat{D}C$ සහ $E\hat{C}D$ කෝණවල විශාලත්ව සොයන්න.

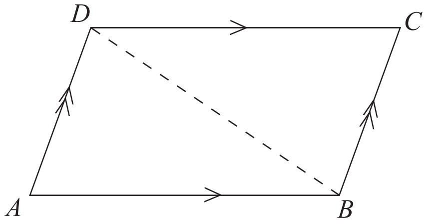


16.2 සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණ

සමාන්තරාස්‍ර සඳහා අප නිරීක්ෂණය කළ ලක්ෂණ සෑම සමාන්තරාස්‍රයකටම පොදු වන අතර එය පහත පරිදි ප්‍රමේයයක් ලෙස ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය : සමාන්තරාස්‍රයක,
(i) සම්මුඛ පාද සමාන වේ.
(ii) සම්මුඛ කෝණ සමාන වේ.
(iii) එක් එක් විකර්ණය මගින් සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය කරයි.
(iv) විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ.

මෙම ප්‍රමේයයෙහි මුල් කොටස් තුන විධිමත්ව සාධනය කරන අයුරු විමසා බලමු.



දත්තය: $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

සාධනය කළ යුත්ත: (i) $AB = DC$ හා $AD = BC$ බව

(ii) $B\hat{A}D = B\hat{C}D$ හා $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ බව

(iii) $ABD\Delta$ යේ වර්ගඵලය $=$ $BCD\Delta$ වර්ගඵලය බව හා

ACD ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $=$ ABC වර්ගඵලය බව

නිර්මාණය: BD විකර්ණය ඇඳීම.

ABD හා BCD ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම කිරීමෙන් අපට අවශ්‍ය ප්‍රතිඵල තුනම ලබාගත හැකි ය. එම ත්‍රිකෝණ දෙක කෝ.කෝ.පා අවස්ථාව යටතේ අංගසම වන බව මෙසේ සාධනය කරමු.

සාධනය: ABD හා BCD ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$A\hat{D}B = C\hat{B}D$ (ඒකාන්තර කෝණ, $AD // BC$)

$A\hat{B}D = B\hat{D}C$ (ඒකාන්තර කෝණ, $AB // DC$)

BD පොදු පාදය

$\therefore ABD\Delta \equiv BCD\Delta$ (කෝ.කෝ.පා.)

අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන බැවින්,

$AB = DC$ හා $AD = BC$ ද

$B\hat{A}D = B\hat{C}D$ ද වේ.

එලෙසම AC විකර්ණය ඇඳීමෙන් $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ බව ද සාධනය කළ හැකි ය.

තව ද $ABD\Delta$ වර්ගඵලය $= BCD\Delta$ වර්ගඵලය ($ABD\ \Delta \equiv BCD\ \ \Delta$ නිසා)

$\therefore DB$ විකර්ණයෙන් සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වේ.

එලෙසම AC විකර්ණය ඇඳීමෙන් AC විකර්ණයෙන් සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සමච්ඡේදනය වන බව පෙන්විය හැකි ය.

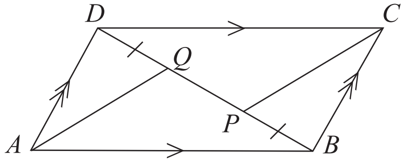
නිදසුන 1

$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ BD විකර්ණය මත P හා Q ලකුණු කර ඇත්තේ $BP = DQ$ වන සේ ය.

(i) $ADQ\Delta \equiv BPC\Delta$ බව

(ii) $AQ // PC$ බව

සාධනය කරන්න.



සාධනය (i) ADQ හා BPC ත්‍රිකෝණවල

$DQ = BP$ (දී ඇත)
$AD = BC$ (සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ පාද සමාන නිසා)
$A\hat{D}Q = P\hat{B}C$ (ඒකාන්තර කෝණ, $AD//BC$)
$\therefore ADQ\Delta \equiv BPC\Delta$ (පා.කෝ.පා.)

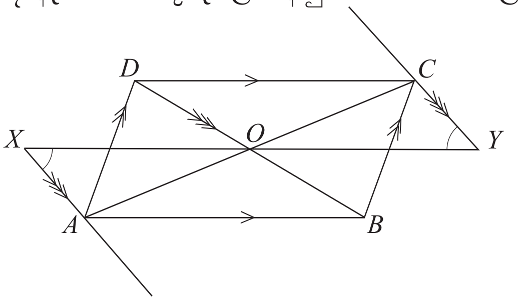
(ii) ADQ හා BPC ත්‍රිකෝණ අංගසම නිසා එවිට අනුරූප අංග සමාන වන බැවින්,
$A\hat{Q}D = B\hat{P}C$

$\therefore A\hat{Q}P = Q\hat{P}C \quad \left(A\hat{Q}D + A\hat{Q}P = B\hat{P}C + C\hat{P}Q = 180^0\right)$

නමුත් $A\hat{Q}P$ හා $Q\hat{P}C$ ඒකාන්තර කෝණ වේ.
ඒකාන්තර කෝණ සමාන වන බැවින්,
$AQ // PC$ වේ.

නිදසුන 2

පහත රූපයේ දී ඇති තොරතුරුවලට අනුව XY හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O බව සාධනය කරන්න.



එනම්, $XO = OY$ බව සාධනය කළ යුතු ය. ඒ සඳහා AOX හා COY ත්‍රිකෝණ අංගසම බව පෙන්වමු.

සාධනය :

$AOX\Delta$ හා $COY\Delta$

$A\hat{X}O = C\hat{Y}O$ ($AX//CY$, ඒකාන්තර කෝණ සමාන නිසා)

$A\hat{X}O = C\hat{Y}O$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$AO = AC$ (සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ.)

$AOX\Delta \equiv COY\Delta$ (කෝ.කෝ.පා.)

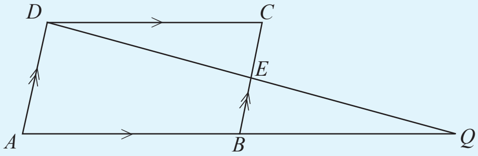
අංගසම ත්‍රිකෝණවල ඉතිරි අනුරූප අංග සමාන වේ.

$\therefore OX = OY$

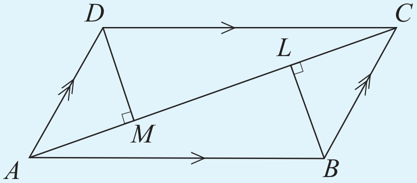
එනම්, XY හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O වේ.

16.2 අභ්‍යාසය

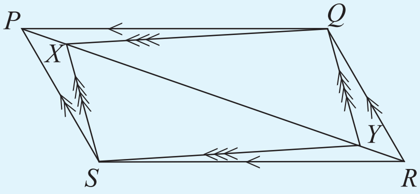
1. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E වේ. AB සහ DE දික්කළ විට, Q හි දී එකිනෙක හමුවේ. $AB = BQ$ බව සාධනය කරන්න.



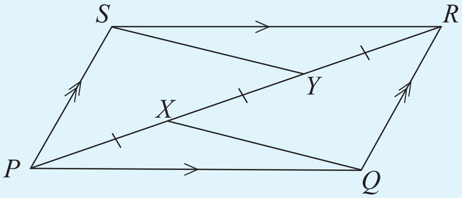
2. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ B සහ D සිට ACට අඳින ලද ලම්බ පිළිවෙළින් BL සහ DM වේ. $BL = DM$ බව පෙන්වන්න.



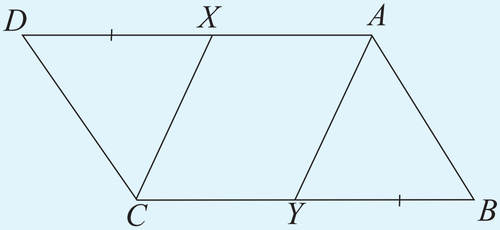
3. රූපයේ දක්වා ඇති $PQRS$ හා $QYSX$ සමාන්තරාස්‍ර දෙකකි.
   (i) $PX = RY$ බව
   (ii) $PSXQ$ වර්ගඵලය $= SRQY$ වර්ගඵලය බව
   සාධනය කරන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයෙහි $PX = XY = YR$ වන පරිදි PR මත X හා Y ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත.
   (i) $QX = SY$ බව ද
   (ii) $QX // SY$ බව ද
   සාධනය කරන්න.



5. රූපයේ දැක්වෙන්නේ $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයකි. එහි AD සහ BC පාද මත පිළිවෙළින් X හා Y පිහිටා ඇත්තේ $DX = BY$ වන පරිදි ය.
   (i) $ABY\Delta \equiv DCX\Delta$ බව ද
   (ii) AY // XC බව ද
   සාධනය කරන්න.

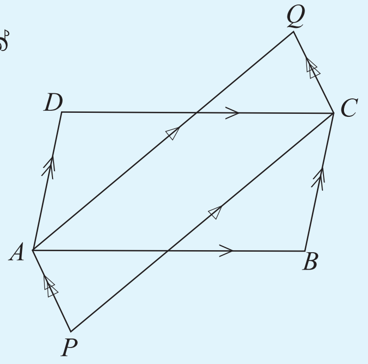


6. රූපයේ $ABCD$ හා $APCQ$ නම් සමාන්තරාස්‍ර දෙකක් දැක්වේ.

(i) AC, BD සහ PQ එකම ලක්ෂ්‍යයක් හරහා වැටී ඇති බව ද

(ii) $DQ//PB$ බව ද

සාධනය කරන්න.



7. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ $P\hat{S}R$ හා $Q\hat{R}S$ යන කෝණවල සමච්ඡේදක PQ මත වූ X ලක්ෂ්‍යයේ දී හමුවේ.

(i) මෙම තොරතුරු ඇතුළත් රූප සටහනක් අඳින්න.

(ii) $PX = PS$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) X යනු PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය බව සාධනය කරන්න.

(iv) $PQ = 2\ PS$ බව සාධනය කරන්න.