අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණ මාලාව -2013

පුණරීක්ෂණ ප්‍රශ්න පත්‍ර (10) සංයුක්ත ගණිතය -II

සකස් කිරීම - අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය මෙහෙයවීමෙන්

මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විතය

A කොටස (ප්‍රශ්න 10 කින් සමන්විතය. සියලුම ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය)

B කොටස (ප්‍රශ්න 7 කින් සමන්විතය. ප්‍රශ්න 5කට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය) කාලය පැය තුනයි

A කොටස

1. ඍජු මාර්ගයක පිහිටි A හා B නම් ස්ථාන දෙකක් අතර දුර 2a වෙයි. AB අතර A වල සිට $\frac{a}{3}$ දුරින් වූ C හි මාර්ග බාධකයක් ඇත. ඒකාකාර u ප්‍රවේගයෙන් A ලක්ෂය පසු කරන රථයක් B දෙසට චලිත වීමේ දී C හි වූ බාධකය නිසා රථයේ ප්‍රවේගය ක්ෂණිකව w ප්‍රමාණයකින් (0<w<u) අඩු වී ඉන්පසු ඒකාකාර මන්දනයක් යටතේ B හි දි නිසලතාවට පත් වේ.
රථයේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග- කාල ප්‍රස්තාරය අඳින්න. එමගින් A සිට B දක්වා රථයේ චලිතයට ගතවූ කාලය ද, එහි මන්දනය ද සොයන්න.

2. O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශිකය පිළිවෙලින් $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$ හා $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ වේ. මෙහි $\boldsymbol{i}$ හා $\boldsymbol{j}$ යනු සුපුරුදු ලෙස OX, OY අක්ෂ ඔස්සේ ඒකක දෛශික වේ.
   a. $A\hat{O}B$ කෝණය සොයන්න.
   b. C හි පිහිටුම් දෛශිකය $-2\boldsymbol{i}+j$ නම් $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}$ ට ලම්බ බව පෙන්වන්න.

3. ස්කන්ධය 3m වූ සුමට A ගෝලයක් සුමට තිරස් තලයක් මත 4v ප්‍රවේගයෙන් සරල රේඛාවක චලිත වෙයි. සමාන තරමේ B නම් ස්කන්ධය 2m වූ සුමට ගෝලයක් ප්‍රතිවිරුද්ධ අතට එම සරලරේඛාව ඔස්සේ 3v ප්‍රවේගයෙන් චලිත වෙමින් සරලව ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු A ගෝලය නිසලවේ. B හි චලිත දිශාව ප්‍රතිවර්ත්‍ය වන බව පෙන්වන්න. ගෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය සොයන්න.

4. පාපැදිකරුවෙක් හා ඔහුගේ පාපැදියේ ස්කන්ධය $90kg$ වේ. ඔහු තිරසට $\sin^{-1}\frac{1}{15}$ ක ආනතියක් ඇති කන්දක් දිගේ පහළට පාපැදිය නොපාගා 36 kmh^{-1} ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ගමන්කරයි. චලිතයට ඇති ප්‍රතිරෝධය සොයන්න. චලිතයට ප්‍රතිරෝධය පාපැදියේ ප්‍රවේගයට සමානුපාතික නම් තිරස් මහක 24 kmh^{-1} ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ගමන්කරන විට පාපැදිකරුගේ ජවය සොයන්න.

5. බර 2w හා අරය a වන සුමට ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක් එහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් තලයක් ස්පර්ශවන ලෙස තබා ඇත. එහි තල මුහුණත මත $\frac{w}{2}$ බර කෘමියෙකු සීරුවෙන් වසයි. එවිට අර්ධගෝලයේ තල මුහුණත තිරසට $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ ක ආනතියක් ඇතිව සමතුලිතතාවයේ පිහිටයි. කෘමියා වැසූ ස්ථානයට තල මුහුණතේ කේන්ද්‍රයේ සිට ඇති දුර සොයන්න.

6. AB වන ඒකාකාර දණ්ඩක දිග 2a හා බර w වෙයි. එහි A කෙලවර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{\sqrt{3}}$ වන රළු තිරස් තලයක් ස්පර්ශ කරමින් ද, දණ්ඩේ C ලක්ෂ්‍යයක් සුමට නාදැත්තක් ස්පර්ශ කරමින් ද සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇත. එවිට දණ්ඩ තිරසට 60^0 ක ආනතියකින් යුක්තය. BC දුර සොයන්න.

7. විවාහයෙන් පසුව අවුරුදු 30කට වඩා ජීවත්ව සිටීමේ සම්භාවිතා ස්වාමියෙකු සහ භාර්යාවක සඳහා පිළිවෙලින් $\frac{1}{3}$ සහ $\frac{1}{2}$ වේ. ස්වාමියා ජීවත් වීම හා ඔහුගේ භාර්යාව ජීවත් වීම යන සිද්ධීන් එකිනෙකින් ස්වායත්ත වේ. එවැනි යුවලක් විවාහයෙන් අවුරුදු 30 කට පසුව,
   (i) දෙදෙනාම ජීවත්ව සිටීමේ
   (ii) අඩු වශයෙන් එක් අයෙකුවත් ජීවත්ව සිටීමේ

සම්භාවිතා සොයන්න.

8. A හා B යනු S නියැදි අවකාශයක වූ ඕනෑ ම සිද්ධි දෙකකි. සුපුරුදු අංකනයෙන් පහත සඳහන් සම්භාවිතා දී ඇත. $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(A/B^1) = \frac{2}{3}$ හා $p(A/B) = \frac{3}{7}$ වන පරිදි වූ සිද්ධීන් දෙකකි. මෙහි B^1 යනු B සිද්ධියේ අනුපූරක සිද්ධියයි.

(i) $P(A \cap B)$ හා $P(A \cup B)$ සොයන්න.

(ii) A හා B සිද්ධීන් දෙක අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ ද? පිළිතුර සනාථ කරන්න.

9. පහත දැක්වෙන සන්තතික ව්‍යාප්තියේ තත්‍ය පංති ප්‍රාන්තර සොයන්න. එහි මාතය හා මධ්‍යස්ථය ගණනය කරන්න

පන්ති ප්‍රාන්තරය	මධ්‍ය අගය	සංඛ්‍යාතය
....	30	15
....	35	23
....	40	17
....	45	15
....	50	10

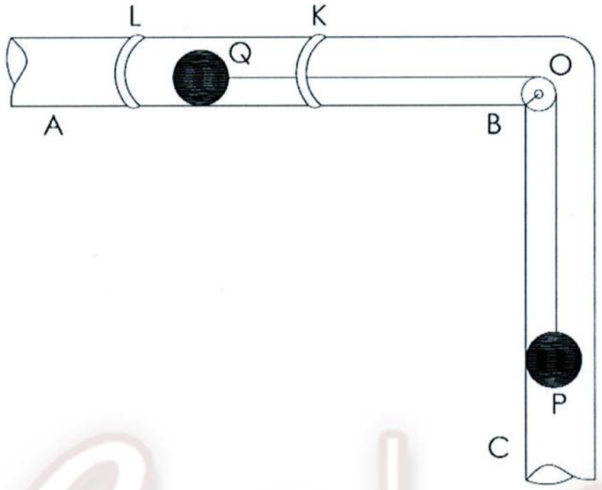
10. දත්ත සමූහයක මධ්‍යන්‍ය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙලින් 42 හා 15 වේ. මධ්‍යන්‍ය 50 හා සම්මත අපගමනය 20 වන පරිදි රේඛීය පරිමාණයක් මගින් දත්ත නැවත සකස්කර ඇත. පළමු අගය 54 වන දත්තයට අනුරූප සංශෝධිත අගය සොයන්න.

<u>B කොටස</u>

11. (a) u kmh^{-1} උපරිම වේගයක් ඇති මෝටර් බෝට්ටුවකට v kmh^{-1} වේගයෙන් වයඹ දිශාවට ගමන්කරන නැවක් ඇල්ලීමට අවශ්‍යව ඇත. ආරම්භයේ දී නැව මෝටර් බෝට්ටුවට d km දුරක් දකුණෙන් පිහිටයි. නැව ඇල්ලීමට මෝටර් බෝට්ටුව චලනය විය යුතු දිශාව ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණයක් ඇසුරෙන් සොයන්න.

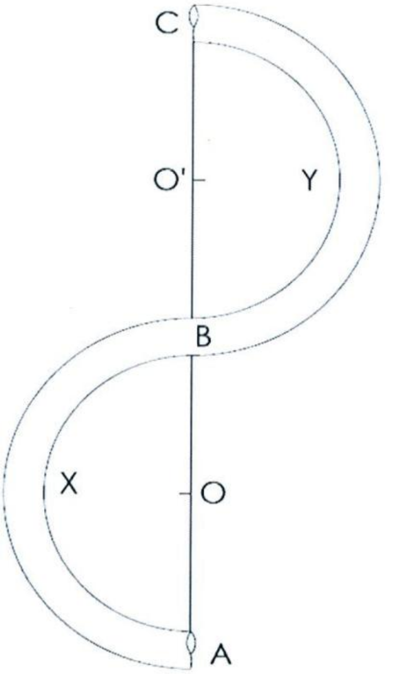
පළමු නිරීක්ෂණයෙන් පසු නැව ඇල්ලීමට ගතවන කාලය සොයන්න.

(b)



රූපයේ දැක්වෙන්නේ B හි සෘජුකෝණීව ඇති M ස්කන්ධයක් සහිත සුමට ABC නලයකි. නලය K හා L නම් අචල සුමට මුදු දෙකක් තුළින් ගමන්කරයි. B හි O නම් නළයට සවිවූ සැහැල්ලු සුමට කප්පියකි. කප්පිය මතින් වැටී ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙලවර ස්කන්ධය m බැගින් වූ P හා Q අංශු දෙකක් වෙයි. පද්ධතිය සීරුවෙන් මුදාහල විට සිදුවන චලිතයේ දී නලයට සාපේක්ෂ ලෙස අංශුවල ත්වරණ සොයන්න. P අංශුව හා නලය අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

12.



රූපයේ දැක්වෙන්නේ අරය a වන AXB හා BYC සුමට අර්ධවෘත්තාකාර සිහින් නලවල සංයුක්තයකි. A ට සිරස් ලෙස ඉහලින් C පිහිටයි. A සිට m ස්කන්ධය සහිත P අංශුවක් තිරස්ව u ප්‍රවේගයෙන් නලය තුළට ප්‍රක්ෂේප කරයි. $AOP\measuredangle = \theta$ වන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය v හා නලය මගින් අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව R වේ.

$v^2 = u^2 - 2ga(1 - \cos\theta)$ බවත්

$R = \frac{m}{a}(u^2 - 2ga + 3ga\cos\theta)$ බවත් පෙන්වන්න.

$u^2 < 4ag$ නම් අංශුව ඉහළ අර්ධ වෘත්තාකාර නලය තුළට පිවිසිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

$u^2 = 10ag$ නම් BO'P$\measuredangle = \alpha$ විට අංශුවේ ප්‍රවේගය V' හා අංශුව මත නලයේ ප්‍රතික්‍රියාව R' සොයන්න.

C වලින් පිටවන අංශුව A හරහා යන තිරස් තලයේ A සිට කොපමණ දුරකින් පතිත වන්නේ දැයි සොයන්න.

13. ස්වභාවික දිග a ද ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය mg ද වන ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙලවරක් මේසයේ දාරයේ සිට $2a$ දුරකින් මේසය මත C අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර තිබේ. එහි අනෙක් කෙලවරට ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් අමුණා ඇත. අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙලවරක් P අංශුවට ඈඳා එහි අනෙක් කෙළවරට m ස්කන්ධය ඇති Q අංශුවක් අමුණා ඇත. ආරම්භයේ දී P අංශුව C ට a දුරකින් තබා ඇත. අවිතන්‍ය තන්තුව Q අංශුව සමග මේසයේ දාරයට ලම්බව දාරයෙන් පහළට එල්ලේ. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදාහල විට t කාලයේ දී ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවේ දිග x වේ $(x \leq 2a)$

සුපුරුදු අංකනයෙන් $\ddot{x} + \frac{g}{a}(x - 2a) = 0$ බව පෙන්වන්න. $x - 2a = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ලෙස ගනිමින් A හා B නියත සොයන්න. මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ වේ. ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවට ලැබිය හැකි උපරිම දිග ද එවිට අවිතන්‍ය තන්තුවේ ආතතිය ද සොයන්න. (මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණය වේ.)

14. (a) අරය r ද, බර w ද, කේන්ද්‍රය O ද වන ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක් මත වූ P ලක්ෂ්‍යයකට බර w' අංශුවක් සවිකර ඇත. තැටියේ පරිධියේ ලක්ෂ්‍ය දෙකක් රළු තිරස් පොළවක් හා රළු සිරස් බිත්තියකට ලම්බව ස්පර්ශව සිරස් තලයක සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇත. O ට ඉහළින් P පිහිටා ඇත. බිත්තියේ සිට P ට ඇති තිරස් දුර $\frac{r}{2}$ වේ. ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහි ම ඝර්ෂණ කෝණ λ වේ.

(i) $\cos 2\lambda - \sin 2\lambda = \frac{w}{w+w'}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $w' = w(\sqrt{2} - 1)$ නම් λ සොයන්න.

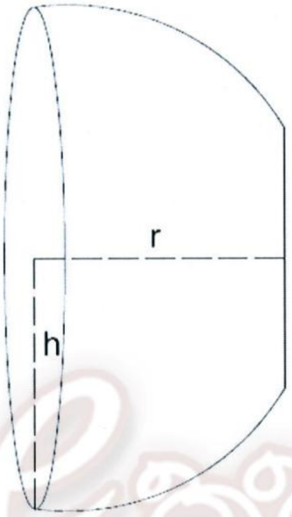
(b) පාදයක දිග a වූ ABCDEF සවිධි ෂඩස්‍රයේ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, හා $\overrightarrow{FA}$, පාද ඔස්සේ පිළිවෙලින් $\lambda, 2\lambda$, μ , μ, 2λ හා λ වූ බල ක්‍රියාකරයි. පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය E හරහා යයි. μ හි අගය λ ඇසුරෙන් සොයන්න. තව ද බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය C ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බවත් එහි අගය $8\sqrt{3}\ \lambda$ බවත් පෙන්වන්න. බල පද්ධතියට එහි තලයේ ක්‍රියාකරන $4a\lambda\sqrt{3}$ ඝූර්ණයක් සහිත BAF දිශාවට ඇති බල යුග්මයක් යෙදූ විට බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව AB පාදය හමුවන තැනට A සිට ඇති දුර සොයන්න.

15. (a) W බර සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක් ABCD රොම්බසයක් ලැබෙන පරිදි සුමටව අසව් කර ඇත. පද්ධතිය D ලක්ෂ්‍යයෙන් වලින් නිදහසේ එල්ලා ඇති අතර $A\hat{D}C = \frac{\pi}{3}$ වන පරිදි A හා CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් සම්බන්ධ කර ඇත. C සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවත් සැහැල්ලු දණ්ඩේ බලයත් සොයන්න.

(b) සමාන සැහැල්ලු දඬු හතරක් ABCD රොම්බසයක ආකාරයට දෘඩ ලෙස අසව් කර $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ වන පරිදි AC සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් සම්බන්ධ කර ඇත. B හා D ලක්ෂ්‍යවලට සම්බන්ධ කර ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් සැකිල්ල එල්ලා ඇත. C ට ඉහළින් A පිහිටන පරිදි C හි 2w භාරයක් එල්ලා ඇත. පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පිහිටන විට තන්තු දෙක තිරසට $\frac{\pi}{6}$ කෝණ සාදයි. තන්තුවල ආතති සොයන්න.

බෝ අංකනය යොදාගනිමින් B සන්ධියට පමණක් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න. එනයින් AB, BC , CD හා DA දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල ආතති හා තෙරපුම් ලෙස වෙන්කොට දක්වමින් ඒවා සොයන්න.

16.



අරය r වන ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක තල මුහුණතේ කේන්ද්‍රයේ සිට $h(\leq r)$ දුරකින් සමමිතික අක්ෂයට ලම්බකව තල මුහුණතට සමාන්තර තලයක් ඔස්සේ කැපීමෙන් වෙන්කර ගත් ඝන වස්තුවක් රූපයේ දැක්වේ. මෙම ඝන වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය අනුකලනය භාවිතයෙන් සොයන්න.

එනයින් ඝන අර්ධගෝලයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අපෝහනය කරන්න.

රූපයේ දැක්වෙන එම ඝන වස්තුව කුඩා වෘත්තාකාර තල මුහුණතෙහි පරිධිය මත ලක්ෂ්‍යයකින් නිදහසේ එල්ලනු ලැබේ. කුඩා වෘත්තාකාර තල මුහුණත තිරසට දක්වන ආනතිය සොයන්න.

17. (a) x_1, x_2, x_3 , ,,.........., x_n යනු සංගහණයකින් ගත් නිරීක්ෂණ n වේ. එහි නියැදි මධ්‍යන්‍ය $\bar{x}$ ද, නියැදි විචලතාව s_x^2 ද අර්ථ දක්වන්න.

y_1, y_2, y_3 , ,,.........., y_m යනු දෙවන සංගහණයකින් ගත් නිරීක්ෂණ m වේ. එහි $\bar{y}$ හා s_y^2 පිළිවෙලින් නියැදි මධ්‍යන්‍ය හා නියැදි විචලතාව වේ. සංගහණය දෙක ම එකට ගත් විට නියැදි මධ්‍යන්‍ය $\bar{z}$ සහ නියැදි විචලතාව s_z^2 නම්

$$\bar{z} = \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}$$ බව ද,

$$s_z^2 = \frac{ns_x^2+ms_y^2}{n+m} + \frac{n(\bar{z}-\bar{x})^2+m(\bar{z}-\bar{y})^2}{n+m}$$ බව ද

පෙන්වන්න.

සසම්භාවීව තෝරාගත් A හා B නියැදි දෙකක් සඳහා ගණනය කළ තොරතුරු පහත දැක්වේ.

	දත්ත සංඛ්‍යාව	නියැදි මධ්‍යන්‍ය	නියැදි විචලතාව
නියැදිය A	100	41	9
නියැදිය B	50	38	4

නියැදි දෙකම එකට සැලකූ විට සංයෝජිත නියැදියේ මධ්‍යන්‍ය හා විචලතාව ගණනය කරන්න.

(b) පෙට්ටියක කාඩ් පත් 13ක් තිබේ. එයින් කාඩ්පත් 6ක අංක 1 ද, තවත් කාඩ්පත් 4ක අංක 2 ද, ඉතිරිවායේ අංක 3 ද සටහන් කර ඇත. අංක 1 , 2 හා 3 ලෙස සටහන් කර ඇති භාජන තුනක් ඇත. අංක 1 භාජනයේ රතු බෝල r_1 ද , කලු බෝල b_1 ද, අංක 2 භාජනයේ රතු බෝල r_2 ද, කලු බෝල b_2 ද, අංක 3 භාජනයේ රතු බෝල r_3 ද, කලු බෝල b_3 ද ඇත. පෙට්ටියෙන් කාඩ් පතක් ගෙන එහි සඳහන් අංකය ඇති භාජනයෙන් බෝලයක් ඉවතට ගනී. මෙම සිද්ධි දැක්වෙන රුක් සටහනක් අඳින්න.

(i) ඉවතට ගත් බෝලය කලු එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) ඉවතට ගත් බෝලය කලු එකක් නම් එය අංක 3 භාජනයෙන් ගත් බෝලයක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.