සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

නව/පැරණි නිර්දේශය – புதிய/பழைய பாடத்திட்டம் – New/Old Syllabus

NEW/OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2020
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2020
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2020

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) A, B හා C යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උපකුලක යැයි ගනිමු. ඔබ භාවිත කරන කුලක වීජයෙහි නියමයන් පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරමින්,

(i) $A' \cup \big((A \cup B) - B\big) = (A \cap B)'$,

(ii) $(A \cup B \cup C) - \big((A - C) - B\big) = B \cup C$,

බව පෙන්වන්න; මෙහි $A - B$ යන්න $A \cap B'$ අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

(*b*) සිසුන් 100 දෙනෙකු සිටින සංගීත පන්තියක, වයලීන් වාදනයට කැමති සිසුන් 85 දෙනෙකු ද, පියානෝ වාදනයට කැමති සිසුන් 20 දෙනෙකු ද ගිටාර් වාදනයට කැමති සිසුන් 45 දෙනෙකු ද සිටියි. තවද, වයලීන් හා පියානෝ වාදනයට කැමති 10 දෙනෙකු ද, පියානෝ හා ගිටාර් වාදනයට කැමති 15 දෙනෙකු ද ගිටාර් හා වයලීන් වාදනයට කැමති 30 දෙනෙකු ද සිටියි. සෑම සිසුවෙක්ම මෙම වාද්‍ය භාණ්ඩ තුනෙන් අඩු තරමින් එක් වාද්‍ය භාණ්ඩයක් හෝ වාදනය කිරීමට කැමති බව උපකල්පනය කරමින්,

(i) වාද්‍ය භාණ්ඩ තුනම,

(ii) වයලීනය හා ගිටාරය, නමුත් පියානෝව හැර,

(iii) වයලීනය හෝ ගිටාරය,

වාදනය කිරීමට කැමති සිසුන් ගණන සොයන්න.

12. (*a*) $a, b, c > 0$ යැයි ගනිමු.

(i) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ බව පෙන්වා, $(a+b)\,(b+c)\,(c+a) \geq 8abc$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(ii) $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ භාවිතයෙන්, $a+b+c=2$ නම්, $(1-a)\,(1-b)\,(1-c) \leq \dfrac{1}{27}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ පරිණාමනය මගින් xy-තලයේ ලක්ෂ්‍ය $x'y'$-තලයේ ලක්ෂ්‍ය බවට අනුරූපණය වේ.

ඉහත පරිණාමනය යටතේ ඒවා මතටම අනුරූපණය වන, xy-තලයේ වූ $(0, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

$A \equiv (1, 1)$ හා $B \equiv (1, 0)$ යනු xy-තලයේ ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යැයි ගනිමු. ඒවායේ ප්‍රතිබිම්බ, $x'y'$-තලයේ වූ $2x' - 3y' - 5 = 0$ රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

13. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා **ද මුවාවර් ප්‍රමේයය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $\cos\theta \neq 0$ සඳහා

$\dfrac{\cos 5\theta}{\cos\theta} = 16\cos^4\theta - 20\cos^2\theta + 5$ බව පෙන්වන්න.

මෙම ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්,

(i) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 5\theta \tan\theta \, \mathrm{d}\theta$ අගයන්න.

(ii) $16x^2 - 20x + 5 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල $\cos^2\dfrac{\pi}{10}$ හා $\cos^2\dfrac{3\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$\sec^2\dfrac{\pi}{10} + \sec^2\dfrac{3\pi}{10} = \dfrac{1}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

14.(*a*) C_1 යනු $x^2 + 6y^2 = 25$ ඉලිප්සය ද C_2 යනු $y^2 = 4x$ පරාවලය ද යැයි ගනිමු. ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක දක්වමින් C_1 හා C_2 හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න.

C_1 හා C_2 වක්‍ර මගින් ආවෘත වන **පළමු වෘත්ත පාදකය** තුළ වූ R පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

R පෙදෙස x-අක්ෂය වටා 2π රේඩියනවලින් පරිභ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයේ පරිමාවත් සොයන්න.

(*b*) වක්‍ර කුලයක් $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x + 4y - 1}{x + 2y - 3}$ යන අවකල සමීකරණය තෘප්ත කරයි.

$v = x + 2y$ යන ආදේශය භාවිතයෙන් දෙන ලද අවකල සමීකරණය $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{5(v-1)}{(v-3)}$ බවට පරිණාමනය වන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, දෙන ලද වක්‍ර කුලය මගින් තෘප්ත කරන සමීකරණය x හා y ඇසුරෙන් සොයන්න.

මෙම වක්‍ර කුලකයෙහි ප්‍රලම්බ පරාවක්‍ර මගින් තෘප්ත කරන අවකල සමීකරණයද ලබා ගන්න.

15.(*a*) $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a > 0$ වේ.

$n \geq 2$ සඳහා $2(n-1)a^2 I_n = \dfrac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^4}$ සොයන්න.

(*b*) f යනු $(x^2 + 1)\, f''(x) + 2x\, f'(x) + f(x) = 0$ වන පරිදි වූ ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු.

$(x^2 + 1)\, f'''(x) + 4x\, f''(x) + 3f'(x) = 0$ බව පෙන්වන්න.

$f(0) = 1$ හා $f'(0) = 2$ බව දී ඇත.

$f(x)$ හි මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණිය, x^3 අඩංගු පදය දක්වා, එයත් ඇතුළත්ව, x හි ආරෝහණ බලවලින් සොයන්න.

මෙය භාවිතයෙන් $\displaystyle\int_0^{0.1} f(x)\,\mathrm{d}x$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

16. S යනු $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ඉලිප්සය යැයි ගනිමු.

$P\equiv(a\cos\theta, b\sin\theta)$ හා $Q\equiv(a\cos\phi, b\sin\phi)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන ජ්‍යායේ සමීකරණය

$\dfrac{x}{a}\cos\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)+\dfrac{y}{b}\sin\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

P හි දී S ට ඇඳි ස්පර්ශකයෙහි සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

P හා Q ලක්ෂ්‍යවල දී S ට ඇඳි ස්පර්ශක R ලක්ෂ්‍යක දී ඡේදනය වේ.

$R\equiv\left(a\dfrac{\cos\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)},\ b\dfrac{\sin\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)}\right)$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, S මත P හා Q ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ $\phi=\theta-\dfrac{\pi}{3}$ වන පරිදි යැයි සිතමු. R ලක්ෂ්‍යය $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{4}{3}$ ඉලිප්සය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

P හි දී S ට ඇඳි ස්පර්ශකයට සමාන්තරව $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{4}{3}$ ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකවල සමීකරණ සොයන්න.

17. (*a*) $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{5}+\sin x}$ යැයි ගනිමු.

(i) $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $0\le x\le\pi$ සඳහා $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) පහත වගුවෙන්, 0 හා 6 අතර දිග 1 ක් වූ ප්‍රාන්තරවල දී වූ x හි අගයන් සඳහා $f(x)=\ln(3+x^2)$ යන ශ්‍රිතයෙහි අගයන් දශමස්ථාන හතරකට නිවැරදිව දෙයි.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.0986	1.3863	1.9459	2.4849	2.9444	3.3322	3.6636

සිම්සන් නීතිය භාවිතයෙන්, $I=\displaystyle\int_0^6 \ln(3+x^2)\,\mathrm{d}x$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^6 \ln(3e+ex^2)\,\mathrm{d}x$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

* * *