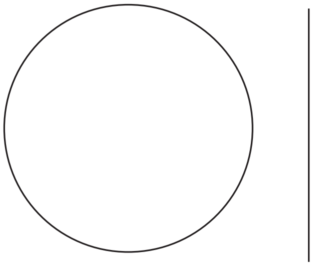
22 ස්පර්ශක

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

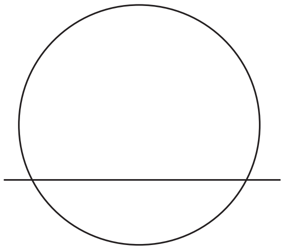
- වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට
- ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ හඳුනා ගැනීමට හා ඒ සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

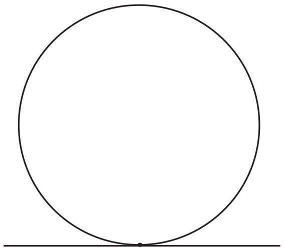
22.1 ස්පර්ශක



(i) රූපය



(ii) රූපය



(ii) රූපය

(i) රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට හා සරල රේඛාවට පොදු වූ ලක්ෂ්‍ය නොමැත. එවිට සරල රේඛාව වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි.

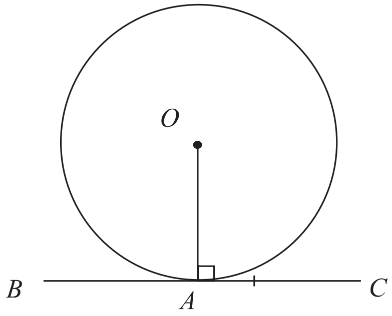
(ii) රූපයේ සරල රේඛාවෙන් වෘත්තය ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය වේ. සරල රේඛාවට සහ වෘත්තයට පොදු ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත. එවිට සරල රේඛාව වෘත්තයේ ඡේදකයක් ලෙස හැඳින්වේ.

(iii) රූපයේ ඇති සරල රේඛාවට සහ වෘත්තයට එක් පොදු ලක්ෂ්‍යයක් පමණක් ඇත. මෙවිට සරල රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි යැයි කියනු ලබන අතර එවිට සරල රේඛාව වෘත්තයේ "**ස්පර්ශකයක්**" ලෙස හැඳින්වේ.

ස්පර්ශකයට හා වෘත්තයට පොදු ලක්ෂ්‍යය **ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය** ලෙස හැඳින්වේ.

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අරයට ලම්බව අඳින ලද රේඛාව

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අරයට ලම්බ ව අඳින ලද රේඛාව පිළිබඳ ව කරුණු ඉගෙන ගැනීම සඳහා පහත කරුණු කෙරෙහි ඔබේ අවධානය යොමු කරන්න.



ඉහත රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත වූ A ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරය OA වේ. OAට ලම්බ වන පරිදි A හි දී ඇඳි ලම්බකය BC වේ. මෙහි BC රේඛාව වෘත්තය හමුවන්නේ A ලක්ෂ්‍යයේ දී පමණි. ද BC රේඛා ඛණ්ඩය A හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බව ද පැහැදිලි ය.

එනම්,

වෘත්තය මත වූ A ලක්ෂ්‍යයේ දී OA අරයට ලම්බව A හි දී ඇඳි රේඛා ඛණ්ඩය වන BC මෙම වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ. මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය: වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.

තව ද, වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වන සේ ම මෙහි විලෝමය ද සත්‍ය වේ.

එනම්,

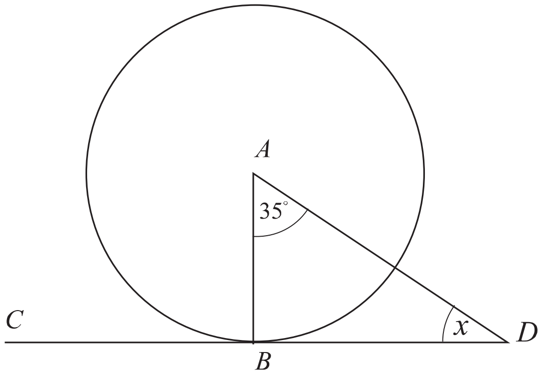
වෘත්තය මත ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයක් ඇඳ, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී අරය ද ඇඳි විට, එම ස්පර්ශකය හා අරය එකිනෙක ලම්බ වේ.

එම ප්‍රතිඵලය ද ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයයේ විලෝමය : වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරයට ලම්බ වේ.

නිදසුන 1

කේන්ද්‍රය A වන වෘත්තයට ඒ මත පිහිටි B හි දී ඇඳි ස්පර්ශකය CD වේ. $B\hat{A}D = 35^{o}$ නම් x හි අගය සොයන්න.



$A\hat{B}D = 90^{o}$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා)

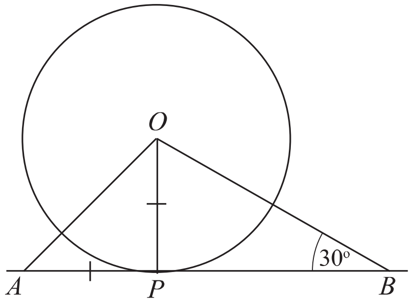
ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා

$35^{o} + 90^{o} + x = 180^{o}$

$x = 180^{o} - 35^{o} - 90^{o}$

$\underline{\underline{x = 55^{o}}}$

නිදසුන 2



රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. $OP = AP$ සහ $O\hat{B}P = 30^{o}$ නම් $A\hat{O}B$ අගය සොයන්න.

$O\hat{P}A = 90^{o}$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා)

$OP = AP$ (දී ඇත)

$\therefore P\hat{O}A = P\hat{A}O$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා)

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

APO ත්‍රිකෝණයෙහි,

$P\hat{A}O + P\hat{O}A + O\hat{P}A = 180^o$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා)

$\therefore \; P\hat{A}O + P\hat{O}A + 90^o = 180^o$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 180^o - 90^o$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 90^o$

$\therefore \; 2\, P\hat{A}O = 90^o$ ($P\hat{A}O = P\hat{O}A$ නිසා)

$P\hat{A}O = \dfrac{90^o}{2}$

$= 45^o$

AOB ත්‍රිකෝණයෙහි,

$A\hat{O}B + P\hat{A}O + P\hat{B}O = 180^o$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා)

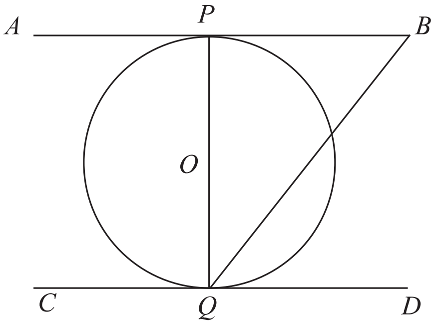
$A\hat{O}B + 45^o + 30^o = 180^o$

$A\hat{O}B + 75^o = 180^o$

$A\hat{O}B = 180^o - 75^o$

$= \underline{\underline{105^o}}$

නිදසුන 3



PQ යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. වෘත්තයට P හා Q හි දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AB සහ CD වේ. $P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ බව පෙන්වන්න.

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා,

$Q\hat{P}B = 90^o$ හා

$P\hat{Q}D = 90^o$ වේ.

$\therefore \; Q\hat{P}B + P\hat{Q}D = 90^o + 90^o$

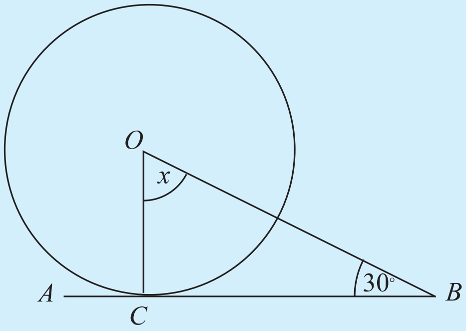
$= 180^o$

$\therefore \; AB \,//\, CD$ (මිත්‍රකෝණ පරිපූරක නිසා)

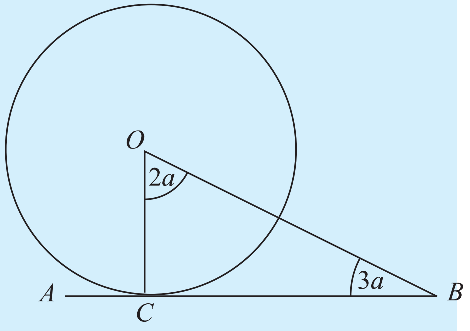
$\therefore \; P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ ($AB \,//\, CD$ සහ ඒකාන්තර කෝණ)

22.1 අභ්‍යාසය

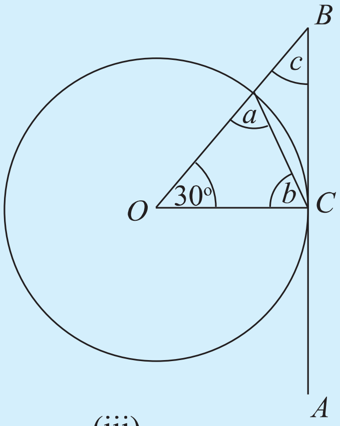
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද AB යනු වෘත්තය මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය ද වේ. දී ඇති දත්ත අනුව, වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.



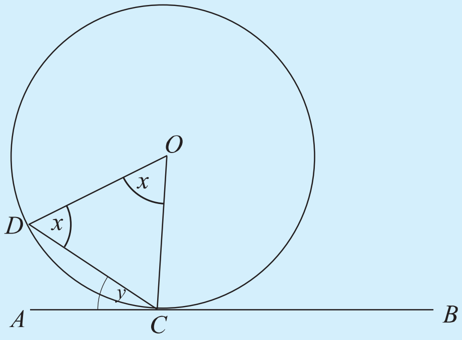
(i)



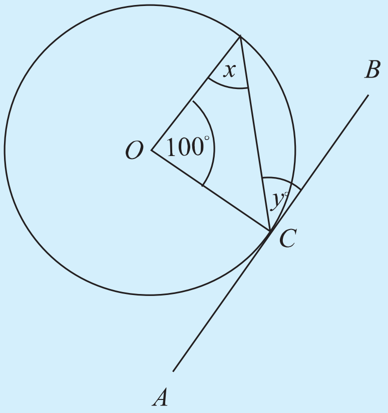
(ii)



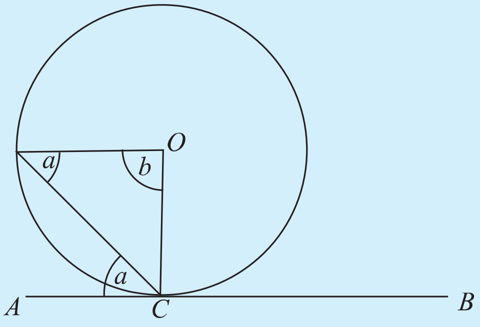
(iii)



(iv)



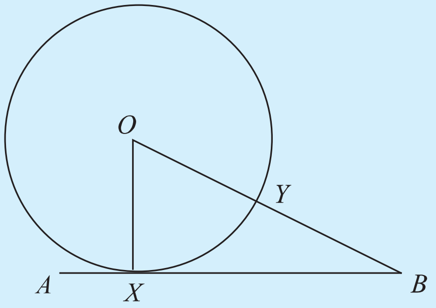
(v)



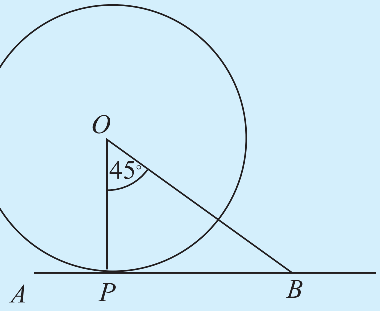
(vi)

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

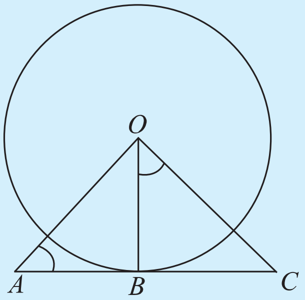
2. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි X ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. වෘත්තයේ අරය 6 cm ද YB = 4 cm ද නම් XB හි දිග සොයන්න.



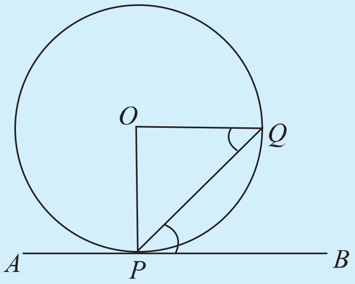
3. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB ද $B\hat{O}P = 45^{\circ}$ ද PB = 6 cm ද නම් වෘත්තයේ අරය සොයන්න.



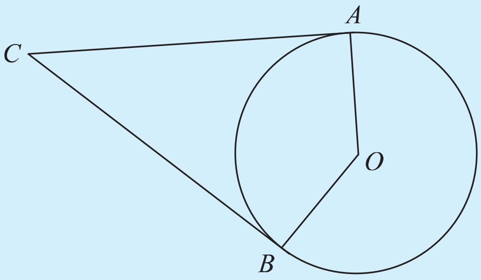
4. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට B හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AC වේ. $O\hat{A}B = B\hat{O}C$ නම් $A\hat{O}B = B\hat{C}O$ බව පෙන්වන්න.



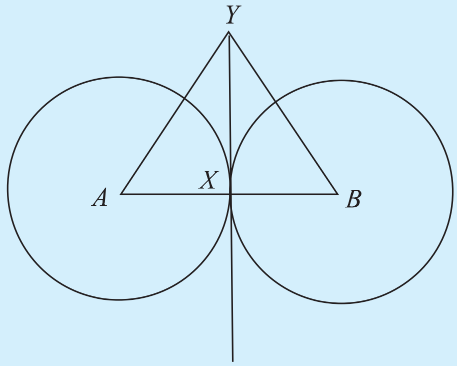
5. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. $O\hat{Q}P = Q\hat{P}B$ වන ලෙස Q ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය මත පිහිටයි. OQ හා PO එකිනෙකට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.



6. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ B ලක්ෂ්‍යවලදී ඇඳි ස්පර්ශක C ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. $AOBC$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



7. රූපයේ දැක්වෙන්නේ අර සමාන වූ ද කේන්ද්‍ර A හා B වූ ද වෘත්ත දෙකකි. Y ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $AY = YB$ වන පරිදි ය. YX රේඛාව වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශකයක් වන බව පෙන්වන්න.



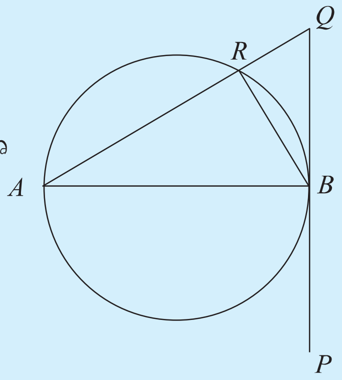
X

8. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ AB විෂ්කම්භයක් වන අතර PQ රේඛාව B ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.

(i) $Q\hat{R}B = 90^\circ$ බව

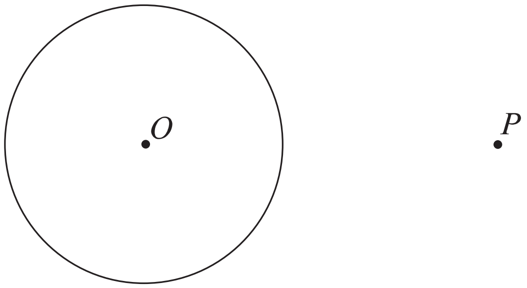
(ii) $A\hat{B}R = R\hat{Q}B$ බව

පෙන්වන්න.

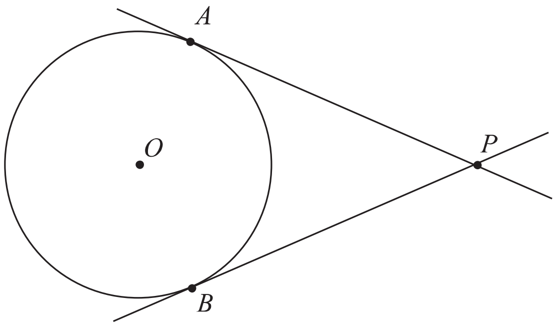


22.2 බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශක

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට පිටතින් පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක් සලකමු.

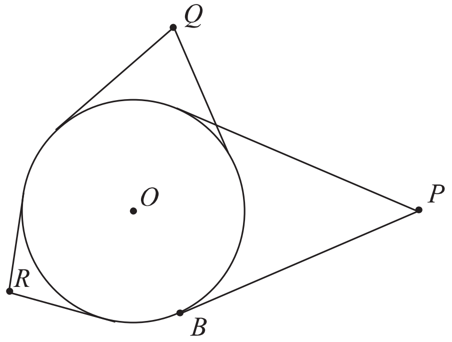


මෙම P ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරමින් වෘත්තය ස්පර්ශ කරන රේඛා දෙකක් ඇඳිය හැකි ය. එසේ ඇඳ ඇති රේඛා දෙක පහත රූපයේ දැක්වේ.



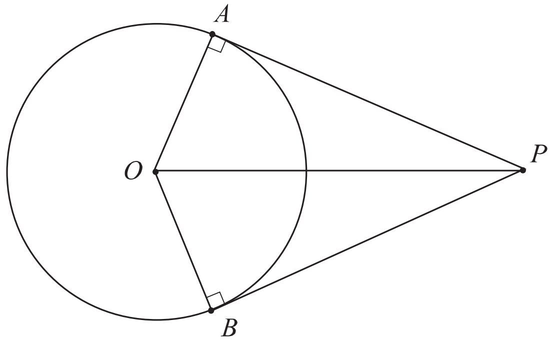
මෙම ස්පර්ශක දෙකට, P බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක යැයි කියනු ලැබේ.

P ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් කොතැනක පිහිටියත් මෙවැනි ස්පර්ශක යුගලයක් ඇඳිය හැකි බව අවබෝධ කර ගන්න. පහත රූපයේ දැක්වෙන්නේ P, Q හා R ලක්ෂ්‍ය තුනක් හරහා ඇඳ ඇති ස්පර්ශක යුගල තුනකි.



බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට මෙසේ ස්පර්ශක යුගලක් ඇඳි විට ලැබෙන රූපයෙහි ජ්‍යාමිතික ලක්ෂණ පිළිබඳ ව දැන් විමසා බලමු.

ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍ය දෙක A හා B ලෙස ලකුණු කොට, OA හා OB අරත්, OP රේඛා ඛණ්ඩයත් අඳිමු.



ඉහත 22.1 කොටසේ දී උගත් පරිදි, ස්පර්ශකය හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරය එකිනෙකට ලම්බ නිසා ඒ බව රූපයේ ලකුණු කොට ඇත.

මෙම රූපයේ ඇති OAP හා OBP ත්‍රිකෝණ දෙක දෙස බැලූ සැනින්, සමමිතිය අනුව, ඒවා අංගසම බව අපට අනුමාන කළ හැකි ය. ඇත්ත වශයෙන් ම ඒවා අංගසම වේ. ඒ බව පහසුවෙන් සාධනය කළ හැකි ය. එම සාධනය කරන ආකාරය පිළිබඳ වැටහීමක් ලබා ගනිමු. ඒ සඳහා, එම ත්‍රිකෝණ දෙක ම සෘජුකෝණික බව පළමු ව නිරීක්ෂණය කරන්න. ඒ අනුව, එක් ත්‍රිකෝණයක කර්ණය හා තවත් පාදයක්, අනෙක් ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයට හා තවත් පාදයකට සමාන බව පෙන්වීමෙන්, කර්ණ පා. අවස්ථාව යටතේ එම සාධනය සිදු කළ හැකි ය. ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි ම කර්ණය වන්නේ OP පොදු පාදයයි. තව ද OA හා OB අර නිසා එම පාද ද සමාන වේ. මේ අනුව ත්‍රිකෝණ දෙක කර්ණ පා. අවස්ථාව යටතේ අංගසම වේ. එසේ අංගසම වූ පසු, අනුරූප අංග සමාන වන නිසා,

(i) $AP = BP$ වේ; එනම් ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ වේ; එනම් මගින් ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේද වේ.

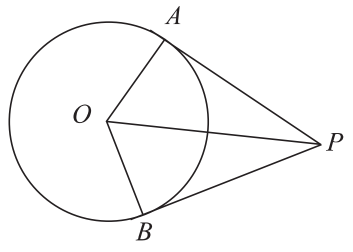
(iii) $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ වේ; එනම් ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයෙහි සමාන කෝණ ආපාතනය කෙරෙයි.

මෙම සාකච්ඡා කළ කරුණු, ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත දැක්වේ.

ප්‍රමේයය : බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් අඳිනු ලැබේ නම්.

(i) ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.
(ii) බාහිර ලක්ෂ්‍යය හා වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.
(iii) ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයේ සමාන කෝණ ආපාතනය කරයි.

මෙම ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරන අයුරු විමසා බලමු.



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට A හා B හිදී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AP සහ BP වේ.

සාධනය කළ යුත්ත :

(i) $AP = BP$ බව
(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ බව
(iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$ බව

සාධනය : $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^o$ (ස්පර්ශක අරයට ලම්බ වන නිසා)

$\therefore$ POA සහ POB ත්‍රිකෝණ. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ වේ.

දැන් POA සහ POB ත්‍රිකෝණවල

$OA = OB$ (එකම වෘත්තයේ අර)

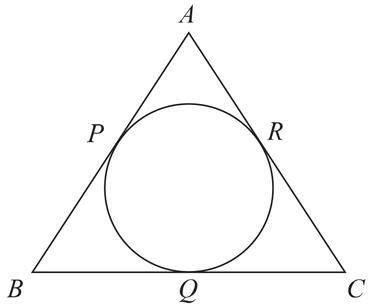
OP පොදු පාදය

$\therefore$ $POA\,\Delta \equiv POB\Delta$ (කර්ණ පා.)

අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ.

$\therefore$ (i) $AP = BP$
$\therefore$ (ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$
$\therefore$ (iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$

නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය ABC ත්‍රිකෝණයේ පාද P, Q සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී ස්පර්ශ කෙරේ. $AB = 11$ cm සහ $CR = 4$ cm නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ ඇති විට ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.

$\therefore\ AP = AR$ ද

$BP = BQ$ ද

$CR = CQ$ ද වේ.

ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය $= AB + BC + CA$

$= 11 + (BQ + QC) + (CR + RA)$

$= 11 + (BP + CR) + (CR + AP)$

$= 11 + (BP + 4) + (4 + AP)$

$= 19 + (BP + AP)$

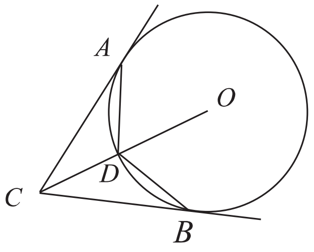
$= 19 + AB$

$= 19 + 11$

$= 30$

$\therefore$ ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 30 cm වේ.

නිදසුන 2

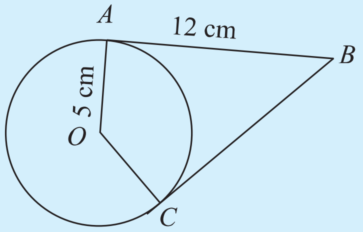


රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට බාහිරින් පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇඳි ස්පර්ශක A සහ B ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තය ස්පර්ශ කෙරේ. වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය වන O සහ C යා කෙරෙන සරල රේඛාව D හිදී වෘත්තය ඡේදනය කෙරේ. $AD = BD$ බව පෙන්වන්න.

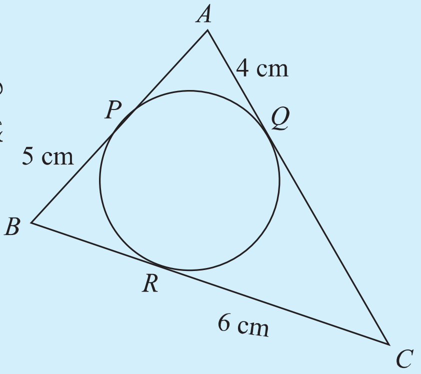
ACD හා BCD ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම කිරීමෙන් අවශ්‍ය ප්‍රතිඵලය සාධනය කළ හැකි ය.
ACD සහ BCD ත්‍රිකෝණවල
$AC = BC$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයනට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ තිබේ නම් ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.)
$A\hat{C}O = B\hat{C}O$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ තිබේ නම් බාහිර ලක්ෂ්‍යයත් කේන්ද්‍රයත් යා කරන සරල රේඛාවෙන් ස්පර්ශක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය වේ)
CD පොදු පාදය
$\therefore\ ACD\Delta \equiv BCD\Delta$ (පා.කෝ.පා.)
$\therefore\ \underline{\underline{AD = BD}}$ (අංගසම ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමාන නිසා)

22.2 අභ්‍යාසය

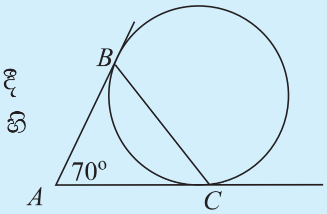
1. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක B හි දී හමු වේ. වෘත්තයේ අරය 5 cm ද AB = 12 cm ද නම් $ABCO$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.



2. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය මත පිහිටි P, Q හා R ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AB, AC සහ BC වේ. RC = 6 cm ද BP = 5 cm ද AQ = 4 cm ද නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

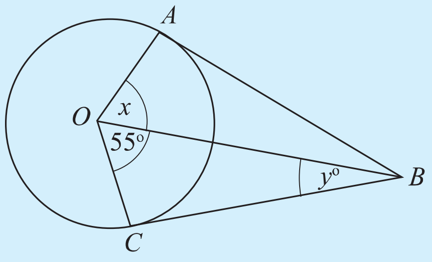


3. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය මත පිහිටි B සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක A හි දී ඡේදනය වේ. $B\hat{A}C = 70^{o}$ නම් $A\hat{B}C$ හි අගය සොයන්න.

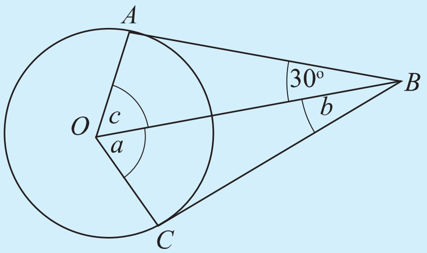


4. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද වෘත්ත මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක හමුවන ලක්ෂ්‍ය B ද වේ. දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන්, වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

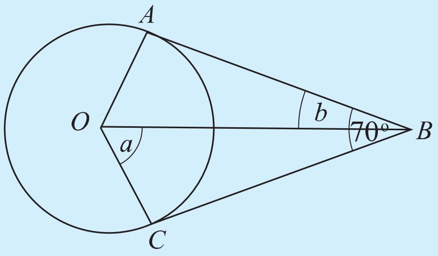
(i)



(ii)

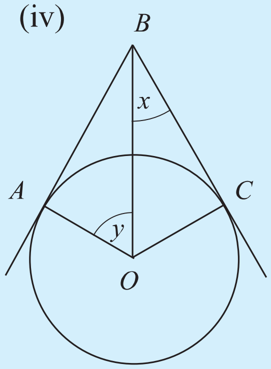


(iii)



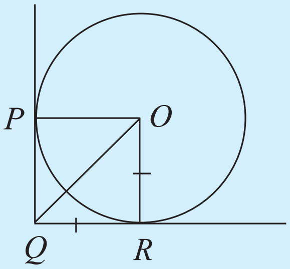
$A\hat{B}C = 70^\circ$

(iv)



$A\hat{O}C = 110^\circ$

5. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ P සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක Q හිදී හමුවේ. $QR = OR$ නම්, $PQRO$ යන්න සමචතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

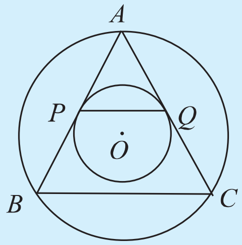


6. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ විශාල වෘත්තය මත A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. වෘත්තය තුළ පිහිටි කුඩා වෘත්තය P සහ Q ලක්ෂ්‍යවල දී AB හා AC ස්පර්ශ කරයි.

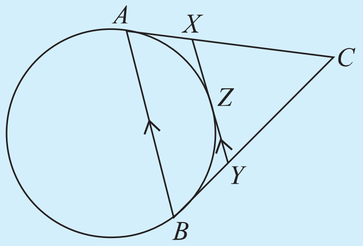
(i) APQ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව

(ii) $BC // PQ$ බව

පෙන්වන්න.



7. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $XC = CY$ බව පෙන්වන්න. දී ඇති වෘත්තයට A, B හා Z හි දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AC, BC හා XY වේ.



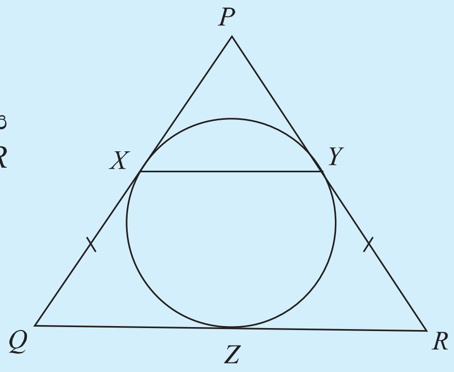
8. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට P සිට අඳින ලද ස්පර්ශක X හා Y ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. $XQ = YR$ වන සේ අඳින ලද QR සරල රේඛාව Z හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.

(i) $PR = PQ$ බව

(ii) $QR = XQ + YR$ බව

(iii) $XY \parallel QR$ බව

පෙන්වන්න.



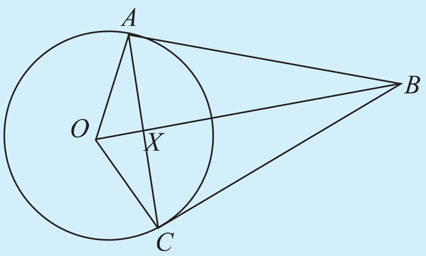
9. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවලදී ඇඳි ස්පර්ශක B හිදී එකිනෙක හමුවේ.

(i) $OAX\,\Delta \equiv OCX\,\Delta$ බව

(ii) OB රේඛාව AC රේඛාවේ ලම්බ සමච්ඡේදකය බව

(iii) $A\hat{O}C = 2\,A\hat{C}B$ බව

පෙන්වන්න.

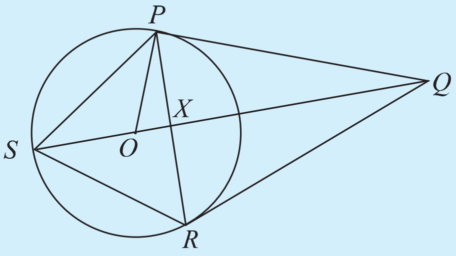


10. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට Q සිට ඇඳි ස්පර්ශක PQ සහ QR වේ. දික් කරන ලද QO රේඛාවට S හි දී වෘත්තය හමුවේ.

(i) $PQS\,\Delta \equiv QRS\,\Delta$ බව

(ii) $2\,O\hat{P}X = P\hat{Q}R$ බව

පෙන්වන්න.

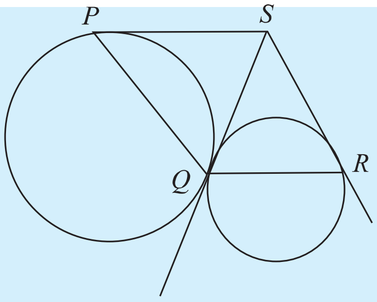


11. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙකම මත Q ලක්ෂ්‍යය පිහිටන අතර QS රේඛාව වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශකයක් වේ. S සිට වෘත්ත දෙකට අඳින ලද අනෙක් ස්පර්ශක දෙක P සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්ත ස්පර්ශ කරයි.

(i) $PS = SR$ බව

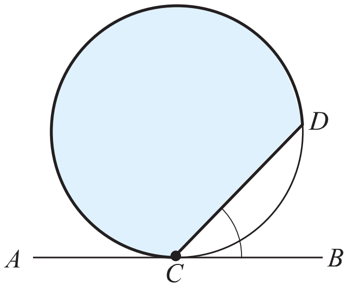
(ii) $P\hat{Q}R = S\hat{P}Q + S\hat{R}Q$ බව

පෙන්වන්න.



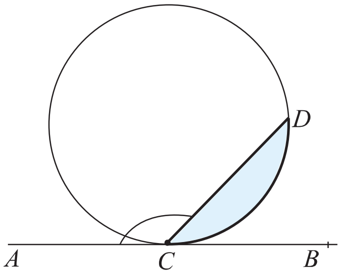
22.3 ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ

මුලින් ම ඒකාන්තර ඛණ්ඩය යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් දැයි විමසා බලමු. ඒ සඳහා පහත රූප සටහන වෙත අවධානය යොමු කරන්න.



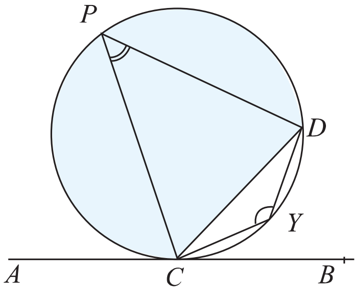
රූප සටහනේ දක්වා ඇති පරිදි AB සරල රේඛාව C හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. CD ජ්‍යායකි. CD ජ්‍යායෙන්, වෘත්තය, වෘත්ත ඛණ්ඩ දෙකකට වෙන් වේ. එක් ඛණ්ඩයක් වන්නේ රූපයේ ලා නිල් පැහැයෙන් අඳුරු කොට දක්වා ඇති කොටසයි. අනෙක් ඛණ්ඩය වන්නේ එසේ අඳුරු නොකළ කුඩා කොටසයි. AB ස්පර්ශක මත CD ජ්‍යායෙන් කෝණ දෙකක් සාදයි. එක් කෝණයක් $A\hat{C}D$ ය. අනෙක $B\hat{C}D$ ය. BCD කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර ඛණ්ඩය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ ලා නිල් පැහැයෙන් අඳුරු කොට ඇති වෘත්ත ඛණ්ඩයයි. එසේ ම, $A\hat{C}D$ කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ අඳුරු නොකළ අනෙක් වෘත්ත ඛණ්ඩයයි.

පහත දැක්වෙන රූප සටහනේ $A\hat{C}D$ කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය ලා නිල් පැහැයෙන් අඳුරු කර දක්වා ඇත.



ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ ආශ්‍රිත ප්‍රමේයය

පහත දැක්වෙන රූපය දෙස බලන්න. $C\hat{P}D$ පිහිටා තිබෙන්නේ ලා නිල් පැහැති විශාල වෘත්ත ඛණ්ඩය තුළ ය. එනම් $C\hat{P}D$ හා $D\hat{C}B$ කෝණ එකිනෙක ප්‍රතිවිරුද්ධ වෘත්ත ඛණ්ඩ තුළ පිහිටයි. එසේ ම, $C\hat{Y}D$ හා $A\hat{C}D$ කෝණ ද එකිනෙකට ප්‍රතිවිරුද්ධ වෘත්ත ඛණ්ඩ තුළ පිහිටයි.

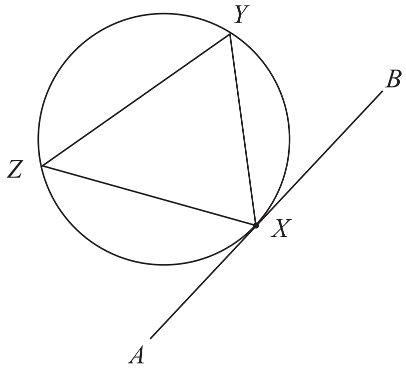


වෘත්තයක ස්පර්ශක සම්බන්ධ ඉතා වැදගත් ප්‍රතිඵලයක් ඇත. එම ප්‍රතිඵලයෙන් කියවෙන්නේ, ඉහත රූපය අනුව $D\hat{C}B$ හා $C\hat{P}D$ කෝණය සමාන බවත් $A\hat{C}D$ කෝණය හා $C\hat{Y}D$ කෝණය සමාන බවත් ය. වෙනත් අයුරකින් කිවහොත් "වෘත්තයක ස්පර්ශකයක් හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ජ්‍යායත් අතර කෝණය, ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණයට (එනම් එම ජ්‍යායෙන්, ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය තුළ ආපාතික කෝණයට) සමාන වේ". මෙම ප්‍රතිඵලය ඉතා වැදගත් නිසා එය ප්‍රමේයයක් ලෙස ප්‍රකාශ කොට සිහි තබා ගනිමු.

ප්‍රමේයය : වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ජ්‍යායයත් අතර කෝණය ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන වේ.

මෙම ප්‍රමේයයේ සත්‍යතාව තහවුරු කර ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකම්වල යෙදෙන්න.

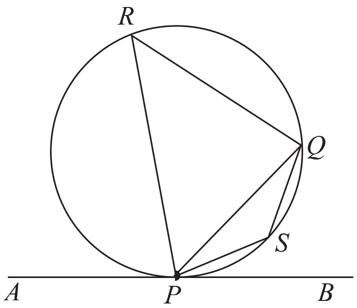
ක්‍රියාකාරකම 1



- වෘත්තයක් ඇඳ එය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය X ලෙස නම් කරන්න.

- X ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන සරල රේඛාවක් අඳින්න (X හි දී වෘත්තයට අරයක් ඇඳ ඊට ලම්බව X හි දී රේඛාවක් ඇඳීමෙන් මෙය කළ හැකි ය.) එය AB ලෙස නම් කරන්න.
- වෘත්තය මත තවත් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කර එම ලක්ෂ්‍ය Y සහ Z ලෙස නම් කරන්න.
- X, Y හා Z ලක්ෂ්‍ය රූපයේ පරිදි යා කරන්න.
- කෝණමානය භාවිතයෙන් $B\hat{X}Y$ හා ඊට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $X\hat{Z}Y$ හි අගයන් මැන සොයා, ඒවා සමාන වේ දැයි සසඳා බලන්න.
- එසේම $A\hat{X}Z$ හා ඊට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $X\hat{Y}Z$ කෝණ ද මැන ඒවා සමාන දැයි සසඳා බලන්න.

ක්‍රියාකාරකම 2

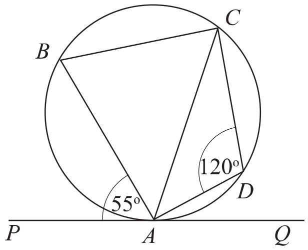


- වෘත්තයක් ඇඳ එය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය P ලෙස නම් කරන්න. P ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන සරල රේඛාවක් අඳින්න (P හි දී අරයක් ඇඳ ඊට ලම්බව P හි දී රේඛාවක් ඇඳීමෙන් මෙය කළ හැකි ය.) එය AB ලෙස නම් කරන්න.
- P ලක්ෂ්‍යයේ සිට ජ්‍යායක් ඇඳ එය PQ ලෙස නම් කරන්න.
- PQ ජ්‍යාය දෙපස පිහිටන ලෙස වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කර ඒවා R හා S ලෙස නම් කරන්න.
- QR, QS, PS හා PR රේඛා ඛණ්ඩ අඳින්න.
- කෝණමානය භාවිතයෙන් $B\hat{P}Q$ හා ඊට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $P\hat{R}Q$ හි අගයන් මැන සොයා ඒවා සමාන වේ දැයි සසඳා බලන්න.
- එලෙසම $A\hat{P}Q$ හා ඊට ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $P\hat{S}Q$ කෝණ ද මැන ඒවා සමාන දැයි සසඳා බලන්න.

වෘත්තයක ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ජ්‍යායත් අතර කෝණය එම කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන බව ඉහත ක්‍රියාකාරකම් මගින් අවබෝධ වන්නට ඇත.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

නිදසුන 1



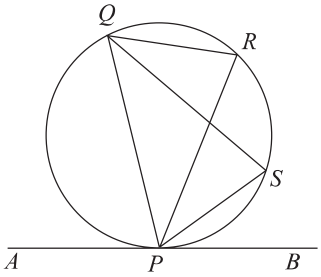
ඉහත දැක්වෙන රූපයේ PQ රේඛාව A ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. B, C සහ D ලක්ෂ්‍ය එම වෘත්තය මත පිහිටා ඇත. $P\hat{A}B = 55^\circ$ සහ $A\hat{D}C = 120^\circ$ කි. $B\hat{A}C$ අගය සොයන්න.

මුලින් ම $P\hat{A}C$ කෝණයෙහි අගය සොයමු.

$P\hat{A}C = A\hat{D}C$ (වෘත්තයක ජ්‍යායත් ස්පර්ශකයත් අතර කෝණය ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන වේ)

$$P\hat{A}B + B\hat{A}C = 120^\circ$$
$$55^\circ + B\hat{A}C = 120^\circ$$
$$B\hat{A}C = 120^\circ - 55^\circ$$
$$= \underline{\underline{65^\circ}}$$

AB රේඛාව P හිදී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. Q සහ R එම වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. $P\hat{Q}R$ සමච්ඡේදකය S හිදී වෘත්තය හමු වේ. PS යන්න $B\hat{P}R$ හි සමච්ඡේදකය බව පෙන්වන්න.



$B\hat{P}S = P\hat{Q}S$ (වෘත්තයක ජ්‍යායත් ස්පර්ශකයත් අතර කෝණය ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන නිසා)

$R\hat{P}S = R\hat{Q}S$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන නිසා)

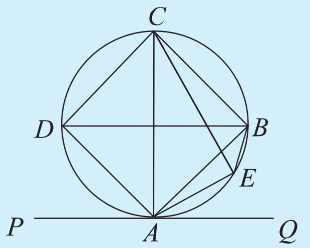
$P\hat{Q}S = R\hat{Q}S$ (දත්තය, $P\hat{Q}R$ සමච්ඡේදකය QS නිසා)

$\therefore\ B\hat{P}S = R\hat{P}S$

$\therefore\ PS$, $B\hat{P}R$ කෝණයේ කෝණ සමච්ඡේදකය වේ.

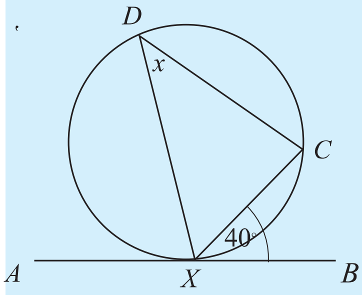
22.3 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය PQ වේ. B, C, D සහ E ලක්ෂ්‍ය වෘත්තය මත පිහිටයි.

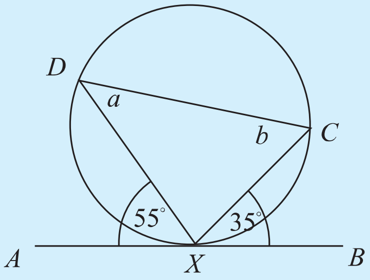


ස්පර්ශකයත් ජ්‍යායත් අතර කෝණය	අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ
$B\hat{A}Q$	....
$P\hat{A}B$	....
$P\hat{A}D$	....
$E\hat{A}Q$	....
....	$D\hat{B}A$
....	$D\hat{C}A$

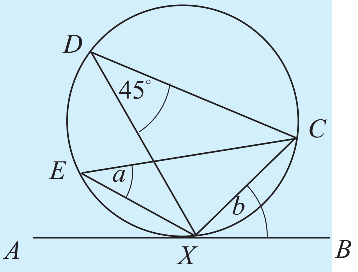
2. එක් එක් රූප සටහනේ AB ලෙස දැක්වෙන්නේ වෘත්තයට X ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකයකි. වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.



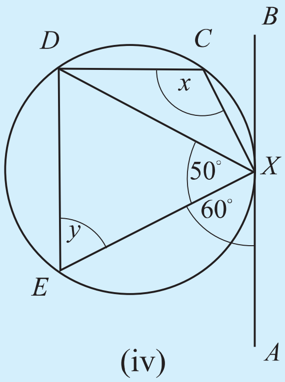
(i)



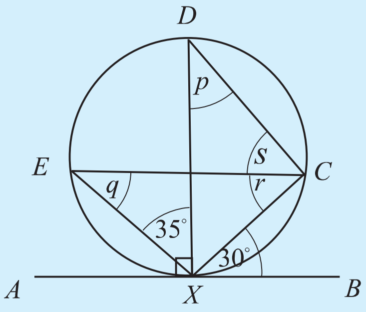
(ii)



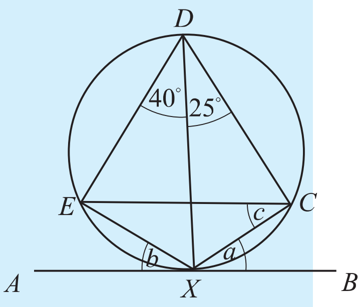
(iii)



(iv)



(v)

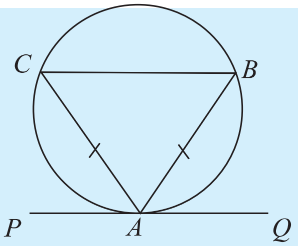


(vi)

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

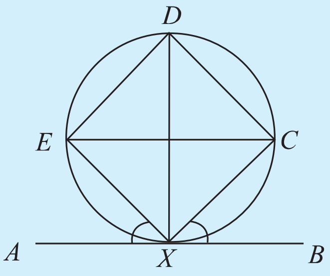
3. PQ යනු A හි දි වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ. $AC = AB$ නම්,

(i) $C\hat{A}P = B\hat{A}Q$ බවත්
(ii) $PQ \,//\, CB$ බවත්
පෙන්වන්න.



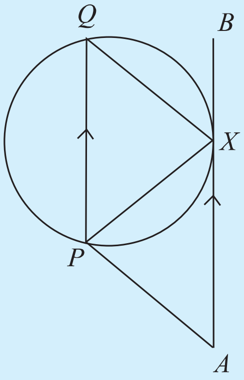
4. AB යනු X ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ. C සහ E ලක්ෂ්‍ය වෘත්තය මත පිහිටා ඇත්තේ $B\hat{X}C = A\hat{X}E$ වන පරිදි ය. D වෘත්තය මත පිහිටි තවත් ලක්ෂ්‍යයකි.

(i) $E\hat{D}C$ හි සමච්ඡේදකය XD බව
(ii) $EX = CX$ බව
(iii) $AB \,//\, EC$ බව
පෙන්වන්න.



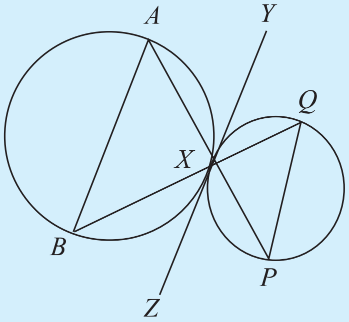
5. AB රේඛාව X හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. $PQ \,//\, AB$ වන සේ PQ ජ්‍යාය ඇඳ ඇත.

(i) $B\hat{X}Q = A\hat{X}P$ බව සාධනය කරන්න.
(ii) $PX = PA$ නම් $AXQP$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



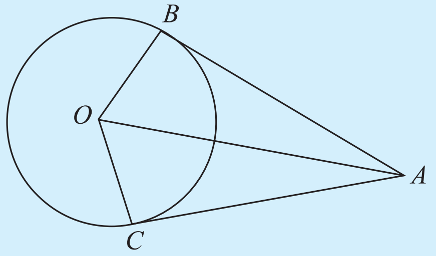
6. වෘත්ත දෙකක් බාහිරව X ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශ වේ. YZ පොදු ස්පර්ශකය වේ. AB එක් වෘත්තයක ජ්‍යායකි. දික් කරන ලද AX සහ BX පිළිවෙලින් අනෙක් වෘත්තය P හා Q හි දී හමුවේ.

(i) $B\hat{X}Z = X\hat{P}Q$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $AB \,//\, PQ$ බව පෙන්වන්න.

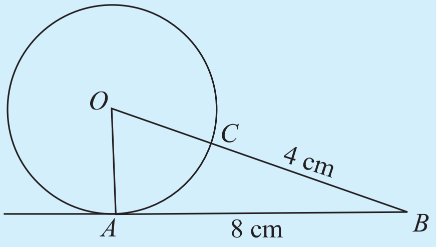


මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

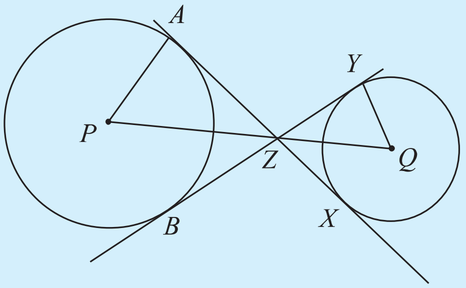
1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට A සිට අඳින ලද ස්පර්ශක B හා C හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. වෘත්තයේ අරය 5 cm හා OA = 13 cm නම් $OBAC$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.



2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ අඳින ලද ස්පර්ශකය AB වේ. OB, C හි දී වෘත්තය ඡේදනය කරයි. CB = 4 cm සහ AB = 8 cm වේ. වෘත්තයේ අරය ගණනය කරන්න.



3. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙකේ කේන්ද්‍ර P හා Q වේ. විශාල වෘත්තය මත පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී එම වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් X හා Y වලදී කුඩා වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. තවද මෙම ස්පර්ශක දෙක Z හිදි එකිනෙක ඡේදනය වේ.

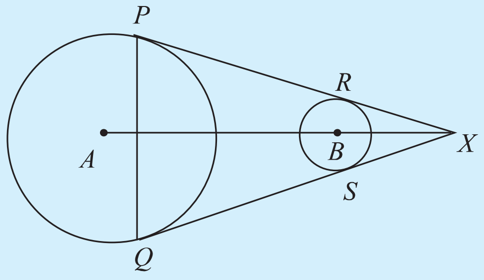


(i) $AX = BY$ බව

(ii) $A\hat{P}Z = Y\hat{Q}Z$ බව

පෙන්වන්න.

4. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි PX සහ QX ස්පර්ශක P, R, Q සහ S ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්ත ස්පර්ශ කරයි. වෘත්තවල කේන්ද්‍ර A සහ B වේ.



(i) $PR = QS$ බව

(ii) PQ // RS බව

(iii) A, B සහ X එකම සරල රේඛාවක පිහිටන බව

පෙන්වන්න.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.