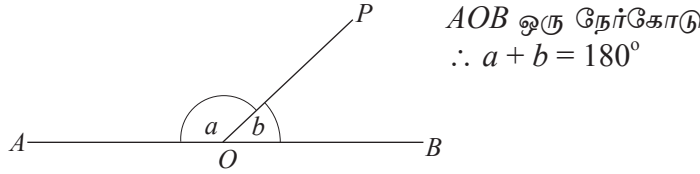


இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

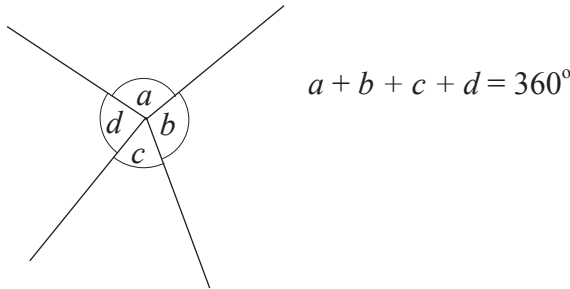
- முக்கோணி ஒன்றின் அகக் கோணங்கள் மூன்றினதும் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும் என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி எளிய பிரச்சினைகளைத் தீர்ப்பதற்கும்
- முக்கோணி ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டுவதால் உருவாகும் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் இரண்டினதும் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும் என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி எளிய பிரச்சினைகளைத் தீர்ப்பதற்கும் தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

நேர்கோடுகள் தொடர்பாக நீங்கள் கற்றுள்ள கேத்திரகணிதப் பேறுகள் சிலவற்றை நினைவுகூர்வோம்.

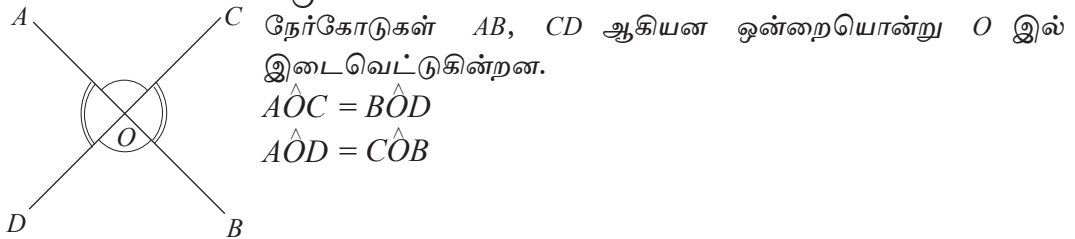
- நேர்கோடு ஒன்றின் மீது அமைந்துள்ள அடுத்துள்ள இரண்டு கோணங்கள் மிகைநிரப்பு கோணங்கள் ஆகும்.



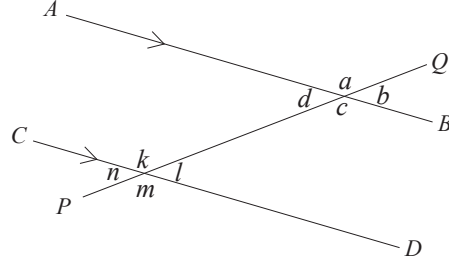
- புள்ளி ஒன்றைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகும்.



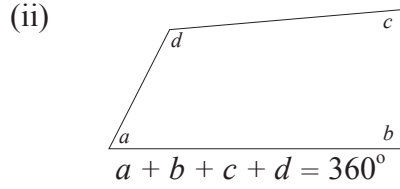
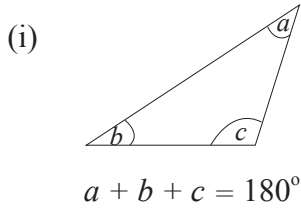
- இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுவதால் உருவாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமனாகும்.



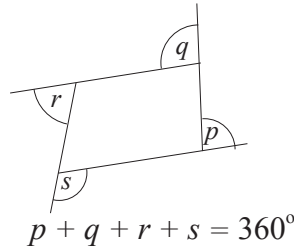
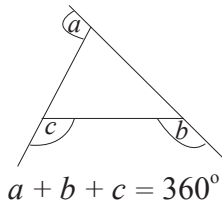
- சமாந்தர நேர்கோடுகளை குறுக்கோடி ஒன்று வெட்டும்போது உண்டாகும்



- ஒத்த கோணங்கள் சமன்
 $a = k, b = l, c = m, d = n$
- ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமன்
 $c = k, d = l$
- நேயக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.
 $d + k = 180^\circ, c + l = 180^\circ$
- மேலும் தரம் 8 இல் முக்கோணிகளும் நாற்பக்கல்களும் என்ற பாடத்தின் கீழ் முக்கோணி ஒன்றின் அகக் கோணங்கள் மூன்றினதும் கூட்டுத்தொகை 180° எனவும் நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக் கோணங்கள் நான்கினதும் கூட்டுத்தொகை 360° எனவும் கற்றுள்ளீர்கள்.
கீழே உருக்களில் உள்ள தரவுகளுக்கு ஏற்ப,



- முக்கோணி ஒன்றினதும் நாற்பக்கல் ஒன்றினதும் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆகும்.

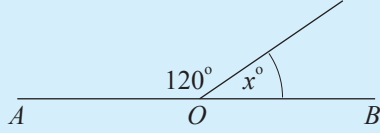


மேலே அறிந்துகொண்ட விடயங்களை மேலும் உறுதிசெய்து கொள்வதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள மீட்டர் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

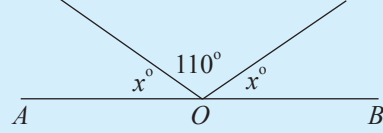
மீட்டற் பயிற்சி

a. AOB ஒரு நேர்கோடாகும். x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

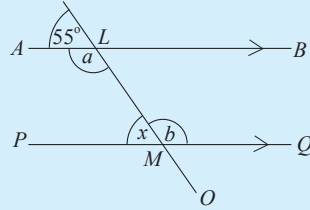
(i)



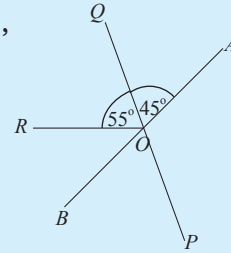
(ii)



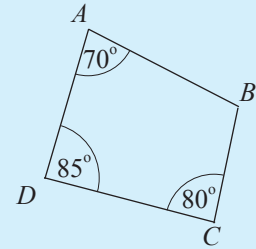
b. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப a , b , x எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



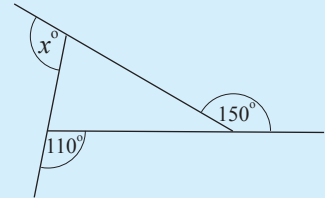
c. AOB , POQ என்பன நேர்கோடுகள் ஆகும். $\angle POB$, $\angle BOR$, $\angle AOP$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



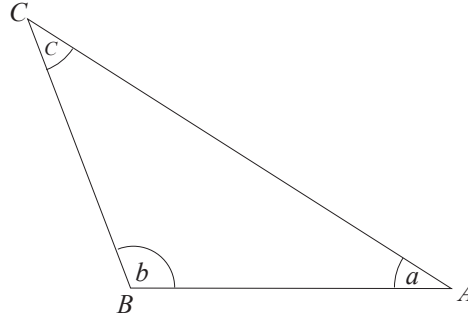
d. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப $\triangle ABC$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



e. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



16.1 முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்கள்



உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் a, b, c என்பவற்றால் காட்டப்பட்டுள்ள கோணங்கள் முக்கோணியின் அகக்கோணங்கள் ஆகும். முக்கோணியின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

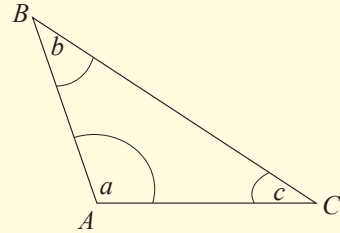
$$\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = 180^\circ.$$

இத்தொடர்பினை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்காகப் பின்வரும் செயற்பாட்டைச் செய்க.

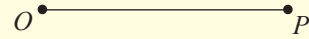


செயற்பாடு 1

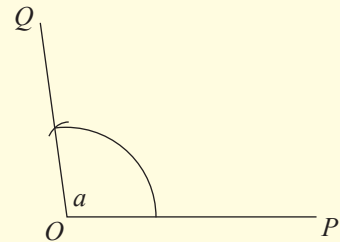
படி 1 : பயிற்சிப் புத்தகத்தில் யாதேனும் ஒரு முக்கோணியை வரைந்து அதனை ABC எனப் பெயரிடுக. (அதன் அகக்கோணங்கள் a, b, c எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன.)



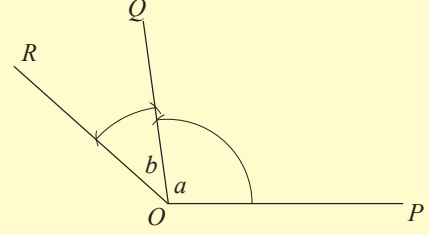
படி 2 : பயிற்சிப் புத்தகத்தில் வேறோர் இடத்தில் நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்றை வரைந்து அதனை OP எனப் பெயரிடுக.



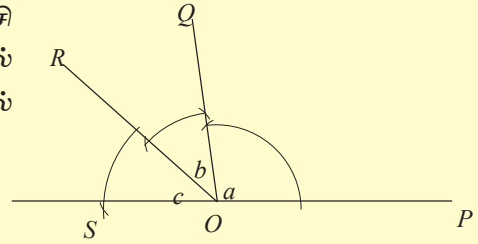
படி 3 : OP ஐ ஒரு புயமாகவும் O ஐ உச்சியாகவும் கொண்டு கவராயத்தையும் நேர் விளிம்பையும் பயன்படுத்தி $\hat{CAB}$ ஐ O இல் பிரதிசெய்க. (அது $\hat{POQ}$ என உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.)



படி 4: OQ ஐ ஒரு புயமாகவும் O ஐ உச்சியாகவும் கொண்டு $\hat{ABC}$ ஐ முன்பு போல் O இல் பிரதிசெய்க. (அது $\hat{QOR}$ என உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.)



படி 5: OR ஐ ஒரு புயமாகவும் O ஐ உச்சியாகவும் கொண்டு $\hat{ACB}$ ஐ O இல் பிரதிசெய்க. (அது $\hat{ROS}$ என உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.)



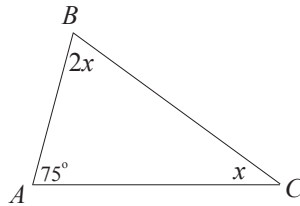
மேலே கோணம் $\hat{POS}$ ஐ அளந்து பார்ப்பதன் மூலம் $\hat{POS} = 180^\circ$ எனப் பெற்றிருப்பீர்கள். ஆகவே முக்கோணி ABC இன் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

தேற்றம்: முக்கோணி ஒன்றின் மூன்று கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.

தற்போது இதைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்ப்பது தொடர்பான உதாரணங்களைப் பார்போம்.

உதாரணம் 1

உருவில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப முக்கோணி ABC இன் $\hat{ACB}$, $\hat{ABC}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



$$75^\circ + 2x + x = 180^\circ$$

$$3x = 180^\circ - 75^\circ$$

$$3x = 105^\circ$$

$$x = \frac{105^\circ}{3}$$

$$= 35^\circ$$

$$\therefore \hat{ACB} = x = 35^\circ$$

$$\hat{ABC} = 2x = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$$

உதாரணம் 2

மூக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்கள் $2 : 3 : 4$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அம்மூன்று அகக்கோணங்களையும் கண்டு, அது எவ்வகையான மூக்கோணி எனக் காரணங்களுடன் எழுதுக.

கோணங்களுக்கு இடையிலான விகிதம் $= 2 : 3 : 4$

$\therefore$ கோணங்களுக்கு உரிய பின்னங்கள் $= \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}$

மூன்று கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை $= 180^\circ$

$\therefore$ சிறிய கோணம் $= 180^\circ \times \frac{2}{9} = 40^\circ$

நடுத்தர அளவிலான கோணம் $= 180^\circ \times \frac{3}{9} = 60^\circ$

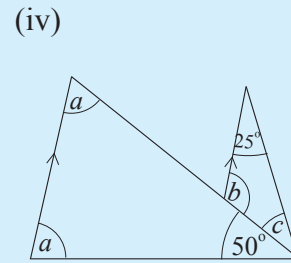
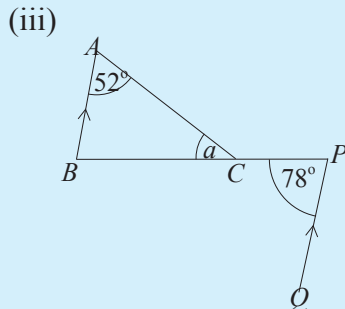
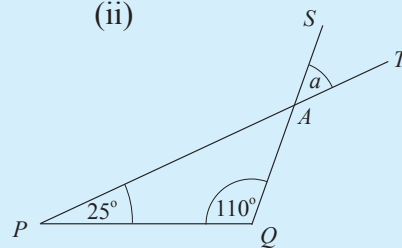
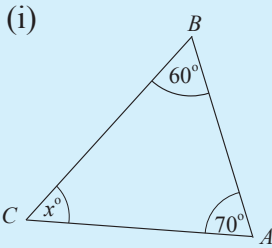
பெரிய கோணம் $= 180^\circ \times \frac{4}{9} = 80^\circ$

எனவே மூக்கோணிகளின் மூன்று கோணங்களும் $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ ஆகும். மூன்று கோணங்களும் 90° இலும் குறைவு என்பதால் இது கூர்ங்கோண மூக்கோணி ஆகும்.

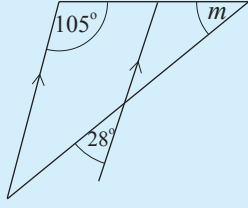


பயிற்சி 16.1

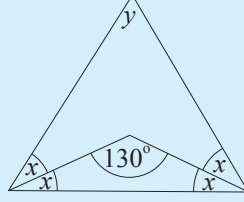
1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கேற்ப ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துகளால் காட்டப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



(v)



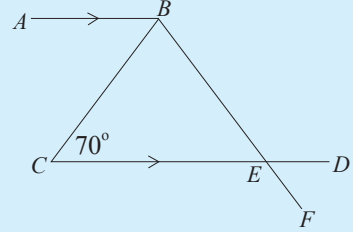
(vi)



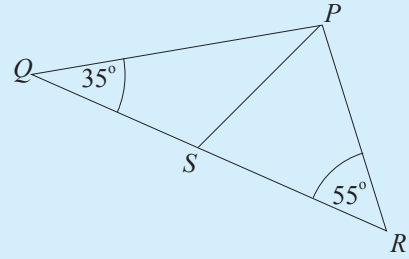
(vii)



2. தரப்பட்டுள்ள உருவில் $\hat{ABC} = \hat{CBE}$, $\hat{BCE} = 70^\circ$ ஆகும். $\hat{DEF}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



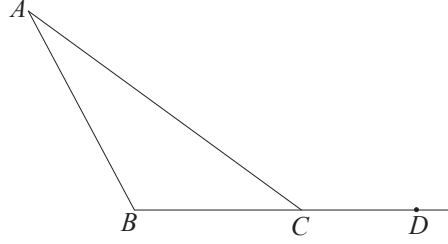
3. முக்கோணி PQR இல் QR என்ற பக்கத்தின் மீது S என்னும் புள்ளியானது $\hat{QPS} = \hat{RPS}$ ஆகும். $\hat{PQS} = 35^\circ$, $\hat{PRS} = 55^\circ$ ஆகும்.



- (i) $\hat{QPR}$ இன் பருமனைக் காண்க.
(ii) $\hat{PSR}$ இன் பருமனைக் காண்க.

4. முக்கோணி XYZ இல் $\hat{X} + \hat{Y} = 115^\circ$, $\hat{Y} + \hat{Z} = 100^\circ$ ஆகும். $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ என்பவற்றின் பருமனைக் காண்க.
5. முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களுக்குகிடையே உள்ள விகிதம் $1 : 2 : 3$ ஆகும். அதன் ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் பருமனைக் கண்டு, கோணங்களுக்கு ஏற்ப அது எவ்வகை முக்கோணி எனக் காரணத்துடன் எழுதுக.
6. முக்கோணி ஒன்றின் ஓர் அகக்கோணம் 75° ஆகும். எஞ்சிய இரண்டு கோணங்களினதும் விகிதம் $1 : 2$ ஆகும். அவ்விரண்டு கோணங்களினதும் பருமனைக் காண்க.

16.2 முக்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணங்கள்

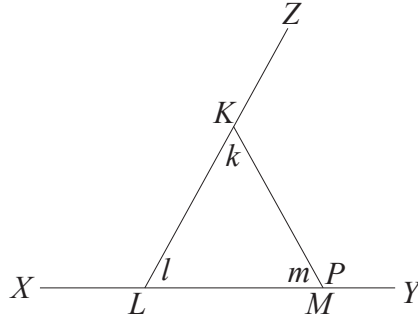


உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் நீட்டப்பட்டுள்ள பக்கம் BC யில் புள்ளி D குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இப்போது முக்கோணிக்குப் புறத்தே உருவாகியுள்ள $\angle ACD$ என்னும் கோணம் முக்கோணியின் ஒரு புறக்கோணம் எனப்படும்.

புறக்கோணம் $\angle ACD$ இற்கு அடுத்துள்ள கோணம் $\angle ACB$ ஆகும். முக்கோணியின் உள்ளிருக்கும் அடுத்த இரண்டு கோணங்களும் புறக்கோணம் $\angle ACD$ தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் எனப்படும்.

$\angle CAB$, $\angle ABC$ என்பன புறக்கோணம் $\angle ACD$ உடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் ஆகும்.

இப்போது மற்றுமொரு சந்தர்ப்பத்தைப் பார்ப்போம்.



உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி KLM இன் அகக் கோணங்கள் k, l, m ஆகும். அதன் பக்கங்கள் நீட்டப்பட்டு மூன்று புறக்கோணங்கள் பெறப்பட்டுள்ளன.

புறக்கோணம் $\angle KMY$ உடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் k, l ஆகும்.

புறக்கோணம் $\angle MKZ$ உடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் l, m ஆகும்.

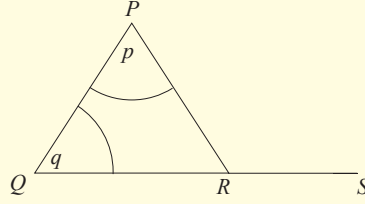
புறக்கோணம் $\angle XLK$ உடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் k, m ஆகும்.

இப்போது முக்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் ஒன்றிற்கும் அகத்தெதிர்க் கோணங்களுக்குமிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பைப் பெறுவோம்.

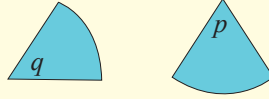


செயற்பாடு 1

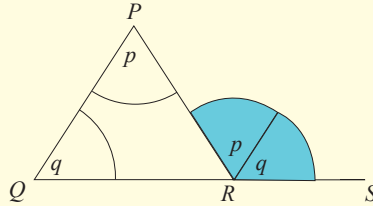
படி 1: பிறிஸ்டல் அட்டைத் துண்டு ஒன்றின் மீது அதாவது ஓரளவு தடித்த அட்டைத் துண்டு ஒன்றின் மீது உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு முக்கோணி ஒன்றை வரைக. அதன் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப் புறக்கோணம் ஒன்றைப் பெற்றுக் கொண்டு அவற்றுடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் இரண்டையும் நிழற்றுக. (உருவில் அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் p, q எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன.)



படி 2: மேலே குறிப்பிட்ட அகத்தெதிர்க் கோணங்கள் இரண்டையும் வெட்டி அடர்களாக வேறாக்குக.



படி 3: வெட்டி வேறாக்கிய அகத்தெதிர்க் கோணங்களான அடர்கள் இரண்டையும் புறக்கோணத்துடன் பொருந்துமாறு வைத்துக் கொள்க.

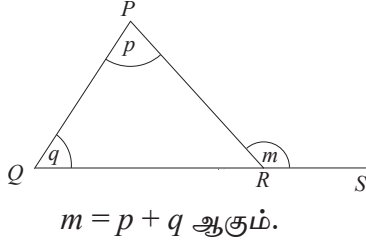


நீர் பெற்றுக் கொண்ட இப்பேற்றை வகுப்பில் உள்ள மற்றவர்களுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க. இச்செயற்பாட்டிலிருந்து பெறக்கூடிய முடிவை எழுதுக.

மேலே உள்ள செயற்பாட்டினூடாக முக்கோணி ஒன்றின் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும் என்பது புலனாகின்றது.

உங்களது பயிற்சிப் புத்தகத்தில் கூர்ங்கோண முக்கோணி, செங்கோண முக்கோணி, விரிகோண முக்கோணி என்னும் ஒவ்வொரு வகைக்கும் ஒரு முக்கோணி வீதம் பயிற்சிப் புத்தகத்தில் வரைந்து, அவை ஒவ்வொன்றினதும் புறக்கோணம் ஒன்றை வரைந்து பாகைமானியைப் பயன்படுத்தி அப்புறக்கோணத்தையும் அதனுடன் தொடர்பான அகத்தெதிர்க் கோணங்களையும் அளந்து புறக்கோணத்தின் பெறுமானம் அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன் என்பதை உறுதிசெய்க.

இப்பேறினைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.



அதாவது $\hat{PRS} = \hat{RPQ} + \hat{PQR}$ ஆகும்.

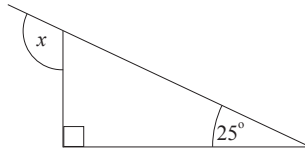
அதாவது,

தேற்றம்: முக்கோணி ஒன்றின் பக்கம் ஒன்றை நீட்டுவதனால் உண்டாகும் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமனாகும்.

இப்போது இப்பேறினைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் முறைகளை உதாரணங்களின் மூலம் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 1

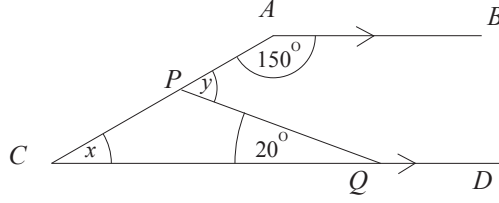
தரப்பட்டுள்ள உருவில் x இனால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள கோணத்தின் பருமனைக் காண்க.



$$\begin{aligned} x &= 90^\circ + 25^\circ \\ &= 115^\circ \end{aligned}$$

உதாரணம் 2

தரப்பட்டுள்ள உருவில் x, y எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.



$x + 150^\circ = 180^\circ$ ($AB \parallel CD$; நேயக் கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்களாகும்)

$$x = 180^\circ - 150^\circ$$

$$= 30^\circ$$

$y = x + 20^\circ$ (ΔPCQ இன் புறக்கோணம் = அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை)

$$y = 30^\circ + 20^\circ$$

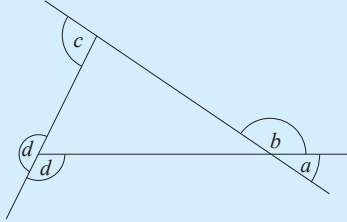
$$= 50^\circ$$



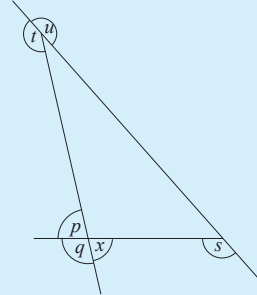
பயிற்சி 16.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு உருவிலும் ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துகளால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள கோணங்களில் முக்கோணியின் புறக்கோணங்களைத் தெரிவுசெய்க.

(i)

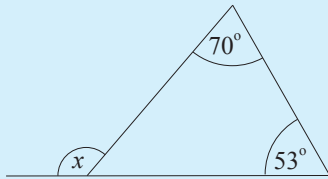


(ii)

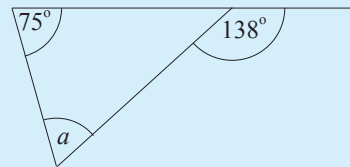


2. கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணிகளில் ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துகள் குறிக்கும் கோணங்களின் பருமன்களைக் காண்க.

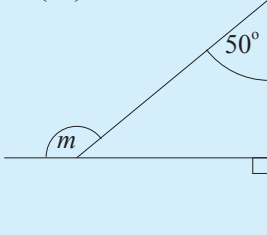
(i)



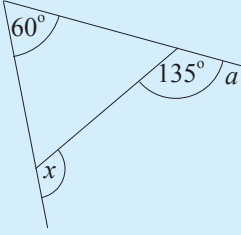
(ii)



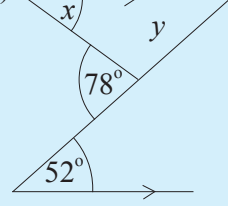
(iii)



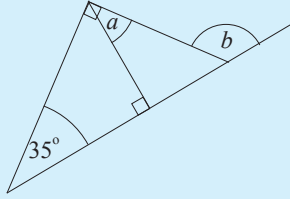
(iv)



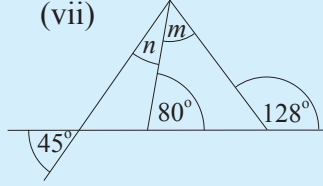
(v)



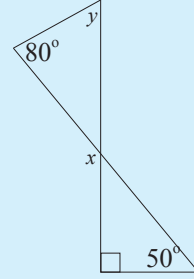
(vi)



(vii)

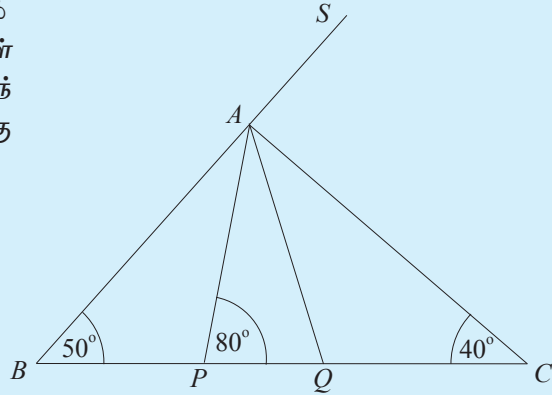


(viii)

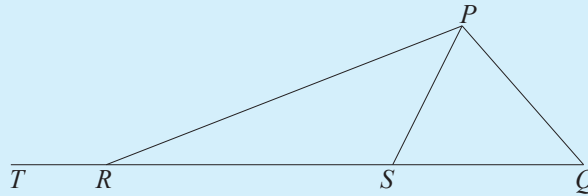


3. உருவில் முக்கோணி ABC இல் பக்கம் BC இன் மீது P, Q ஆகிய புள்ளிகள் $\hat{BAP} = \hat{CAQ}$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. பக்கம் BA ஆனது S இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது.

- (i) $\hat{BAP}$ ஐக் காண்க.
(ii) $\hat{AQP}$ ஐக் காண்க.
(iii) $\hat{SAQ}$ ஐக் காண்க.

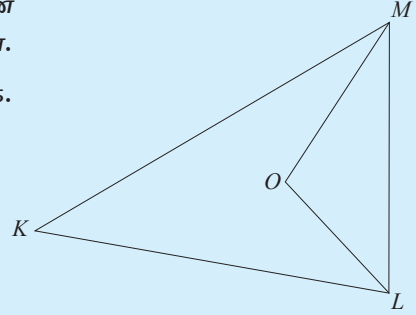


4. உருவில் தரப்பட்டுள்ள முக்கோணி PQR இல் $\hat{P}$ இன் இருசமகூறாக்கி PS ஆனது QR ஐ S இல் சந்திக்கின்றது. $\hat{SPQ} = \hat{SQP}$ ஆகும். $\hat{SQP} = a^\circ$ எனின், $\hat{PRT}$ இன் பருமனை a சார்பாகக் காண்க.

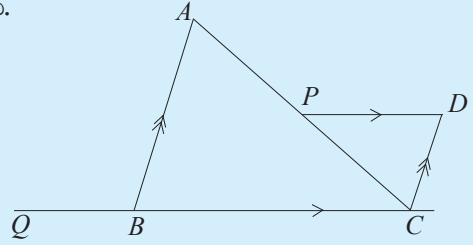


பலவினப் பயிற்சி

1. முக்கோணி KLM இல் $\hat{M}, \hat{L}$ ஆகிய கோணங்களின் இருசமகூறாக்கிகள் O இல் சந்திக்கின்றன. $\hat{K} = 70^\circ$ ஆகும். $\hat{LOM}$ இன் பருமனைக் காண்க.



2. உருவில் $\hat{APD} = 140^\circ$, $\hat{PDC} = 85^\circ$ ஆகும். ABQ ஐக் காண்க.



பொழிப்பு

- முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகும்.
- முக்கோணியின் பக்கம் ஒன்றை நீட்டுவதனால் உண்டாகும் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.