6 அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- பொதுக் காரணி ஈருறுப்பாக அமையும் நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவையொன்றின் காரணிகளைக் காண்பதற்கும்
- $x^2 + bx + c$ வடிவில் அமைந்த மூவுறுப்புக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துவதற்கும்
- இரு நிறைவர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதப்பட்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்பதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

சென்ற 5 ஆம் பாடத்தில் அட்சரகணித உறுப்புகள் பலவற்றுக்குரிய விளக்கம் அளிக்கப்பட்டது. இப்பாடத்தில் அட்சரகணிதக் கோவைகள் பலவற்றின் மேலதிக விளக்கத்தைப் பெறுவோம். முதலில் அட்சரகணித உறுப்பொன்றின் (அல்லது கோவையொன்றின்) காரணி என்பதன் பொருளை அறிவோம்.

$2xy$ என்னும் அட்சரகணித உறுப்பை 2, x, y என்னும் உறுப்புகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம். எனவே $2, x, y$ என்பவை அதன் காரணிகளாக அமையும். அத்துடன் $2x$, $2y$, $2xy$, xy போன்றவையும் இதன் காரணிகளாகும்.

$2x + 2y$ என்பது ஓர் ஈருறுப்புக் கோவையாகும். அதாவது அது இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். இங்கே $2x$ இன் காரணிகள் 2 உம் x உம் ஆகின்றன. அவ்வாறே $2, y$ என்பன $2y$ இன் காரணிகளாகின்றன. இதற்கேற்ப 2 ஆனது $2x$, $2y$ என்னும் இரு உறுப்புகளினதும் பொதுக் காரணியாகின்றது. இப்பொதுக் காரணியைக் கருதும்போது இந்த ஈறுருப்புக் கோவையை $2(x+y)$ எனவும் எழுதலாம் எனத் தரம் 8 இல் கற்றுள்ளோம்.

அதாவது $2x + 2y = 2(x + y)$ என எழுதலாம்.

இவ்வாறு எழுதுவதன் சிறப்பு என்னவெனில், $2x$ இனதும் $2y$ இனதும் கூட்டுத்தொகையாகக் காட்டப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதக் கோவையானது 2 இனதும் $x + y$ இனதும் பெருக்கமாகக் காட்டப்பட்டுள்ளதாகும். அப்போது 2 உம் $x + \mathrm{y}$ உம் $2x + 2y$ இன் காரணிகளாகின்றன.

இதை வேறு விதமாகக் கூறுவதாயின் $2x + 2y$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவையை 2 இனதும் $x + y$ இனதும் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

இங்கே $2x + 2y$ என்னும் கோவையின் ஒரு காரணியாக 2 என்னும் எண் அமைந்ததுடன் $x + y$ என்பது மற்றைய காரணியாகவும் அமைந்தது. சில சந்தர்ப்பங்களில் அட்சரகணித உறுப்புகள் அல்லது அட்சரகணிதக் கோவை காரணிகளாக அமையலாம். $xy + 5xz$ என்னும் கோவையைக் கருதும்போது இதனை $x(y + 5z)$ என எழுதக்கூடியதாக இருப்பதால் x உம் $y + 5z$ உம் இக்கோவையின் காரணிகளாக அமைகின்றன.

முன்னர் கற்ற விடயங்களிற்கேற்ப $x(y + 5z)$ என மடங்காக எழுதப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதக் கோவையின் அடைப்புக்குறியை நீக்கிச் சுருக்கும்போது $xy + 5xz$ என்னும் கூட்டுத்தொகையாகக் காட்டப்படும் கோவை பெறப்படும். இப்பாடத்தின் மூலம் நாம் முன்னைய பாடத்தில் கற்ற செயற்பாட்டைப் பின்னோக்கி எவ்வாறு செய்யலாம் எனப் பார்ப்போம். அதாவது அட்சரகணிதக் கோவையொன்று காரணிகளின் மடங்காக எவ்வாறு எழுதப்படும் என்பதாகும்.

தரம் 8 இல் கற்றவாறு பின்வரும் கூற்றுகளின் காரணிகளின் மடங்காக எழுதப்பட்டிருக்கும் முறையை நோக்குவோம்.

- $3x + 12 = 3\,(x + 4)$
- $6a + 12b - 18 = 6\,(a + 2b - 3)$
- $-2x - 6y = -2\,(x + 3y)$
- $3x - 6xy = 3x\,(1 - 2y)$

மேலே இரண்டாவது உதாரணத்தில் உள்ள $6a + 12b - 18$ இல் பொதுக் காரணி 6 ஆக உள்ளது. அது 6, 12, 18 ஆகிய எண்களின் பொதுக் காரணிகளுட் பெரியதாகும். பொதுக் காரணிகளுட் பெரிய எண்ணே (+, − குறியைக் கருதாமல்) எப்போதும் பொதுக்காரணியாக அமையும். அட்சரகணிதக் கோவையொன்றின் காரணிகளைக் காணும்போது எண்களின் காரணிகளைக் காணவேண்டியதில்லை. உதாரணமாக $6x + 6y$ என்பதை $6(x + y)$ என்றே எழுத வேண்டும். அதனை $2 \times 3\,(x + y)$ என்று எழுத வேண்டியதில்லை. இவ்விடயங்களை மேலும் உறுதிப்படுத்திக்கொள்ளப் பின்வரும் மீட்டற் பயிற்சியில் ஈடுபடுக.

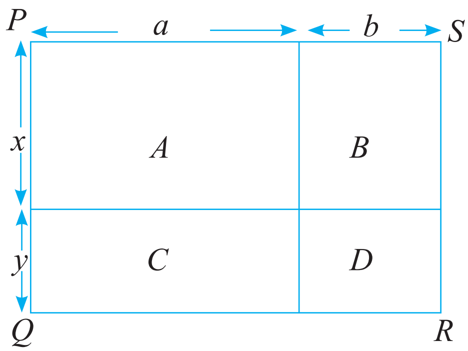
மீட்டற் பயிற்சி

1. பின்வரும் ஒவ்வோர் அட்சரகணிதக் கோவையையும் காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க.

a. $8x + 12y$	**b.** $9a + 18y$	**c.** $3m + 6$
d. $20a - 30b$	**e.** $4p - 20q$	**f.** $12 - 4k$
g. $3a + 15b - 12$	**h.** $12a - 8b + 4$	**i.** $9 - 3b - 6c$
j. $-12x + 4y$	**k.** $-8a - 4b$	**l.** $-6 + 3m$
m. $ab + ac$	**n.** $p - pq$	**o.** $ab + ac - ad$
p. $3x + 6xy$	**q.** $6ab - 9bc$	**r.** $4ap + 4bp - 4p$
s. $x^3 + 2x$	**t.** $3m - 2nm^2$	**u.** $6s - 12s^2t$

6.1 நான்கு உறுப்புகளைக் கொண்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகள்

A, B, C, D என்னும் நான்கு சிறிய செவ்வகங்களை உள்ளடக்கிய $PQRS$ என்னும் செவ்வகம் உருவில் காணப்படுகின்றது.



ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவையும் x, y, a, b என்னும் அட்சரகணிதக் குறியீடுகள் மூலம் காண்போம்.

பகுதி A யின் பரப்பளவு $= a \times x = ax$

பகுதி B யின் பரப்பளவு $= b \times x = bx$

பகுதி C யின் பரப்பளவு $= a \times y = ay$

பகுதி D யின் பரப்பளவு $= b \times y = by$

அடுத்து நாம் பெரிய செவ்வகமாகிய $PQRS$ இன் பரப்பளவை எவ்வாறு காணலாம் எனப் பார்ப்போம்.

பெரிய செவ்வகத்தின் நீளம் $= a + b$

பெரிய செவ்வகத்தின் அகலம் $= x + y$

எனவே பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $= (a + b)(x + y)$

4 சிறிய செவ்வகங்களின் பரப்பளவு = பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்பதால்

$$ax + ay + bx + by = (a + b)(x + y) \text{ ஆகும்.}$$

இதற்கு முன்னர் கற்ற ஈருறுப்புகளின் பெருக்கத்தை விரிவுபடுத்துவதால் $(a + b)(x + y)$ என்னும் பெருக்கத்தின் உண்மைத் தன்மையை அறியலாம். இதனை இவ்வாறு விரிவுபடுத்துவோம்.

$$(a + b)(x + y) = a(x + y) + b(x + y)$$
$$= ax + ay + bx + by$$

அதாவது இக்கூற்றின் உண்மைத் தன்மை வாய்ப்புப் பார்க்கப்படுகின்றது (அதாவது செம்மை உறுதிப்படுத்தப்படுகின்றது).

இப்பாடத்தில் நாம் எதிர்பார்ப்பது $ax + ay + bx + by$ என்னும் வடிவில் கோவையொன்று தரப்படும்போது அதனை $(a + b)(x + y)$ என்னும் வடிவில் காரணிகளின் பெருக்கமாக எவ்வாறு எழுதுவது என்பதாகும். ax, ay, bx, by ஆகிய நான்கு காரணிகளுக்கும் பொதுவான காரணியொன்று இல்லையென்பதை முதல் நோக்க வேண்டும். எனவே பொதுக் காரணியை உடனே வேறாக்க முடியாது. இருந்தபோதும் இவ்விரண்டு உறுப்புகளாக வேறாக்கி எழுதுவதன் மூலம் பின்வரும் விதத்தில் பொதுக் காரணிகளைக் காணலாம்.

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by)$$
$$= x(a + b) + y(a + b)$$

இப்போது இறுதியாகப் பெறப்பட்ட உறுப்புகள் $x(a + b)$ உம் $y(a + b)$ உம் இரு கோவைகளின் கூட்டுத்தொகையாக அமைகின்றன. இங்கு $x(a + b)$, $y(a + b)$ ஆகிய இரு கோவைகளுக்கும் $(a + b)$ பொதுக் காரணியாக அமைந்துள்ளது என்பதை நோக்குக. ஆகையால் இப்பொதுக் காரணியை வேறாக்கி, $(a + b)(x + y)$ என இதனை எழுதலாம் அதாவது $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$

$$= (a + b)(x + y)$$

என இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

உதாரணம் 1

$3x + 6y + kx + 2ky$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$\begin{aligned} 3x + 6y + kx + 2ky &= 3(x + 2y) + k(x + 2y) \\ &= (x + 2y)(3 + k) \end{aligned}$$

உதாரணம் 2

$a^2 - 3a + ab - 3b$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$\begin{aligned} a^2 - 3a + ab - 3b &= a(a - 3) + b(a - 3) \\ &= (a - 3)(a + b) \end{aligned}$$

உதாரணம் 3

$x^2 + xy - x - y$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$$\begin{aligned} x^2 + xy - x - y &= x^2 + xy - 1(x + y) \\ &= x(x + y) - 1(x + y) \\ &= (x + y)(x - 1) \end{aligned}$$

பயிற்சி 6.1

1. பின்வரும் அட்சரகணிதக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்க.

a. $ax + ay + 3x + 3y$ **b.** $ax - 8a + 3x - 24$
c. $mp - mq - np + nq$ **d.** $ak + al - bk - bl$
e. $x^2 + 4x - 3x - 12$ **f.** $y^2 - 7y - 2y + 14$
g. $a^2 - 8a + 2a - 16$ **h.** $b^2 + 5b - 2b - 10$
i. $5 + 5x - y - xy$ **j.** $ax - a - x + 1$

6.2 $x^2 + bx + c$ என்னும் வடிவில் அமைந்த மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகள்

$(x + 3)$, $(x + 4)$ என்னும் ஈருறுப்புக் கோவைகள் இரண்டின் மடங்கைப் பெற்ற விதத்தை மீண்டும் நோக்குவோம்.

$$(x + 3)(x + 4) = x(x + 4) + 3(x + 4)$$

$$= x^2 + 4x + 3x + 12$$

$$= x^2 + 7x + 12$$

$(x + 3)$, $(x + 4)$ ஆகிய இரண்டு கோவைகளினதும் மடங்கு $x^2 + 7x + 12$ எனப் பெறப்பட்டுள்ளது. எனவே $(x + 3)$ உம் $(x + 4)$ உம் $x^2 + 7x + 12$ என்னும் அட்சரகணிதக் கோவையின் இரண்டு காரணிகளாகும். $x^2 + 7x + 12$ என்னும் வடிவில் அமைந்த இருபடி உறுப்பைக் (x^2 ஐக்) கொண்ட இவ்வாறான கோவை, மூவுறுப்புக் கொண்ட இருபடிக் கோவை எனப்படும்.

குறிப்பு

இங்கு நாம் கருதும் மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக்கோவையொன்றை $x^2 + bx + c$ எனப் பொதுவாகக் குறிக்கலாம். இங்கே b, c என்பன எண்களாகின்றன. உதாரணமாக $x^2 + 7x + 12$ என்பது $b = 7$, $c = 12$ ஆக அமைந்த மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவையொன்றாகும். இங்கே bx நடு உறுப்பும் c மாறா உறுப்புமாகும். $x^2 + 7x + 12$ என்பதை $(x + 3)(x + 4)$ என இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம். இருந்துபோதும் இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க முடியாத மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளும் உள்ளன. உதாரணமாக $x^2 + 3x + 4$ என்னும் மூவுறுப்புக் கோவையை இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க முடியாது.

காரணிப்படுத்தக்கூடிய மூவுறுப்பு இருபடிக் கோவையைக் காரணிகளாக்கும் முறையை இனிப் பார்ப்போம்.

இவ்வாறான இருபடிக் கோவையொன்றை ஈருறுப்புகளைக் கொண்ட இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதும் விதத்தை அறிவதற்கு ஈருறுப்புக் கோவைகள் இரண்டின் பெருக்கத்தைப் பெற்ற படிமுறைகளைப் பின்னிருந்து நோக்கி ஆராய்வோம்.

- $x^2 + 7x + 12$ என அமைந்த மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவையின் நடு உறுப்பான $7x$ ஐ $3x + 4x$ என இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதலாம். $7x$ என்பதை இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையாக பலமுறைகளில் காண்பிக்கலாம். அதாவது $7x$ என்பதை $7x = 5x + 2x$, $7x = 8x + (-x)$ என்பன சில உதாரணங்களாகும். இருந்த போதும் $3x$, $4x$ என்பவற்றின் சிறப்பைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.
- $3x$, $4x$ என்னும் உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= 3x \times 4x = 12x^2$ ஆகும்.
- அத்துடன் $x^2 + 7x + 12$ என்னும் இருபடிக் கோவையின் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கமும் $x^2 \times 12 = 12\,x^2$ ஆகும்.
- மேலும் மேலே பெற்ற விடயத்தை அவதானித்து மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளின் காரணிகளைக் காணலாம்.

நடு உறுப்பு இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதப்பட வேண்டும். அவ்வாறு எழுதப்பட்ட இரு உறுப்புகளின் பெருக்கம் கோவையின் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கத்திற்கு ஒத்திருக்க வேண்டும்.

$x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகளைக் காணும் முறையை உதாரணமாகக் கொள்வோம். இதில் உள்ள நடு உறுப்பு $6x$ ஆகும். இதனை இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதவேண்டும். அத்துடன் அவற்றின் பெருக்கம் $x^2 \times 8 = 8x^2$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும்.

இதற்கேற்ப பெருக்கம் $8x^2$ இற்கும் கூட்டுத்தொகை $6x$ இற்கும் ஒத்துள்ள காரணிச் சோடியைக் காண்போம். பெருக்கம் $8x^2$ ஆக எழுதக்கூடிய சில முறைகளைப் பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகின்றது. $8x^2$ இன் காரணிகளைக் காண்போம்.

உறுப்புச் சோடிகள்	பெருக்கம்	கூட்டுத்தொகை
$x, 8x$	$x \times 8x = 8x^2$	$x + 8x = 9x$
$2x, 4x$	$2x \times 4x = 8x^2$	$2x + 4x = 6x$

நடு உறுப்பாகிய $6x$ ஐப் பெற உகந்த உறுப்புகளின் சோடி $2x + 4x$ ஆகும். இதனைக் கொண்டு $x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகளைக் காண்போம்.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + 2x + 4x + 8 \\ &= x\,(x + 2) + 4\,(x + 2) \\ &= (x + 2)\,(x + 4) \end{aligned}$$

$\therefore\ x^2 + 6x + 8$ இன் காரணிகள் $x + 2$ உம் $x + 4$ உம் ஆகும்.

மேலுள்ள $x^2 + 6x + 8$ ஐ அதன் நடு உறுப்பு $2x + 4x$ இற்குப் பதிலாக $4x + 2x$ என எழுதிக் காரணிபடுத்தினால் இறுதிக் காரணி மாறுமா எனக் கவனிப்போம்.

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8$$

$$= x(x + 4) + 2(x + 4)$$

$$= (x + 4)(x + 2)$$

அப்போதுங்கூட அதே காரணிச் சோடிகளே பெறப்பட்டுள்ளன. எனவே நடு உறுப்புகளைத் தெரிவுசெய்து உறுப்புச் சோடியை எழுதும் முறை இறுதிக் காரணியின் மீது செல்வாக்குச் செலுத்தாது.

உதாரணம் 1

$x^2 + 5x + 6$ என்னும் கோவையைக் காரணிப்படுத்துக.

முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= x^2 \times 6 = 6x^2$

நடு உறுப்பு $= 5x$

$2x + 3x = 5x$ என்பதாலும் $(2x)(3x) = 6x^2$ என்பதாலும் பின்வருமாறு காரணிகளைக் காணலாம்.

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6$$

$$= x(x + 2) + 3(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x + 3)$$

உதாரணம் 2

$x^2 - 8x + 12$ என்னும் கோவையைக் காரணிப்படுத்துக.

முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= x^2 \times 12 = 12x^2$ உம் நடு உறுப்பு $(-8x)$ உம் ஆகும். இங்கே மறையுடனான உறுப்பு உள்ளது. $12x^2$ பெருக்கமாக அமையும் x ஐக் கொண்ட இரு காரணிச் சோடிகள் சிலவற்றைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

x,	$12x$
$2x$,	$6x$
$3x$,	$4x$
$-2x$,	$-6x$
$-3x$,	$-4x$
$-x$,	$-12x$

மேலே உள்ளவாறு $-8x = (-2x) + (-6x)$ எனின், $(-2x)\ (-6x) = 12x^2$ ஆகும்.

ஆகையால், $x^2 - 8x + 12 = x^2 - 2x - 6x + 12$

$$= x\,(x-2) - 6\,(x-2)$$

$$= (x-2)\,(x-6)$$

உதாரணம் 3

$y^2 + 2y - 15$ என்னும் கோவையின் காரணிகளைக் காண்க.
முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= y^2 \times -15 = -15y^2$ ஆகும்.
நடு உறுப்பு $2y$ ஆகும்.

$(-15y^2) = (5y)\,(-3y)$ என எழுதலாம். அத்துடன் $(5y) + (-3y) = 2y$ என்பதன் மூலம் நடு உறுப்பும் கிடைக்கின்றது.

ஆகையால் $y^2 + 2y - 15 = y^2 - 3y + 5y - 15$

$$= y\,(y-3) + 5\,(y-3)$$

$$= (y-3)\,(y+5)$$

உதாரணம் 4

$a^2 - a - 20$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= a^2 \times (-20) = -20a^2$ ஆகும்.

நடு உறுப்பு $(-a)$ ஆகும்.

$-20a^2 = (-5a)\,(4a)$ உம் $(-5a) + (4a) = -a$ உம் ஆவதால் $(-a)$ இற்குப் பின்வரும் முறையினைக் கொண்டு காரணிகளைக் காணலாம்.

$a^2 - a - 20 = a^2 + 4a - 5a - 20$

$$= a\,(a+4) - 5\,(a+4)$$

$$= (a+4)\,(a-5)$$

பயிற்சி 6.2

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு இருபடிக் கோவையினதும் காரணிகளைக் காண்க.

a. $x^2 + 9x + 18$	**b.** $y^2 + 11y + 30$	**c.** $a^2 + 10a + 24$
d. $b^2 - 8b + 15$	**e.** $x^2 - 5x + 6$	**f.** $m^2 - 12m + 20$
g. $a^2 + a - 12$	**h.** $p^2 + 5p - 24$	**i.** $p^2 + 6p - 16$
j. $x^2 - x - 12$	**k.** $a^2 - 3a - 40$	**l.** $r^2 - 3r - 10$
m. $y^2 + 6y + 9$	**n.** $k^2 - 10k + 25$	**o.** $4 + 4x + x^2$
p. $36 + 15x + x^2$	**q.** $30 - 11a + a^2$	**r.** $54 - 15y + y^2$

குறிப்பு

மூவுறுப்புகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தும்போது நடு உறுப்பைப் பொருத்தமான இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதுவது மிக முக்கியமானதாகும். அத்துடன் இவை இரண்டினதும் பெருக்கம் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கத்துக்குச் சமமாக இருப்பதுவும் மிக முக்கியமாகும்.
இதில் பயிற்சி பெற்றதும் மனக் கணிதம் மூலமாகக் காரணிகளைக் காணலாம். மேலே 4 ஆம் உதாரணத்தில் தரப்பட்ட $-5a$ -20 இன் பொதுக் காரணியாக -5 ஐ வேறுபடுத்திய பின்னர் $-5\ (a + 4)$ என்னும் கோவை பெறப்படும். அதை $-5\ (a - 4)$ எனச் சிலர் தவறாக எழுதுவர்.

6.3 இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் எழுதப்பட்டுள்ள கோவைகளின் காரணிகள்

$(x - y)$ இனதும் $(x + y)$ இனதும் பெருக்கத்தைக் கருதுக.

$$(x - y)\ (x + y) = x\ (x + y) - y\ (x + y)$$
$$= x^2 + xy - xy - y^2$$
$$= x^2 - y^2$$

இதற்கேற்ப $(x + y)\ (x - y)$ என்பது $x^2 - y^2$ என்னும் கோவைக்குச் சமனாவதுடன் கோவை $x^2 - y^2$ ஆனது இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் எனப்படும்.

$(x + y)\ (x - y) = x^2 - y^2$ என்பதிலிருந்து $x^2 - y^2$ என்னும் கோவையின் காரணிகள் $x + y$ உம் $x - y$ உம் ஆகும். என்பது தெளிவாகின்றது.

$x^2 - y^2$ என்பது x இன் இருபடிக் கோவை எனக் கருதி அதன் காரணிகளைக் காணலாமா எனப் பார்ப்போம். அதன் நடு உறுப்பு 0 எனக் கருதினால் இக்கோவையை $x^2 + 0 - y^2$ என எழுதலாம். இனி இதன் காரணிகளைக் காண்போம். கோவையின் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பெருக்கம் $= x^2 \times (-y^2) = -x^2y^2$ ஆகும். நடு உறுப்பு 0 என்பதால்

$$-x^2y^2 = (-xy) \times (xy) \longrightarrow -xy + xy = 0$$

அப்போது $x^2 + 0 - y^2 = x^2 - xy + xy - y^2$

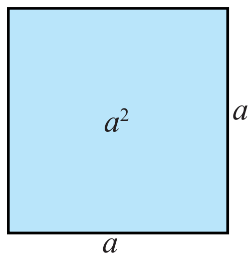
$$= x\,(x - y) + y\,(x - y)$$

$$= (x - y)\,(x + y)$$

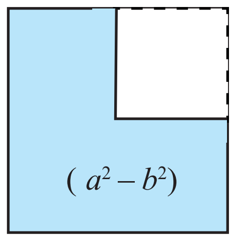
இவ்வாறு $x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$ என்பது பெறப்படும்.

உருவைப் பயன்படுத்தி இரண்டு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகளைக் காண்போம்

இரண்டு வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தின் காரணிகளைக் காண்பதற்கு நாம் பக்க நீளம் a அலகுகள் உள்ள சதுரமொன்றைக் கருதுவோம் (உரு (i)). அதிலிருந்து பக்க நீளம் b அலகுகள் ஆகவுள்ள சதுரமொன்றை உரு (ii) இல் காட்டியதுபோன்று நீக்குவோம். தற்போது எமக்குக் கிடைக்கும் உருவின் பரப்பளவு $(a^2 - b^2)$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

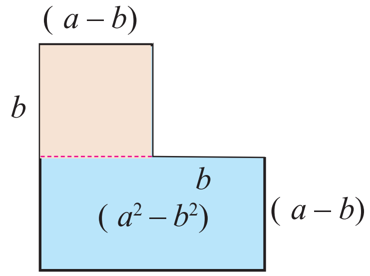


உரு (i)

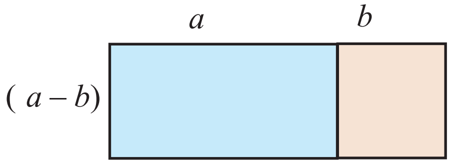


உரு (ii)

அடுத்து நாம் உரு (ii) இல் பெற்ற உருவை உரு (iii) காட்டியதுபோன்று இரண்டு செவ்வகங்களாகப் பிரித்து உரு iv இல் உள்ளது போன்று இணைப்போம்.



உரு (iii)



உரு (iv)

தற்போது கிடைத்துள்ள செவ்வகத்தின் நீளம் $(a + b)$ அலகுகளும் அகலம் $(a - b)$ அலகுகளும் ஆகும்.

தற்போது கிடைத்துள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = நீளம் × அகலம்

= $(a + b)(a - b)$ ஆகும்.

ஆகவே $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ஆகும்.

இங்கே ஓர் உருவின் பரப்பளவு இரண்டு விதமாகப் பெறப்பட்டுள்ளது. ஆகவே அவை ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்.

இனி இரு வர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதப்பட்ட கோவைகள் சிலவற்றின் காரணிகளைக் காணும் உதாரணங்களை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 1

$x^2 - 25$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$x^2 - 25 = x^2 - 5^2$

$= (x - 5)(x + 5)$

உதாரணம் 2

$9 - y^2$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$9^2 - y^2 = 3^2 - y^2$

$= (3 - y)(3 + y)$

உதாரணம் 3

$4a^2 - 49$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$4a^2 - 49 = 2^2a^2 - 7^2$

$= (2a - 7)(2a + 7)$

உதாரணம் 4

$1 - 4b^2$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$1 - 4b^2 = 1^2 - 2^2b^2$

$= 1^2 - (2b)^2$

$= (1 - 2b)(1 + 2b)$

உதாரணம் 5

$2x^2 - 72$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$2x^2 - 72 = 2(x^2 - 36)$

$= 2(x^2 - 6^2)$

$= 2(x - 6)(x + 6)$

உதாரணம் 6

$33^2 - 17^2$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$33^2 - 17^2 = (33 + 17)(33 - 17)$

$= 50 \times 16$

$= 800$

உதாரணம் 7

$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{9}$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{9} = \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{3^2}$

$= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)$

உதாரணம் 8

$1 - \frac{9x^2}{16}$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

$1 - \frac{9x^2}{16} = 1^2 - \left(\frac{3x}{4}\right)^2$

$= \left(1 - \frac{3x}{4}\right)\left(1 + \frac{3x}{4}\right)$

பயிற்சி 6.3

1. பின்வரும் கோவைகளின் காரணிகளைக் காண்க.

a. $x^2 - 100$	**b.** $m^2 - 36$	**c.** $p^2 - 81$
d. $4 - b^2$	**e.** $16 - a^2$	**f.** $64 - y^2$
g. $x^2 - 4y^2$	**h.** $9a^2 - 16b^2$	**i.** $100x^2 - 1$
j. $25m^2 - n^2$	**k.** $49 - 81p^2$	**l.** $25a^2b^2 - 9c^2$

பலவினப் பயிற்சி

1. பொருத்தமானவாறு உறுப்புகளை மாற்றி எழுதி காரணிகளைக் காண்க.

(i) $ax + by - ay - bx$ (ii) $pq - 6 + 3q + 2q$

(iii) $x - 12 + x^2$ (iv) $4 - k^2 - 3k$

2. காரணிகளைக் காண்க.

(i) $8x^2 - 50$ (ii) $3x^2 - 243$

(iii) $a^3 b^3 - ab$ (iv) $3 - 12q^2$

3. பெறுமானம் காண்க.

(i) $23^2 - 3^2$ (ii) $45^2 - 5^2$ (iii) $102^2 - 2^2$

4. நிரல் A யில் உள்ள கோவைகளுக்குப் பொருத்தமான கோவையை நிரல் B இல் இருந்து தெரிவுசெய்து தொடர்புபடுத்துக.

A	B
$x^2 - x - 6$	$\left(\frac{x}{5} - 1\right)\left(\frac{x}{5} + 1\right)$
$x^2 + 5x - 3x - 15$	$2x(x - 2)(x + 2)$
$2x^3 - 8x$	$(x - 3)(x + 5)$
$4x^2 - 9m^2$	$(x - 3)(x + 2)$
$\frac{x^2}{25} - 1$	$(2x - 3m)(2x + 3m)$