

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ஒரு தாயத்தை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- ஒரு தாயத்தின் மூலகங்களையும் வரிசையையும் அறிந்து கொள்வதற்கும்
- தாயங்களை கூட்டவும் கழிக்கவும்
- ஒரு தாயத்தை ஒரு நிறைவேண்ணால் பெருக்கவும்
- ஒரு தாயத்தை இன்னொரு தாயத்தால் பெருக்கவும்
- தாயங்கள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்க்கவும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்

19.1 தாயங்கள் அறிமுகம்

தாயங்கள் தொடர்பான கருத்தை 1854 இல் பிரித்தானியக் கணிதவியலாளரான ஆதர் கேலி அறிமுகம் செய்தார். ஓர் எளிய உதாரணம் மூலம் தாயங்களை அறிந்து கொள்வோம்.

ஒரு தவணைப் பரீட்சையில் கணிதம், விஞ்ஞானம் ஆகிய பாடங்களில் விமலன், பாருக், ராதா ஆகியோர் பெற்ற புள்ளிகள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

	கணிதம்	விஞ்ஞானம்
விமலன்	75	66
பாருக்	72	70
ராதா	63	81

அட்டவணையிலுள்ள எண்ணீதியான பெறுமானங்களை ஒரு தாயத்தில் பின்வரும் முறையில் காட்டலாம்.

$$\begin{pmatrix} 75 & 66 \\ 72 & 70 \\ 63 & 81 \end{pmatrix}$$

இங்கு நிரல்களினால் பாடங்களும் நிரைகளினால் மாணவர்களும் குறிக்கப்படுகின்றனர். இதனைப் பின்வருமாறும் தாயவடிவில் காட்டலாம்.

$$\begin{pmatrix} 75 & 72 & 63 \\ 66 & 70 & 81 \end{pmatrix}$$

இங்கு நிரல்களினால் மாணவர்களும் நிரைகளினால் பாடங்களும் குறிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு நிரைகள், நிரல்கள் வடிவில் அமைக்கப்பட்ட ஓர் எண் கூட்டம் தாயம் எனப்படும்.

அவ்வாறான சில தாயங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$$(i) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(v) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(vi) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

ஒரு தாயத்திலுள்ள எண்களை தாயத்தின் மூலகங்கள் என அழைப்போம். மூலகங்கள் எண் வடிவிலும் அட்சரகணிதக் குறியீடு அல்லது கோவை வடிவிலும் இருக்கலாம்.

ஒரு தாயமானது ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துகளால் (Capital letters) பெயரிடப்படும். அட்சரகணிதக் குறியீடுகளை இடும் சந்தர்ப்பங்களில் தாயத்தின் மூலகங்கள் ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களால் (Simple letters) குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

கீழே மூன்று தாயங்கள் பெயரிடப்பட்டுள்ள முறை தரப்பட்டுள்ளது.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & c \\ a & b \end{pmatrix}$$

உதாரணம் 2

ஓர் ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் அமைந்துள்ள A, B ஆகிய புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $(0, 5)$ $(4, 3)$ ஆகும். இத்தகவல்களை ஒரு தாயத்தில் தருக. அதனை P எனப் பெயரிடுக.

அட்டவணை

	A	B
x	0	4
y	5	3

தாயமாக

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ஒரு தாயத்தின் வரிசை

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ என்னும் தாயத்தைக் கருதுக.}$$

தாயம் A இலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும். நிரல்களின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். தாயத்தின் வரிசையானது நிரைகள், நிரல்களிலிருந்து 2×3 எனத் தரப்படும். A ஆனது “இரண்டின் மூன்றின்” தாயம் எனப்படும்.

இது

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3 \text{ எனச் சில சந்தர்ப்பங்களில் எழுதப்படும்.}$$

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தாயத்திலும்

$$(i) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

தாயத்தின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை = 3
நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 2
தாயத்தின் வரிசை = 3×2

$$(ii) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை = 1
நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 3
தாயத்தின் வரிசை = 1×3

$$(iii) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை = 2
நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 1
தாயத்தின் வரிசை = 2×1

$$(iv) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

நிரைகளின் எண்ணிக்கை = 2
நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 2
தாயத்தின் வரிசை = 2×2

நிரைத் தாயம், நிரல் தாயம், சதுரத் தாயம்

ஒரு நிரை மாத்திரம் உள்ள தாயம் **நிரைத் தாயம்** எனவும் ஒரு நிரல் மாத்திரம் உள்ள தாயம் **நிரல்தாயம்** எனவும் நிரைகளினதும் நிரல்களினதும் எண்ணிக்கை சமனான தாயம் **சதுரத் தாயம்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

உதாரணமாக

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ என்பது நிரைத் தாயமாகும்.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ என்பது நிரல் தாயமாகும்.}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ என்பது சதுரத் தாயம்.}$$

அலகுத் தாயமும் சமச்சீர்த் தாயமும்

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

மேலேயுள்ள சதுரத் தாயத்தில் கட்டமிடப்பட்டுக் காட்டப்பட்டிருப்பது பிரதான மூலைவிட்டமாகும். இடது பக்க மேல் மூலையிலிருந்து வலது பக்க கீழ் மூலை வரையுள்ள மூலகத் தொகுதி பிரதான மூலைவிட்டம் எனப்படும்.

குறிப்பு: பிரதானமூலைவிட்டமானது சதுரத்தாயத்திற்கு மாத்திரம் எடுத்துரைக்கப்படும். பிரதான மூலைவிட்டமானது பெரும்பாலும் எளிதாக மூலைவிட்டம் என்ற பெயரிலும் அழைக்கப்படும்.

கீழே வரிசை இரண்டாகவுள்ள ஒரு சதுரத் தாயத்தின் பிரதான மூலைவிட்டம் கட்டமிடப்பட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயம் விசேட வடிவிலான சதுரத் தாயமாகும்.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

தாயம் A இன் பிரதான மூலைவிட்டத்தில் அமைந்துள்ள எல்லா மூலகங்களினதும் பெறுமானம் 1 ஆகும். மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்கள் தவிர எஞ்சிய சகல மூலகங்களும் 0 ஆகும். அவ்வாறான தாயம் **அலகுத் தாயம்** எனப்படும். A என்பது வரிசை 3×3 ஆகவுள்ள அலகுத் தாயமாகும். கீழே வரிசை 2×2 உடைய ஓர் அலகுத் தாயம் தரப்பட்டுள்ளது.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

அலகுத் தாயங்களைப் பெயரிடுவதற்கு எழுத்து I பயன்படுத்தப்படும். n நிரைகளையும் n நிரல்களையும் உடைய அலகுத் தாயம் $I_{n \times n}$ இன் மூலம் எழுதப்படும். இதற்கேற்ப

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ என எழுதப்படும்.}$$

கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயத்தில் உள்ள சிறப்பை உங்களால் அவதானிக்க முடிகின்றதா?

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

தாயம் X இல் தாய மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றியுள்ள மூலகங்களை அவதானிக்க. தாய மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றியுள்ள சமனான பெறுமானங்களைக் கொண்ட மூலகங்கள் சமச்சீராக அமைந்துள்ளன. இவ்வாறான தாய மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றி சமனான மூலகங்களைச் சமச்சீராகக் கொண்டுள்ள தாயங்கள் **சமச்சீர்த் தாயங்கள்** என அழைக்கப்படும்.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y , Z ஆகிய தாயங்களில் பிரதான மூலைவிட்டத்தைச் சுற்றி சமனான மூலகங்கள் சமச்சீராக அமைந்துள்ளன. எனவே Y , Z ஆகியன சமச்சீர் தாயங்களாகும்.

குறிப்பு: சமச்சீர் தாயமும் சதுரத் தாயத்தில் மாத்திரம் எடுத்துரைக்கப்படும்.

பயிற்சி 19.1

1. ஒரு பழக்கடையில் அஸ்கா 2 தோடம்பழங்களையும் 3 மாம்பழங்களையும் கமலன் 4 தோடம்பழங்களையும் 1 மாம்பழத்தையும் ராஜன் 1 தோடம்பழத்தையும் 5 மாம்பழங்களையும் வாங்கினர்.

- (i) அஸ்கா வாங்கிய பழங்களை ஒரு நிரைத் தாயத்தில் குறிக்க.
- (ii) கமலன் வாங்கிய பழங்களை ஒரு நிரைத் தாயத்தில் குறிக்க.
- (iii) ராஜன் வாங்கிய பழங்களை ஒரு நிரைத் தாயத்தில் குறிக்க.
- (iv) அஸ்கா, கமலன், ராஜன் ஆகியோர் வாங்கிய பழங்களின் எண்ணிக்கைகள் நிரையாக உள்ள ஒரு தாயத்தை உருவாக்குக.

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தாயத்தினதும் வரிசையை எழுதுக.

$$(i) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (ii) B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (iii) C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(iv) D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (v) E = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad (vi) F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

3. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களிலிருந்து நிரை, நிரல் தாயங்களைத் தெரிந்து எழுதுக.

$$(i) P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (ii) Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (iii) R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(iv) S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (v) T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (vi) U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களிலிருந்து

- (i) சதுரத் தாயம்
 - (ii) சமச்சீர்த் தாயம்
 - (iii) அலகுத் தாயம் என்பவற்றைத் தெரிந்து எழுதுக.
- சதுரத் தாயங்களில் மூலைவிட்டங்களைக் கட்டமிடுக.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

19.2 தாயங்களைக் கூட்டலும் கழித்தலும்

எண்களைக் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகளை நாம் கற்றுள்ளோம். அவ்வாறான கணிதச் செய்கைகளைப் பயன்படுத்திப் பெரும்பாலான செயன்முறைப் பிரசினங்களை இலகுவில் தீர்த்துக்கொள்ளலாம் என்பதை நாம் அனுபவத்தில் கண்டுள்ளோம். தாயங்களுக்கும் இவ்வாறான கணிதச் செய்கைகளைப் பிரயோகிக்கலாம்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள A, B ஆகிய தாயங்களைக் கருதுக.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

இந்த இரண்டு தாயங்களும் ஒரே வரிசையையுடைய தாயங்களாகும். அவ்வரிசை 3×2 ஆகும். A, B ஆகிய தாயங்களின் கூட்டுத்தொகையாகக் கருதப்படுவது A, B ஆகியவற்றின் ஒத்த மூலகங்களைக் கூட்டுவதால் பெறப்படும் தாயமாகும்.

இதற்கேற்ப

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 9 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

எனப் பெறப்படும். இங்கு ஒத்த மூலகங்கள் எனப்படுவது ஒரே இடத்தில் அமைந்துள்ள மூலகங்களாகும். உதாரணமாக தாயம் A இல் முதலாம் நிரைக்கும் இரண்டாம் நிரலுக்குமுரிய மூலகம் 1 ஆகும். தாயம் B இல் அதற்கு ஒத்த மூலகம் 6 ஆகும். அதாவது தாயம் B இல் முதலாம் நிரைக்கும் இரண்டாம் நிரலுக்கும் உரிய மூலகமாகும். இனி அட்சரகணிதக் குறியீடுகளையுடைய ஓர் உதாரணத்தைக் கவனிப்போம்.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \text{ ஆயின் } X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

தாயங்களைக் கூட்டலானது ஒரே வரிசையைக் கொண்ட தாயங்களின் கூட்டல் ஆகும். இதற்கேற்ப வரிசை வேறாகவுடைய தாயங்களுக்குத் தாயக் கூட்டல் பொருத்தமற்றதாகும்.

தாயக் கூட்டலைப் பயன்படுத்தக் கூடிய முறையை ஓர் உதாரணத்திலிருந்து இப்போது பார்ப்போம். இவ்வுதாரணம் மிக இலகுவாயினும் செயன்முறைப் பிரயோகங்களில் தாயத்தைப் பயன்படுத்தும் முறை இதன் மூலம் நன்கு தெளிவாகின்றது.

உதாரணம் 1

ரபீக், வினோத் ஆகியோர் ஒரு பாடசாலைக் கிரிக்கெற் குழுவினரின் இருண்டு பந்து வீச்சாளர்கள் ஆவர். 2014, 2015 ஆகிய ஆண்டுகளில் நடைபெற்ற ஒருநாள், இருண்டு நாள் பாடசாலைகளுக்கிடையிலான போட்டிகளில் அவர்கள் இருவரும் பெற்ற விக்கெற்றுகளின் எண்ணிக்கைகள் பற்றிய விபரங்கள் கீழேயுள்ள இருண்டு அட்டவணைகளில் தரப்பட்டுள்ளன.

	2014	2015
ரபீக்	21	23
வினோத்	15	16

	2014	2015
ரபீக்	14	16
வினோத்	9	19

ஒரு நாள் போட்டிகளில்
பெற்ற விக்கெற்றுகள்

இருண்டு நாள் போட்டிகளில்
பெற்ற விக்கெற்றுகள்

ஒரு நாள் போட்டிகளுக்கான விபரங்களைத் தரும் தாயத்தை A எனவும் இருண்டு நாள் விபரங்களைத் தரும் தாயத்தை B எனவும் பெயரிடுவோம். அப்போது

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 19 \end{pmatrix} \text{ என எழுதலாம். இத்தாயங்களின் நிரல்கள்}$$

மூலம் ஆண்டுகளும் நிரைகள் மூலம் பந்துவீச்சாளர்களும் காட்டப்படுகின்றன. $A + B$ என்னும் தாயத்தைக் காண்போம்.

$$A + B = \begin{pmatrix} 35 & 39 \\ 24 & 35 \end{pmatrix}$$

இத்தாயம் $A + B$ இனால் தரப்படுவது யாது என எண்ணிப் பார்க்க. இதன் மூலம் ரபீக், வினோத் ஆகியோர் 2014, 2015 ஆண்டுகளில் ஒரு நாள், இருண்டு நாள் போட்டிகளில் பெற்ற மொத்த விக்கெற்றுகள் தொடர்பான தகவல் காட்டப்படுகின்றது. இதனை ஓர் அட்டவணை வடிவில் இவ்வாறு காட்டலாம்.

	2014	2015
ரபீக்	35	39
வினோத்	24	35

ஒரு தாயத்திலிருந்து இன்னொரு தாயத்தைக் கழிப்பதையும் கூட்டலைப் போலவே செய்யலாம். இங்கு ஒத்த மூலகங்களைக் கழிப்பது இடம்பெறுகின்றது. இதற்கும் இருண்டு தாயங்களும் ஒரே வரிசையுடையதாயிருத்தல் வேண்டும். ஓர் உதாரணமாக

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ எனின் } A - B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

இன்னோர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

X என்பது வரிசை 3×3 ஆகவும் எல்லா மூலகங்களும் 2 ஆகவுமுள்ள ஒரு தாயமும் Y என்பது வரிசை 3×3 ஆகவுள்ள அலகுத்தாயமும் ஆயின் தாயம் $X - Y$ ஐக் காண்க.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே,

$$X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

இரண்டு தாயங்களின் சமதன்மை

இரண்டு தாயங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை என்பதை ஆராய்வோம்.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A, B ஆகிய தாயங்கள் சமனாவதற்கு $a = 2, b = 3, c = 10, d = 9$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது ஒரு தாயத்தின் ஒவ்வொரு மூலகமும் மற்றைய தாயத்தின் ஒத்த மூலகங்களுக்கு சமனாக வேண்டும். அவ்வாறான சந்தர்ப்பங்களில் இரண்டு தாயங்களும் சமமானவை எனப்படும்.

பயிற்சி 19.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக.

$$(i) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(v) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(vi) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(vii) \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(viii) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக.

$$(i) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(v) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(vi) \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ஆயின் a , b , c , d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
5. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ஆயின் x , y , z ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ஆயின் x , y ஆகியவற்றைக் காண்க.

19.3 ஒரு தாயத்தை ஓர் எண்ணால் பெருக்கல்

இனி நாம் ஒரு தாயத்தை ஓர் எண்ணால் பெருக்குதல் பற்றிப் பார்ப்போம். ஒரு தாயத்தை ஓர் எண்ணால் பெருக்கல் என்பதால் கருதப்படுவது தாயத்தின் எல்லா மூலகங்களும் அவ்வெண்ணால் பெருக்கப்படுவதாகும். தாயம் A ஐ k என்னும் நிறை எண்ணால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் தாயம் kA என எழுதப்படும். உதாரணமாக

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

தாயத்தை 5 ஆல் பெருக்கும்போது பெறப்படுவது

$$5A = \begin{pmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 1 & 5 \times 0 \\ 5 \times (-2) & 5 \times 8 & 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 \\ -10 & 40 & 5 \end{pmatrix} \text{ என்னும் தாயமாகும்.}$$

குறிப்பு: தாயம் A , k என்னும் நிறைவெண்ணால் பெருக்கும்போது பெறப்படும் தாயத்தின் வரிசையும் A இன் வரிசையே ஆகும்.

உதாரணமாக $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ஆயின் $3X - 2Y$ ஐக் காண்க.

$$3X - 2Y = 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + -2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 19.3

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக

(i) $3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(ii) $4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(iii) $3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(v) $3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(vi) $-2 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $3 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b, c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. $4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y, z ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. $2 \begin{pmatrix} 5 & x \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} y & -5 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ஆயின் x, y, a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

19.4 தாயங்களின் பெருக்கம்

மேலே கூறப்பட்ட தாயங்களின் கூட்டல், கழித்தல், ஒரு தாயத்தை எண்ணொன்றால் பெருக்கல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகள் எண்களுக்கான கணிதச்செய்கையின் முறையிலேயே செய்யப்பட்டன என்பதை நீங்கள் விளங்கிக் கொண்டிருப்பீர்கள். ஆயினும் தாயங்களைப் பெருக்குதல் ஓரளவு வித்தியாசமான முறையில் எடுத்துரைக்கப்படுகின்றது. தாயங்களைப் பெருக்கலை பின்வருமாறு விபரிக்கலாம்.

முதலில் நிரைத்தாயமொன்றை நிரல்தாயமொன்றினால் பெருக்கும் முறையைக் கவனிப்போம். A என்பது வரிசை $1 \times m$ ஆகவுள்ள ஒரு நிரைத்தாயமாகும். B என்பது $m \times 1$ ஆகவுள்ள ஒரு நிரல் தாயமும் ஆகும்போது AB யினால் தாயங்களின் பெருக்கம் தரப்படும். இப்பெருக்கலை எடுத்துரைக்கப்படும் முறையை விபரிப்பதற்காக உதாரணமாக,

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ எனவும் $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம். A என்பது வரிசை 1×2 உடைய தாயமாகும். B என்பது வரிசை 2×1 உடைய தாயமும் ஆகும். அப்போது

$$AB = (a_1b_1 + a_2b_2)_{1 \times 1}$$

எனப் பெருக்கம் AB கருத்துரைக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ஆயின் AB ஐக் காண்க.

$$AB = (5 \times 3 + 2 \times 1) = (17)$$

எந்த ஒரு தாயத்தையும் ஓர் எண்ணால் பெருக்க முடியும் என்பதை நாம் மேலே கற்றோம். ஆனால் கூட்டலையும் கழித்தலையும் வரிசைகள் சமனாக உள்ளபோது மாத்திரம் செய்யமுடியும் எனவும் நாம் கற்றோம். தாயப்பெருக்கலையும் சில சந்தர்ப்பங்களில் மாத்திரம் செய்யலாம். மேலே நாம் ஒரு நிரைத் தாயத்தை ஒரு நிரல் தாயத்தினால் பெருக்கும் முறையைக் கண்டோம். ஆயினும் அதிலும் வேறுபட்ட வரிசைகளையுடைய தாயங்களையும் பெருக்கலாம். மிகப் பொதுவானதாக A என்பது $m \times n$ ஆகவுள்ள தாயமும் B என்பது வரிசை $n \times p$ ஐ உடைய தாயமுமாயின் A இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் B இன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமனாகுமாயின் பெருக்கம் AB ஐக் காணலாம். அது எவ்வாறு என்பதை இப்போது பார்ப்போம்.

உதாரணமாக $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

ஆயின் பெருக்கம் AB ஐக் காணும் முறையை ஆராய்ந்து பார்ப்போம்.

மேலே நிரைத்தாயத்தையும் நிரல் தாயத்தையும் பெருக்கிய முறையில் A யின் ஒவ்வொரு நிரையையும் B யின் ஒவ்வொரு நிரலினால் பெருக்குக.

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} (2 \ 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} & (2 \ 4) \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \\ (3 \ 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} & (3 \ 5) \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 6 & 2 \times 8 + 4 \times 7 \\ 3 \times 1 + 5 \times 6 & 3 \times 8 + 5 \times 7 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 26 & 44 \\ 33 & 59 \end{pmatrix} \text{ (ஒவ்வொரு பெருக்கத்தையும் காண்பதால்)}
 \end{aligned}$$

மேலே பெருக்கத்தாயம் AB யின் மூலகங்கள் எடுத்துரைக்கப்பட்ட முறையை இவ்வாறு விபரிக்கலாம்.

- AB யின் முதலாம் நிரைக்கும் முதலாம் நிரலுக்கும் உரித்தாகும் மூலகங்களைப் A இன் முதலாம் நிரையை (நிரைத்தாயம்) B யின் முதலாவது நிரலால் (நிரல் தாயத்தால்) பெருக்குவதன் மூலமாகும்.
- AB யின் முதலாவது நிரைக்கும் இரண்டாவது நிரலுக்கும் உரிய மூலகத்தைப் பெறுவது A யின் முதலாவது நிரையை (நிரைத்தாயம்) B யின் இரண்டாம் நிரலினால் (நிரல்தாயத்தினால்) பெருக்குவதால் ஆகும்.
- AB இன் இரண்டாம் நிரைக்கும் முதலாம் நிரலுக்கும் உரிய மூலகங்களைப் பெறுவது A இன் இரண்டாம் நிரையை (நிரைத்தாயம்) B யின் முதலாம் நிரலினால் (நிரல் தாயத்தினால்) பெருக்குவதால் ஆகும்.
- AB யின் இரண்டாம் நிரைக்கும் இரண்டாம் நிரலுக்கும் உரிய மூலகத்தைப் பெறுவது A இரண்டாவது நிரையை B யின் இரண்டாவது நிரலைப் பெருக்குவதால் ஆகும்.

இம்முறையில் எந்தவொரு பெருக்கக்கூடிய இரண்டு தாயங்களையும் பெருக்கலாம். மேலும் சில உதாரணங்களை ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 2

$X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ஆயின் XY வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படுகின்றது. எனக் காட்டி XY யைக் காண்க. தாயம் YX கருத்துடையதாகுமா?

X இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 2 உம் Y யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 2 உம் ஆகும்.

அதாவது X இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை Y யின் நிரைகளுக்கு எண்ணிக்கைக்குச் சமனாகும். எனவே பெருக்கம் XY இனால் எடுத்துரைக்கப்படும்.

இனி

$$XY = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

X இன் ஒவ்வொரு நிரலையும் Y யின் ஒவ்வொரு நிரலினால் பெருக்குவதால்

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ 2 & 3 & \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 6 \times 7 \\ 2 \times 1 + 3 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 46 \\ 23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

இனி பெருக்கம் YX ஆனது கருத்துரைக்கப்படுகின்றதா என ஆராய்வோம்.

Y யில் நிரல்கள் 1 உம் X இல் நிரைகள் 2 உம் உள்ளன. அதாவது Y யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை X இன் நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமன் அல்ல. எனவே YX என்னும் பெருக்கம் கருத்தற்றது.

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம். தாயப் பெருக்கத்தின் கீழ் முதலில் நாம் QP வடிவிலான முறையில் பெருக்கத்தை கருத்துரைத்தோம். அதனை மேற்குறித்த கருத்துரைப்பின் படியும் காணலாம்.

அதாவது Q வின் எல்லா நிரைகளையும் P யின் எல்லா நிரல்களினாலும் பெருக்குவதால் மூலகங்களைக் காண்பதன் மூலமாகும்.

$$QP = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

அதாவது தனி மூலகமொன்றுடனான தாயமாகும். தனி மூலகமொன்றுடனான தாயம் ஓர் எண் எனப்படும். எனவே $QP = 9$ என எழுதப்படும்.

மேலும் இங்கு PQ உம் வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படுகின்றது. PQ இன் மூலம் பெறப்படவேண்டிய வரிசை 2×2 ஐ உடைய ஒரு தாயமாகும்.

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 & 2 \times 3 \\ (-1) \times 6 & (-1) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

பயிற்சி 19.4

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்களைச் சுருக்குக.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(viii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(ix) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(x) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ ஆயின் a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. A , B , C ஆகிய மூன்று தாயங்களும் $A \times B = C$ ஆகுமாறு உள்ளது. கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

தாயம் A இன் வரிசை	தாயம் B இன் வரிசை	தாயம் C இன் வரிசை
1×2	2×1	
2×2	 $\times 1$	
.... $\times 2$	 $\times 1$	1×1
... $\times$	$1 \times$	2×2
.... $\times 1$	 $\times 2$	$1 \times$

4. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ஆயின்,

- (i) $P \times Q$
- (ii) $P \times R$
- (iii) $Q \times R$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ஆயின்

- (i) AB ஐக் காண்க.
- (ii) BA ஐக் காண்க.
- (iii) AB , BA ஆகியவற்றுக்கிடையிலான தொடர்பு யாது?