

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2014

සංයුක්ත ගණිතය I

පැය තුනයි

A කොටස

ප්‍රශ්න සියල්ලට ම දී ඇති හිස්තැන් මත පිළිතුරු සපයන්න.

- ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු ම n ධන නිඛිල සඳහා $1+2+3+\dots+n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- $a < b < c$ වන පරිදි a, b, c තාත්ත්වික නියත වූ $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)} \leq 0$ අසමානතාවෙහි විසඳුම් කුලකය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. FRACTION යන වචනයේ අක්ෂර සියල්ල ම ගෙන සෑදිය හැකි පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න. එම පිළියෙල කිරීම් අතුරෙන්, ප්‍රාණාක්ෂර (vowels) ඉරට්ට ස්ථානවල පිහිටන පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව කීයද?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $x \xrightarrow{\lim} \infty \left\{ \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right\} = 0$ වන පරිදි a සහ b නියත සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $a \in \mathbb{R}^+$ වේ.

ඒ නයින්, $a \neq 1$ වන විට $\int \frac{a^x}{1+a^x} dx$ සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AB පාදයෙහි සමීකරණය $x + y + 2 = 0$ ද විකර්ණ ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය $(4, 2)$ ද වේ. A ලක්ෂ්‍යය හරහා $x + 2 = 0$ සරල රේඛාව ගමන් කරයි. DC පාදයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. වක්‍රයක් $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$ යන පරාමිතික සමීකරණ මගින් දී තිබේ. මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

$(0, 1)$ ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප t හි අගය සොයා, එම ලක්ෂ්‍යයෙහිදී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය, $x -$ අක්ෂයට සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. $x - y = 0$ සහ $7x - y = 0$ යන සරල රේඛා දෙක ම ස්පර්ශ වන සේ මුළුමනින්ම පළමුවන වෘත්ත පාදයෙහි පිහිටි, අරය ඒකක $2\sqrt{2}$ වන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. $\text{Arg } iz = \pi$ සහ $|z+1|+|z-1|=4$ වන පරිදි z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. $\theta + \alpha = \frac{\pi}{6}$ නම්, $(\sqrt{3} + \tan \theta)(\sqrt{3} + \tan \alpha) = 4$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\tan \frac{\pi}{12}$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (i) p, q හා r තාත්ත්වික නියත ද $p \neq 0$ ද වන $px^2 + qx + r = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල α සහ β නම්,
 $\alpha + \beta = -\frac{q}{p}$ සහ $\alpha\beta = \frac{r}{p}$ බව පෙන්වන්න.
 $x^2 + ax + b = 0$ සමීකරණයෙහි මූල λ හා 3μ ද $x^2 + cx + d = 0$ සමීකරණයෙහි මූල 3λ හා μ ද වේ නම්,
 $b = d$ බව පෙන්වන්න. මෙහි a, b, c හා d තාත්ත්වික නියත වේ.
ඒ නයින්, මූල λ හා μ වන වර්ගජ සමීකරණය $12x^2 + 3(a+c)x + 4b = 0$ බව පෙන්වන්න.

- (ii) $f(x) \equiv x^3 - 2ax^2 + (ab + a^2 - b^2)x - ab(a - b)$ යැයි ගනිමු. මෙහි a සහ b යනු $a \neq b$ වන පරිදි වූ
තාත්ත්වික නියත වේ. $x - a + b$ යන්න $f(x)$ බහුපදයෙහි සාධකයක් බව පෙන්වා, ඒ නයින්, $f(x) = 0$
සමීකරණය විසඳන්න.
 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයෙහි මූල 1, 3 සහ 4 වන පරිදි වූ p, q හා r නියතවල අගය අපේක්ෂා කෙරෙන්න.

(iii) හින්න භාග සොයන්න: $\frac{7x-10}{x^2(x-2)}$

12. (i) ඕනෑම n ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා $(a + b)^n$ හි ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

ඒ නයින්, $\sum_{r=0}^n {}^nC_r = 2^n$ සහ $\sum_{r=0}^n \left({}^nC_r\right)^2 = {}^{2n}C_n$ බව අපේක්ෂා කෙරෙන්න.

$a + b = 1$ වන විට $\sum_{r=1}^n r {}^nC_r a^r b^{n-r} = na$ බව ද පෙන්වන්න.

- (ii) r වන පදය U_r වන ශ්‍රේණියක මුල් පද n හි ඵෙකය $\sum_{r=1}^n U_r = \frac{n}{12}(n+1)(n+2)(n+3)$ බව දී ඇත.
මෙහි $1 \leq r \leq n$ වේ.

$\frac{1}{U_r} \equiv k\{f(r) - f(r+1)\}$ වන පරිදි $f(r)$ ශ්‍රිතය සහ k නියතය සොයා, එමඟින් $\sum_{r=1}^n \frac{1}{U_r}$ ලබාගන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_r}$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වන්න.

$2 \leq 3\left\{1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right\} < 3$ බව අපේක්ෂා කෙරෙන්න.

13. (i) $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$ වන විට, A^2 සොයා, ඒ නයින්, A^{-1} ලබාගන්න.
 $A^{2015}X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ වන පරිදි X න්‍යාසය නිර්ණය කරන්න.

- (ii) $z^6 = 1$ සමීකරණයෙහි මූල $x + iy$ ආකාරයෙන් ලබාගන්න. මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ සහ $i^2 = -1$ වේ.

z_1 හා z_2 යනු $z^6 = 1$ සමීකරණයෙහි ප්‍රතින්ත මූල දෙකක් නම්, $|z_1 - z_2|$ සඳහා ගත හැකි අගය, 1, 2 සහ $\sqrt{3}$ බව ආගන්ඛි සටහන භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.

- (iii) z යනු $|z| = \sqrt{3}$ වන පරිදි වූ ඕනෑම සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් වන විට, ආගන්ඛි සටහන භාවිතයෙන්,

$2 - \sqrt{3} \leq |z + 2| \leq 2 + \sqrt{3}$ බව ද $-\frac{\pi}{3} \leq \arg(z + 2) \leq \frac{\pi}{3}$ බව ද පෙන්වන්න.

14. (i) θ පරාමිතියක් ඇසුරෙන් $x = \sec \theta + \tan \theta$ සහ $y = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$ යැයි දී ඇතිවිට, $x + \frac{1}{x} = 2 \sec \theta$ සහ $y + \frac{1}{y} = 2 \operatorname{cosec} \theta$ බව පෙන්වන්න.

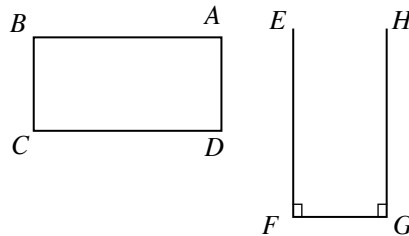
θ ඇසුරෙන් $\frac{dx}{d\theta}$ සහ $\frac{dy}{d\theta}$ ලබාගන්න.

ඒ නයින්, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$ බව පෙන්වන්න.

- (ii) ව්‍යුත්පන්න පිළිබඳ මූලධර්ම භාවිත කර, $x > 0$ සඳහා, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} > \ln(1+x)$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ සහ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය පැහැදිලිව දක්වමින්, $-1 < x \leq 1$ සඳහා $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහන අඳින්න. ($\ln 2 \approx 0.69$ ලෙස ගන්න.)

- (iii) P 18l Q



ශිෂ්‍යයකුට තොරණක ආකෘතියක් සැකසීම සඳහා 18l දිග PQ සිහින් කම්බිය සපයා ඇත. EFGH රාමුවේ අනාබද්ධ වූ (බද්ධ නොවූ) E, H අන්ත දෙක ABCD සෘජුකෝණාස්‍ර රාමුවේ CD පාදය මත බද්ධ කිරීමෙන් තොරණෙහි ආකෘතිය සකස් කෙරේ. මෙම රාමු, $AB = EF = GH$ ද $AD = FG$ ද තොරණෙහි ආකෘතියේ වර්ගඵලය උපරිම ද වන පරිදි සැකසීමට කම්බිය කැපිය යුතු කොටස් දෙකෙහි දිග වෙන වෙනම සොයන්න.

15. (i) සුදුසු ආදේශයක් යොදා ගැනීමෙන්,

$$\int \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{4}a^2 \left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{8}(a^2 - 2x^2) + c$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි a නිශ්ශුන්‍ය තාත්ත්වික නියතයක් වන අතර c අභිමත නියතයක් වේ.

- (ii) $\int_0^p f(p-x) \, dx = \int_0^p f(x) \, dx$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $f(x)$ යනු $[0, p]$ ප්‍රාන්තරය තුළ සන්තතික ශ්‍රිතයකි.

$$I = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{(a-x)^n + x^n} \, dx \quad \text{සහ} \quad J = \int_0^a \frac{x^n}{x^n + (a-x)^n} \, dx \quad \text{යැයි ගනිමු.}$$

$I = J$ බව සාධනය කරන්න.

I සහ J අතර තවත් සම්බන්ධයක් ලබාගෙන, ඒ නයින්, I අගයන්න.

- (iii) $\int_0^2 (x+2)^3 (x+5) \, dx$ අගයන්න.

16. (i) $l_1 \equiv ax + by + c = 0$ සහ $l_2 \equiv px + qy + r = 0$ යනු සමාන්තර නොවන සරල රේඛා දෙකකි. එකවර ශුන්‍ය නොවන λ සහ μ පරාමිති සඳහා, $\lambda l_1 + \mu l_2 = 0$ මගින් $l_1 = 0$ සහ $l_2 = 0$ සරල රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛාවක් නිරූපණය කෙරෙන බව පෙන්වන්න.

$ABCD$ චතුරස්‍රයේ AB, BC, CD හා DA පාදවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $2x + 10y - 9 = 0$, $8x + y - 1 = 0$, $x + 5y - 5 = 0$ සහ $7x - 4y - 15 = 0$ වේ. A සහ C ලක්ෂ්‍යවල බණ්ඩාංක නොසොයා, AC විකර්ණයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

- (ii) ප්‍රථම මූලධර්ම භාවිතයෙන්, $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය සහ අරය සොයන්න. x අක්ෂය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට එම වෘත්තයට, එකිනෙකට ලම්බ ස්පර්ශක දෙකක් අඳිනු ලැබේ. එවැනි ලක්ෂ්‍ය දෙකක් පවතින බව පෙන්වන්න.

17. (i) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, කෝසයින් නීතිය (cosine rule) ප්‍රකාශ කරන්න. ඒ නයින්, $a = b \cos C + c \cos B$ බව අපෝහනය කරන්න.

$(b + c) \cos A + (c + a) \cos B + (a + b) \cos C = a + b + c$ බව ද පෙන්වන්න.

- (ii) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ සහ $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව දී ඇති විට, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{63}{65}$ බව පෙන්වා, ඒ නයින් $\sin(\alpha - \beta)$ හි අගය ලබාගන්න.

- (iii) $\tan 3x$ යන්න $\tan x$ ඇසුරින් ප්‍රකාශ කර, $f(x) = \tan 3x \cot x$ ශ්‍රිතයෙහි පරාසය $\mathbb{R} \setminus \left[\frac{1}{3}, 3\right)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\tan 3x - \tan x = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

- (iv) $y = \sin^{-1}x$ සහ $y = \cos^{-1}x$ යන එක් එක් ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතයෙහි ප්‍රධාන අගය පරාසය ලියා දක්වන්න.

එම පරාස සැලකීමෙන්, $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ බව සාධනය කරන්න.

* * *

2. සුමට තිරස් තලයක් මත තබා ඇති, ස්කන්ධය M වන කුඤ්ඤයක තිරසර α කෝණයකින් ආනත සුමට මුහුණත මත ස්කන්ධය m වන අංශුවක් තබා ඇත. පද්ධතිය නිසලතාවෙන් මුදාහැරිය විට, කුඤ්ඤය d දුරක් චලනය වන කාලය තුළ අංශුව ආනත තලය දිගේ s දුරක් චලනය වේ. පද්ධතියෙහි ත්වරණය ප්‍රකාශිත ලෙස නොසොයා, $(m + M)d = ms \cos \alpha$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. මිනිසෙක් ඔහුගේ පාමුලට h සිරස් උසකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට, තිරස් සහ සිරස් ප්‍රවේග සංරචක පිළිවෙළින් u සහ v වන පරිදි බෝලයක් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් තලයක ප්‍රක්ෂේප කරයි. බෝලය ඔහුගේ පාමුල සිට d තිරස් දුරකින් පිහිටි සුමට සිරස් බිත්තියක එයට ලම්බව ගැටී පොලා පැන, මිනිසාගේ පාමුලට පැමිණේ. $2ghe^2 = v^2(1 - e^2)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි e යනු බෝලය සහ බිත්තිය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකයයි.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් M වන රථයක් $u \text{ kmh}^{-1}$ නියත වේගයෙන් ධාවනය කෙරෙන විට එහි එන්ජිම $H \text{ kW}$ ක්ෂමතාවෙන් ක්‍රියා කරයි. රථය $R \text{ N}$ නියත ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය වේ නම්, $Ru = 3600H$ බව පෙන්වන්න. දැන් එන්ජිම අක්‍රිය කර තිරිංග යෙදූ විට, $d \text{ km}$ දුරකදී රථය නිශ්චලතාවට පත්වේ. මුළු චලිතය සඳහා මාර්ග ප්‍රතිරෝධය නොවෙනස්ව පවතී යැයි උපකල්පනය කර, තිරිංගවල මන්දන බලය වන R' යන්න $R'du = \frac{25}{648}Mu^3 - 3600Hd$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Q යනු OAB ත්‍රිකෝණයේ AB පාදය ත්‍රිජේදනය කරන සේ B ට වඩාත් සමීපව AB මත වූ ලක්ෂ්‍යයයි. P යනු $OP : OQ = 2 : 5$ වන පරිදි OQ මත වූ ලක්ෂ්‍යයයි. දික් කරන ලද AP රේඛාවට R හිදී OB පාදය හමුවේ. $OP = \frac{2}{15}(a+2b)$ බව පෙන්වා, AP යන්න a හා b ඇසුරින් ලියා දක්වන්න. මෙහි a සහ b යනු O ට සාපේක්ෂව පිළිවෙළින් A හි සහ B හි පිහිටුම් දෛශික වේ.

$OA + kAP$ යන්න a ගෙන් ස්වායත්ත වන පරිදි k අදිශයට ගත හැකි අගය සොයන්න.

R හි පිහිටුම් දෛශිකය වන r යන්න b ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කිරීමෙන් $OR : OB = 4 : 13$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. දිග $2a$ සහ බර w වන ඒකාකාර AB දණ්ඩක් සුමට සිරස් බිත්තියකට ලම්බ සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත්තේ එහි A කෙළවර බිත්තිය ස්පර්ශ කරමින් හා A කෙළවරට ඉහළින් B කෙළවර පවතින සේ දණ්ඩ මත ලක්ෂ්‍යයක් සුමට නාදැත්තක් මත පිහිටන පරිදි ය. බිත්තිය සහ නාදැත්ත අතර දුර d ද දණ්ඩේ තිරසර ආනතිය θ ද නම්, $\cos^3 \theta = \frac{d}{a}$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. X සහ Y යනු අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි දෙකකි. $P(X) \neq 0$ සහ $P(Y) \neq 0$ වේ. X සහ Y සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත විය හැකි ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

A සහ B යනු $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A|B) = \frac{1}{4}$ සහ $P(B|A) = \frac{1}{3}$ වන පරිදි වූ සිද්ධි දෙකකි. හේතු දක්වමින්, පහත ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

- (i) A සහ B සිද්ධි ස්වායත්ත වේ ද?
- (ii) A සහ B සිද්ධි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ ද?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. A සහ B සසම්භාවී සිද්ධි දෙක සිදුවීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් $\frac{1}{2}$ හා $\frac{1}{4}$ වේ. ඒවා අතරින් වරකට එක් සිද්ධියක් පමණක් සිදුවීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{3}$ වේ.

(i) සිද්ධි දෙකම එකවර සිදුවීමේ සම්භාවිතාව,

(ii) B සිද්ධිය සිදුවී ඇතැයි දී ඇතිවිට A සිද්ධිය සිදුවීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව, සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. මධ්‍යන්‍යය සහ මාතය පිළිවෙළින් 8 සහ 5 වන නිරීක්ෂණ 9ක් පහත දී ඇත.
5, 6, 13, 5, 10, 13, 3, x , y ; මෙහි $x < y$ වේ.

(i) x හිත් y හිත් අගය වෙන වෙනම,

(ii) නිරීක්ෂණ 9 හි මධ්‍යස්ථය

සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. නිරීක්ෂණ 9 කින් යුත් සංගහනයක මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 25 හා 4 වේ. එයට 15, 20 හා 40 යන නිරීක්ෂණ එකතු කළ විට ලැබෙන නව සංගහනයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) ආරෝහකයක් සිරස්ව ඉහළට ඒකාකාර ත්වරණයකින් යුතුව නිශ්චලතාවෙන් ගමන් අරඹන විටම බෝලයක් ආරෝහකයට සාපේක්ෂව u සිරස් ප්‍රවේගයකින් ආරෝහකය තුළ ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. බෝලයේ පියාසර කාලය T නම්, ආරෝහකයට සාපේක්ෂව බෝලයේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

$u > \frac{1}{2}gT$ නම්, ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, ආරෝහකයේ ත්වරණය $\frac{1}{T}(2u - gT)$ බව පෙන්වන්න.

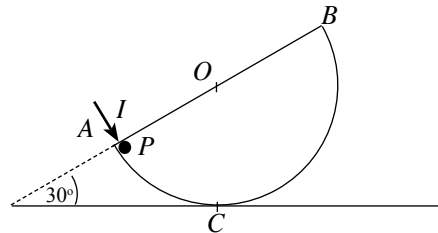
- (b) දකුණු දිශාවට $u \text{ km h}^{-1}$ වේගයෙන් යාත්‍රා කරන යුද නැවක කපිතාන්වරයා, සිය නැවට $d \text{ km}$ දුරක් බටහිරින්, උතුරින් 30° ක් නැගෙනහිර දිශාවට $u\sqrt{3} \text{ km h}^{-1}$ වේගයෙන් යාත්‍රා කරන සේ පෙනෙන සතුරු නැවක් දකියි.

(i) සතුරු නැවෙහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

(ii) නැව් දෙක එකිනෙකට ආසන්නතම වන විට, යුද නැවේ සිට සතුරු නැවේ දිග්‍රහයක්, එම නැව් දෙක අතර කෙටිතම දුරක් සොයන්න.

(iii) යුද නැවට $0.9d \text{ km}$ දුරක් වෙඩි තැබිය හැකි නම්, සතුරු නැව මිනිත්තු $12\sqrt{2}\frac{d}{u}$ කාලයක් තුළ යුද නැවෙහි වෙඩිවලට භාජනය වීමට ඉඩ ඇති බව පෙන්වන්න.

12. කේන්ද්‍රය O ද අභ්‍යන්තර අරය a ද වන සුමට අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් එහි ගැට්ට තිරසර 30° ක් ආනත වන සේ රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි අවල තිරස් තලයක් මත වූ C ලක්ෂ්‍යයකට අවලව සවි කර ඇත. පාත්‍රයේ ගැට්ටේ පහළම ලක්ෂ්‍යය A ද ඉහළම ලක්ෂ්‍යය B ද වන අතර A, B, C ලක්ෂ්‍ය එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයේ අවලව තබා, පාත්‍රයේ ඇතුළු පෘෂ්ඨය දිගේ ABC තලයේ චලනය වන සේ එම අංශුවට AB උම්බව I ආවේගයක් දෙනු ලැබේ.



(i) P අංශුවේ ආරම්භක ප්‍රවේගය සොයන්න.

(ii) P අංශුව, යටි අත් සිරස සමග OP රේඛාව α කෝණයක් සාදන පරිදි C හා B අතර පිහිටන විට, අංශුවේ ප්‍රවේගයත් පාත්‍රය මගින් අංශුව මත යෙදෙන ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.

(iii) අංශුව B ලක්ෂ්‍යය තෙක් ගමන් කරයි නම්, $I \geq \frac{m}{2}\sqrt{10ga}$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $I > \frac{m}{2}\sqrt{10ga}$ නම්, අනතුරුව ඇතිවන චලිතයේදී අංශුව නැවත A ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කිරීම සඳහා, $I = \frac{m}{2}\sqrt{14ga}$ විය යුතු බව ද පෙන්වන්න.

13. ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $3mg$ ද, ස්වාභාවික දිග $3l$ ද වන ලුහු සුමට ප්‍රත්‍යස්ථ AB තන්තුවක A කෙළවර තිරස් සිලිමක ලක්ෂ්‍යයකට අවලව ගැටගසා, B කෙළවරින් ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් එල්ලා ඇත. අංශුවේ චලිතයට බාධා නොවීමට ප්‍රමාණවත් තරම් සිලිම උස යැයි සලකන්න.

(i) අංශුවේ සමතුලිත පිහිටීමට A සිට ඇති සිරස් දුර සොයන්න.

දැන්, තන්තුව මැදි කර යෙදූ ස්කන්ධය m වන කුඩා මුදුවක් A හි නිසලව තබා සිරුවෙන් මුදාහැරේ. මුදුව, තන්තුව දිගේ පහළට චලනය වේ.

(ii) මුදුව අංශුවේ ගැටීමට ආසන්න මොහොතේ ප්‍රවේගය $2\sqrt{2gl}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) මුදුව, අංශුව හා ගැටී තනි වස්තුවක් බවට පත්වේ නම්, එම සංයුක්ත වස්තුවේ ආරම්භක ප්‍රවේගය $\sqrt{2gl}$ බව පෙන්වන්න.

(iv) සංයුක්ත වස්තුව සරල අනුවර්තී චලිතයක යෙදෙන බව පෙන්වා, එහි කෝණික ප්‍රවේගය ද දෝලන කාලාවර්තය ද සොයන්න.

(v) සංයුක්ත වස්තුවේ සරල අනුවර්තී චලිතයට බාධා නොවීම පිණිස සිලිමෙහි අවම උස $(5 + \sqrt{5})l$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

14. (a) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යනු එකිනෙකට සමාන්තර නොවන නිශ්ශුන්‍ය දෛශික දෙකකි. λ හා μ යනු දී ඇති අදිශ දෙකක් වන විට $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ වනුයේ $\lambda = \mu = 0$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$OACB$ සමාන්තරාස්‍රයේ BC පාදය $BD = 3BC$ වන සේ D තෙක් දික්කර ඇත. $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$ හා $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$ ලෙස ගෙන, $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\mathbf{OD}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

$\mathbf{OE} = \lambda\mathbf{OD}$ ද $\mathbf{AE} = \mu\mathbf{AC}$ ද වන පරිදි λ හා μ නියත සොයන්න. මෙහි E යනු OD හා AC රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ.

$\mathbf{i}$ සහ $\mathbf{j}$ යනු එකිනෙකට ලම්බ ඒකක දෛශික වන විට $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ හා $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ ලෙස ප්‍රකාශ කර ඇත. $OACB$ රොම්බසයක් වීම සඳහා සැපිරිය යුතු අවශ්‍යතාව x_1, y_1, x_2, y_2 ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

- (b) $AB = 6a$ ද, $BC = 2\sqrt{3}a$ ද වන $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක AB, BC, CD හා DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q, R හා S වේ. විශාලත්ව $15\text{ N}, \lambda\text{ N}, 5\text{ N}, 10\text{ N}, \mu\text{ N}$ හා $30\sqrt{3}\text{ N}$ වන බල හයක්, අකුරුවල පටිපාටියෙන් දැක්වෙන දිශා ඔස්සේ පිළිවෙළින් PQ, QR, RS, SP, AD හා CD දිගේ ක්‍රියා කරයි. මෙම බල පද්ධතිය,

(i) සමතුලිත විය නොහැකි බවත්,

(ii) යුග්මයකට උභ්‍යන්තර වේ නම්, එවිට $\lambda = -40$ සහ $\mu = 20$ බවත්,

(iii) AD දිශාවට 10 N බලයකට උභ්‍යන්තර වේ නම්, එවිට $\lambda = -40$ සහ $\mu = 30$ බවත්, පෙන්වන්න.

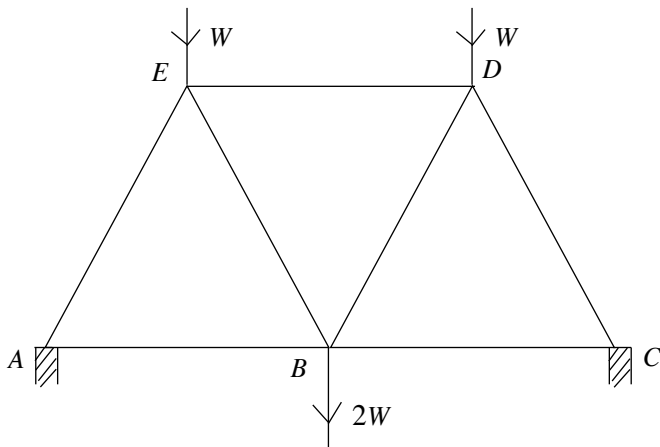
15. (a) එක එකක දිග $4a$ බැගින් වන AB, BC හා CD ඒකාකාර දඬු තුනක බර පිළිවෙළින් $\lambda W, W$ හා λW වේ. ඒවා B හිදී හා C හිදී සුමටව ගටවා A හා D කෙළවරවල් එකිනෙකට $8a$ දුරක් ඇතිත් එකම තිරස් මට්ටමේ වූ අවල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට සුවලව අසව් කර ඇත්තේ AD ට පහළින් BC පවතිමින් පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතව පිහිටන පරිදි ය.

(i) A හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න.

(ii) BC දණ්ඩ මත B හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න.

(iii) BC දණ්ඩ මත B හිත් C හිත් ප්‍රතික්‍රියාවල ක්‍රියාරේඛා BC ට $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ සිරස් දුරක් පහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයකදී හමුවෙයි නම් λ හි අගය සොයන්න.

(b)



සමාන දිගැති සැහැල්ලු දඬු හතකින් සැදි රාමු සැකිල්ලක් රූපයේ දැක්වේ. මෙම රාමු සැකිල්ල A සහ C හිදී ආධාරක දෙකක් මත සමතුලිතව සිරස් තලයක ඇති අතර, $2W$, W සහ W භාර පිළිවෙළින් B, D සහ E හිදී එය මත යොදා ඇත.

- රාමු සැකිල්ල මත C හි ආධාරකයේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.
- බෝ අංකනය යොදා ගනිමින් රාමු සැකිල්ල සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, එනමින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල W ඇසුරෙන් සොයන්න. එක් එක් ප්‍රත්‍යාබලය ආතතියක් ද තෙරපුමක් ද යන්න දක්වන්න.

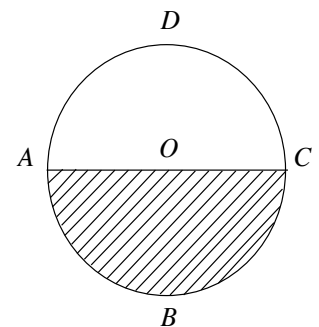
16. (a) වෘත්ත වාපයක හැඩය ගත් ඒකාකාර තුනී කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, වාප කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. මෙහි r යනු වාපයේ අරය ද 2α යනු වාපය මගින් එහි කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය ද වේ.

ඒ නමින්, තුනී අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම ලබා ගන්න.

සංයුක්ත වස්තුවක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අරය r වන තුනී ABC අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයකින් හා ADC අර්ධ වෘත්තාකාර තුනී කම්බියකින් සාදා ඇත. O යනු වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය වේ. ආස්තරය සාදා ඇති ද්‍රව්‍යයේ පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ සහ කම්බිය සාදා ඇති ද්‍රව්‍යයේ රේඛීය ඝනත්වය k නම්, සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට ඇති දුර සොයන්න.

මෙම සංයුක්ත වස්තුව A ලක්ෂ්‍යයෙන් නිදහසේ ඵල්ලා ඇති විට, සිරස සමඟ AB සාදන කෝණය සොයන්න.

තවද සංයුක්ත වස්තුව එසේ ඵල්ලා ඇති විට, A ට සිරස්ව පහළින් O පිහිටයි නම්, $k : \sigma$ අනුපාතය සොයන්න.



- (b) දණ්ඩක එක් කෙළවරක් රළු තිරස් තලයක් මත ද, දණ්ඩ මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් අවල සුමට නාදැත්තක් මත ද වන පරිදි සිරස් තලයක සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ ඇත. රළු තිරස් තලයෙන් දණ්ඩ මත යෙදෙන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය දණ්ඩේ බරට සමාන නම්, දණ්ඩෙහි සිරසට ආතතිය, සර්ෂණ කෝණයෙන් අඩක් විය යුතු බව පෙන්වන්න.

17. (a) සතියේ පරිභෝජනය සඳහා තමා වඩාත්ම කැමති වර්ගයෙන් මාළු මිලදී ගැනීම පිණිස සෑම ඉරිදාවකම තම නිවසට නුදුරු ධීවර වෙළඳසලට හෝ සතොස අලෙවිසලට හෝ පොදු වෙළඳසලට හෝ යන ගෘහනියක එම එක් එක් ස්ථානයට යෑමෙහි සම්භාවිතා පිළිවෙළින් $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ වේ. එම එක් එක් ස්ථානයෙන් ඇය වඩාත්ම කැමති මාළු වර්ගය මිලට ගැනීමට හැකිවීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ වේ.

- (i) කිසියම් ඉරිදා දිනයක ඇය වඩාත්ම කැමති මාළු වර්ගය මිලට ගැනීමට ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
- (ii) එක් ඉරිදාවක ඇයට තමා වඩාත්ම කැමති මාළු වර්ගය මිලට ගැනීමට නොලැබුණි නම් එසේ වන්නට වඩාත්ම ඉඩ ඇත්තේ ඇය කුමන ස්ථානයට යාම නිසා ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.
- (iii) එක් එක් ඉරිදා දිනයෙහි සිදුවීම් ස්වයන්ත යැයි සලකා, ඇයට ඕනෑම අනුයාත ඉරිදා දින තුනකින් අඩුම තරමින් දින දෙකකවත් වඩාත්ම කැමති මාළු වර්ගය මිලට ගැනීමට ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
- (iv) ඇගේ අසල්වැසියකු ද සෑම ඉරිදාවකම මාළු මිලදී ගැනීම සඳහා එම ස්ථානවලටම යන අතර එසේ යෑමෙහි සම්භාවිතා ද පිළිවෙළින් $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ ම වේ. ඔවුන් දෙදෙනා ස්වයන්ත ලෙස තීරණ ගන්නේ නම්, කිසියම් ඉරිදා දිනයක මාළු මිලදී ගැනීමට දෙදෙනාම එකම ස්ථානයකට යෑමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) x_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ දත්ත සමූහයක මධ්‍යන්‍යය $\bar{x}$ සහ සම්මත අපගමනය s_x අර්ථ දක්වන්න.

$u_i = a + bx_i$ පරිණාමනය භාවිත කර, $\bar{u} = a + b\bar{x}$ සහ $s_u^2 = b^2 s_x^2$ බව සාධනය කරන්න.

මෙහි $\bar{u}$ හා s_u යනු u_i අගය සමූහයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනයයි.

x_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, n_1$ හා y_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, n_2$ යනු නිරීක්ෂණ සමූහ දෙකකි. $\bar{x} = 35$ හා $s_x = 4$ වේ.

$u_i = 70 + 3x_i$ පරිණාමනය භාවිතයෙන් x_i අගය සමූහය u_i අගය සමූහය බවට පරිණාමනය කරනු ලැබේ. $\bar{u}$ සහ s_u ගණනය කරන්න.

එසේම $u_i = a + by_i$ පරිණාමනය භාවිතයෙන් y_i අගය සමූහය ද, එකම u_i අගය සමූහයට පරිණාමනය කළ යුතු නම් හා $\bar{y} = 19$, $s_y = \frac{12}{5}$ බව දී ඇත්නම්, $a, b > 0$ වන පරිදි a හා b සොයන්න.

අනුරූප පරිණාමනවලට අනුව x හි අගය 55 සහ y හි අගය 32 යන නිරීක්ෂණ පරිණාමනය කරනු ලැබේ නම්, එම අගය දෙක අතුරෙන් වැඩි u අගය ලැබෙන්නේ කවර නිරීක්ෂණය සඳහා දැයි තීරණය කරන්න.

* * *